МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кафедра програмних та комп'ютерно-інтегрованих технологій

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«Сучасна теорія управління»

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

за спеціальністю

174 – Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка

Затверджено на засіданні кафедри ПКІТ.
Протокол №2 від 05.09.2024

Одеса 2024

Конспект лекцій з дисципліни «Сучасна теорія управління» для здобувачів спеціальності ***174 – Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка***, (освітньо-професійна програма: Комп’ютерні технології автоматизації)

Укл.: К.В.Беглов- Одеса: Одеська політехніка, 2024. – 89 с.

Укладач: **Беглов К.В.** канд., техн. наук, доцент

ЗМІСТ

Лекція 1. Визначення та теоретико-множинна формалізація поняття система 4

Лекція 2. МАТРИЧНИЙ АНАЛІЗ 8

Лекція 3 . МАТРИЧНІ ФУНКЦІЇ 15

лекція 4. МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ 19

лекція 5. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ: ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМ З НЕПРЕРИВНОЮ І ДИСКРЕТНОЮ ШКАЛАМИ ЧАСУ, ОПЕРАТОРНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИСТЕМ 22

Лекція 6 ПОДІБНІСТЬ СИСТЕМ І КАНОНІЧНІ ФОРМИ ОДНОМІРНИХ СИСТЕМ 27

Лекція 7 . СТРУКТУРА СИСТЕМИ І З'ЄДНАННЯ ПІДСИСТЕМ 33

Лекція 8. РОЗДІЛ РУХІВ, АГРЕГУВАННЯ, ДЕЦЕНТРАЛІЗАЦІЯ, РЕДУКЦІЯ І СТАЦІОНАРИЗАЦІЯ СИСТЕМ 37

Лекція 9. ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ 42

Лекція 10. КІЛЬКІСНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМ 48

лекція 11. КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ СТАНУ 54

Лекція 12 КОНСТРУЮВАННЯ СПОСТЕРІГАЧІВ СТАНУ 58

Лекція 13 . КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ ЗІ ЗБУРЕННЯМИ ТА ЗАВДАННЯМИ 64

ЛЕКЦІЯ 1. ВИЗНАЧЕННЯ ТА ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННА ФОРМАЛІЗАЦІЯ ПОНЯТТЯ СИСТЕМА

Слово «система», що перекладається як «ціле, складене з частин», вперше з'явилося у давньогрецькій мові і з того часу іноді використовувалося у працях філософів. Регулярне використання системних уявлень починається із середини XX століття, з моменту формулювання Норбертом Вінером концепції кібернетики та Людвігом фон Берталанфі концепції загальної теорії систем.

Обидві концепції запропонували абстрагувати «реальні» системи, складені з елементів різної природи, та замінити їх дослідженням, аналізом та синтезом «формальних» систем, складених із різних математичних відображень, у певному сенсі відповідних «реальним» системам. Це дало поштовх до розвитку системних уявлень у рамках системотехніки, прикладної математики, теорії управління, моделювання.

З усієї безлічі систем розглядатимемо лише формальні динамічні системи. Для їх визначення поставимо завдання дослідження зміни в часі значень будь-якого набору змінних та приймемо, що досліджувані процеси задовольняють двом принципам:

принципу причинності , який стверджує, що будь-який досліджуваний процес має причину, що викликала цей процес,

і принципу детермінізму , який стверджує, що величина змінних у час залежить тільки від своїх минулих значень і залежить від значень, що вони приймуть у майбутньому.

Процес-причину назвемо *входом* системи, а процес-наслідок – *виходом* системи. Внутрішня цілісність системи в тому, що вхід і вихід безпосередньо пов'язані. Всю історію зміни входу до поточного часу зі зміною виходу наступного часу пов'язує так зване *стан* системи.

Для формалізації сказаного введемо два відображення. Перше відображає стан і вхід системи в поточний час у стан в наступний момент часу. Друге

відображає стан у поточний момент часу значення виходу в цей же момент часу. Саме цей набір відображень та назвемо системою.

Взаємодія між системами відбувається лише через входи та виходи. Стан системи можна оцінити лише вирішивши завдання синтезу так званого спостерігача системи.

Для подальшої формалізації використовуємо апарат теорії множин. Введемо безліч моментів часу **T** станів **X** , входів **U** і виходів **Y.** Безліч всіх відображень **T** в **U** позначимо і назвемо *процесом зміни входу* .

Значення процесу фіксований момент позначимо **u (t)** , а будь-якої миті часу – .

//

//

Підмножини та аналогічно сконструйованих множин і назвемо процесами *зміни виходів та станів* .

Тоді система **S** буде задана парою відображень (припускатимемо, що всі відображення однозначно визначені)

де (T× T) – (векторний добуток множини) набір пар чисел (τ, t) у яких τ≤ t , тобто

Якщо моменти часу τ і t фіксовані, вираз, що визначає систему, можна переписати в наступному вигляді:

.

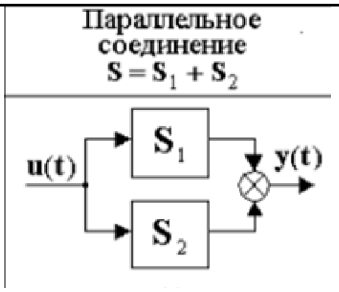
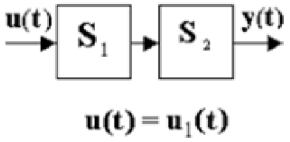
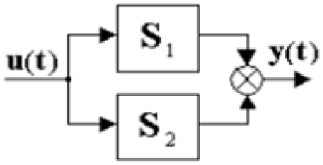
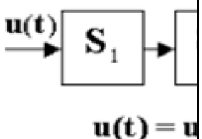
Для спрощення також використовуватимемо запис системи у вигляді

Безпосереднє використання теоретико-множинного опису зручно, коли необхідно сконструювати складну систему з *підсистем* , не вдаючись до деталей, як саме це необхідно робити.

Описати конструювання системи можна за допомогою трьох операцій: *паралельного* з'єднання підсистем, *послідовного* з'єднання і з'єднання зі *зворотним зв'язком* , а саме .

Задавши системи S_1 і S_2 у вигляді:

Тоді операції з'єднання систем будуть записані у вигляді

Параллельное соединение $S = S_1 + S_2$ 	u(t)=u1(t)=u2(t) y(t)=y1(t)+y2(t)
Последовательное соединение $S = S_1 \bullet S_2$  $u(t) = u_1(t)$	u(t)=u1(t) u2(t)=y1(t) y(t)=y2(t)
Параллельное соединение $S = S_1 + S_2$  $u(t)=u_1(t)=u_2(t)$ $y(t)=y_1(t) \otimes y_2(t)$ Последовате соединен $S = S_1 \bullet$  $u(t) = u$ $u_2(t) = y$ $y(t) = y$	u2(t)=y1(t)=y(t) u1(t)=u(t) y2(t)

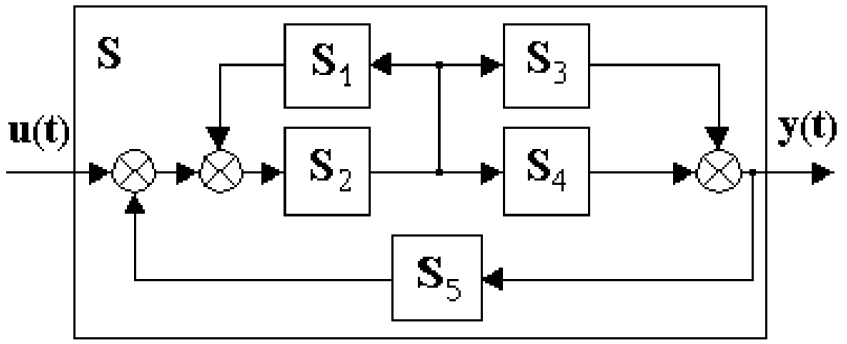
Запишемо деякі властивості введених операцій:

Введемо множину статичних відображень .

Якщо всі відображення однакові, для спрощення використовуватимемо знак .

Властивості відображень:

приклад. З'єднання підсистем, зображене на малюнку,



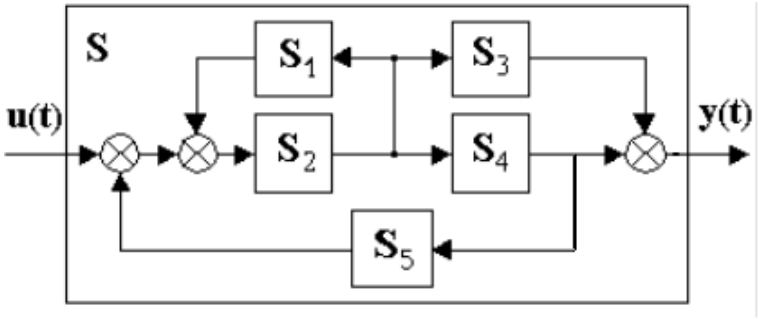
описується співвідношеннями

, , , , ,

, ,

або остаточно

.



.

Запитання.

1. Дайте визначення динамічної системи.
2. Що таке стан системи?
3. Що таке вхід та вихід системи?
4. Коли доцільне використання теоретико-множинної формалізації систем?

ЛЕКЦІЯ 2. МАТРИЧНИЙ АНАЛІЗ

Матриця – це таблиця, що має **n** рядків та **m** стовпців.

Розмірностями називають числа **n** і **m** . Тоді можна записати – матриця **A** складається з дійсних чисел і має розмірність **n** і **m** . У цій лекції закріпимо сенс позначень **n** і **m .**

Вектором називають матрицю, що складається з одного стовпця або рядка.

Квадратною називають матрицю, якщо **n** = **m .**

Діагоналлю квадратної матриці називають елементи, що займають місця від верхнього лівого до правого нижнього кута матриці. Цим же знаком, а також позначимо формування матриці з чисел, виставлених на діагональ, - *діагональної* матриці .

Одиничною називають діагональну матрицю з одиницями на діагоналі і позначають .

Слід квадратної матриці дорівнює сумі елементів діагоналі.

Визначник квадратної матриці дорівнює , де дорівнює **A** після видалення **i** -го рядка і **j** - го стовпця.

Приєднана матриця **adj (A)** створюється заміною кожного елемента $\mathbf{a_{ij}}$ матриці **A** на з наступним транспонуванням.

Ранг - це найбільша розмірність квадратної підматриці, у якої . Ранг не більший за найменшу розмірність матриці.

Транспонованою називають матрицю , в якій рядки матриці **A** записані у вигляді стовпців.

Зворотна матриця дорівнює . Позначення означає , або, що те саме, .

Симетрична – це матриця, елементи якої щодо діагоналі збігаються, тобто вихідна матриця дорівнює транспонованій.

Функціональною називається матриця скалярних функцій скалярного аргументу **t** що записується у вигляді **A(t).**

Складання та віднімання матриць однакового розміру проводиться поелементно.

Правило множення **A *B** =

приклади.

; ; ;

1. Множення (n , m) матриці на (m , k) матрицю дає в результаті (n , k) матрицю, m всередині має збігатися, інакше множити не можна.

2. (i , j) елемент добутку дорівнює сумі добутків елементів і рядка першої матриці на елементи j стовпця другої матриці.

3. *При множенні матриці не можна переставляти місцями*

Обчисліть .

Рішення

Обчислення зворотної матриці

Приклад:

Перевірка

Множення на одиничну матрицю не змінює вихідну матрицю. Зворотна від діагональної матриці також діагональна і складається з елементів, кожен з яких дорівнює одиниці, поділеній на відповідний діагональний елемент вихідної матриці.

Для прямокутної матриці замість зворотної може бути обчислена псевдооборотна

.

Пряма сума матриць задається формулою

.

Квадратні матриці та *подібні,* якщо вони пов'язані співвідношенням де невироджену матрицю **T** можна вибрати довільно **.**

Одним з найбільш важливих перетворень подібності є перетворення довільної матриці на діагональну матрицю. Діагональні елементи такої матриці називають *власними значеннями* і є корінням *характеристичного рівняння*

.

Рівняння має рівно **n** коріннів, деякі з яких можуть збігатися.

Набір всіх власних значень матриці називають *спектром* матриці та позначають . Можна показати, що

, , , .

Якщо немає власних значень, що повторюються, то матриця має *просту структуру* . Матриця простої структури подібна до діагональної матриці . Перетворення подібності запишеться як .

Матриця , що перетворює матрицю **A** на діагональну, складена так, що кожен її **i** стовпець є **i** *власним вектором* вихідної матриці

Щоб обчислити **i** власний вектор матриці **A,** необхідно знайти числа , що задовольняють рівності . Тривіальне рішення (всі числа = 0) не підходить.

Розглянемо приклад.

,

Отримаємо .

З першої рівності визначаємо . Підставляючи отримані значення у другу рівність, бачимо, що воно виконується. З цього можна дійти ~~невтішного~~ висновку, перший власний вектор обчислений правильно.

Розрахунок другого власного вектору:

Матриця власних векторів має вигляд .

Зворотна матриця дорівнює .

Остаточно -> .

Якщо матриця має комплексні власні значення, то матриця перетворення подібності теж буде комплексною. Щоб уникнути використання комплексних матриць, діагональну матрицю можна записати в блочно-діагональному вигляді , де кожна пара комплексно-сполучених чисел й замінена блоком дійсних чисел

.

Таке перетворення може бути отримано, якщо матрицю **T** помножити праворуч на матрицю **Q,** що містить **1** на діагоналі для кожного дійсного власного значення, і блок кожної пари комплексно - сполучених чисел.

Розглянемо приклад. Нехай дана матриця .

Діагональна матриця, подібна **A** , і матриця перетворення подоби **T** мають вигляд

,

.

Тоді дійсна діагональна форма і матриця **Q** мають вигляд

, .

Дійсна матриця перетворення подібності дорівнює .

Якщо є кратні корені, то ситуація ускладнюється. Тоді матриця **A** подібна до блочно -діагональної (Жорданової) матриці. У ній різним власним значенням відповідають діагональні елементи, а групі власних значень, що повторюються (наприклад, рівних) відповідає *жорданів блок*

.

У теорії систем інтерес становлять матриці, у яких кожній групі власних значень, що повторюються, відповідає тільки один жорданів блок. Кожен власний вектор, відповідний різному своєму значенню і перший вектор групи , обчислюється як і раніше. Вектори, що відповідають групі однакових власних значень будь-якого жорданового блоку (індекс зверху означає номер вектора всередині групи), починаючи з другого вектора, обчислюються за залежністю: де

.

Розглянемо, наприклад , матрицю , де .

Оскільки розмір першого жорданова блоку дорівнює =2. Число блоків . Розмір другого блоку . Число блоків . Вирази для власних векторів мають вигляд

, , .

Тоді .

Важливим перетворенням для неквадратних матриць є *сингулярне розкладання*. Перетворювана матриця може бути записана у вигляді , де матриці , повинні задовольняти умовам , (*SVD -розкладання*). Це розкладання використовується для перетворення довільної прямокутної матриці майже діагональну форму. Так, вважаючи **m > n** можна записати , , .

Числа називають *сингулярними значеннями* матриці . Сингулярні та власні значення квадратної матриці пов'язані співвідношенням , а матриці **U** та **V** є матрицями власних векторів матриць і , називаючись *матрицями правих та лівих сингулярних векторів* .

Сингулярне розкладання дає ще один спосіб обчислення псевдозворотної матриці, якщо матриця має власні нульові значення або неповний ранг. Для цього залишають матриці перетворення подоби та нульові сингулярні числа, замінюючи ненульові сингулярні числа їх зворотними величинами, тобто якщо , то , , .

Норма вектора .

Матрична норма має бути узгоджена із введеною векторною нормою. Така відповідність задається таблицею

ТАБЛИЦЯ 1 . Відповідність матричних та векторних норм

Норма матриці	Спектральна	Евклідова	***l*** - норма	- норма	M- норма
Правило обчислення					
Норма вектора					

Позитивно визначено називається симетрична матриця у якої всі власні значення позитивні . Зазначимо, що у симетричної матриці власні значення можуть бути лише речовими. Умова позитивної визначеності записується як .

Найпростішою позитивно визначеною матрицею є діагональна матриця з позитивними елементами.

Гурвіцева називається матриця **A ,** у якої всі дійсні частини власних значень негативні .

Нільпотентною називається матриця **A ,** у якої всі модулі власних значень менше одиниці .

У матлабі матриця вводиться рядками; елементи поділяються пробілами, рядки знаком **;** вся матриця у квадратних дужках. Поодинока, нульова, діагональна матриці – **eye** (n), **zeros** (n), **diag (A).** Транспонування **A '.** Розмір матриці виводиться програмою [n, m] = **size** (A **).** Власні значення **L** та перетворення подібності **T [T,L]= eig (A), [T,L]= jordan (A)** . Сингулярне розкладання **[U, S, V] = svd (A)** . Визначник матриці – **det (A)** . Ранг матриці - **rank (A)** . Норма матриці і вектора - = **norm (A), = norm (A, 'fro '), = norm (A, 1), = norm (A, inf).** Зворотна матриця – **inv (A)** . Слід матриці - **trace (A)** . Дійсна частина числа - **real (b)** . Абсолютне значення числа – **abs (b).** Зворотна матриця **– inv (A).**

Завдання на модуль:

1. Знайти псевдообернену від матриці a = .

Рішення:

2. Які матриці можуть бути подібними:

Якщо знайти власні значення першої матриці

D =1

Що збігається з діагональною матрицею номер 4. Тобто матриця 4 є діагональною матрицею подібності матриці 1.

Доведемо це:

3. Знайдіть норму матриці для знайдених подібних.

5. Знайдіть позитивно визначену матрицю

.

Лише одна позитивно визначена:

Інші несиметричні
Матриця з одиницями має значення дорівнює 0.

ЛЕКЦІЯ 3 . МАТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Наступним кроком матричного аналізу є дослідження завдання: якщо відомо, як обчислити функцію скалярного аргументу **x** , що означає запис , де ?

Розглянемо приклад:

тоді

Матриця називається коренем квадратним з матриці A якщо квадрат, тобто матричний добуток B*B збігається з матрицею A.

Використання ряду функцій Тейлора дає найбільш природну відповідь на це питання. Ряд зводить обчислення будь-якої функції до обчислення полінома. Тоді *матрична функція* задається формулою

де числа .

(індекс **i** у дужках означає диференціювання).

Безпосереднє використання ряду незручно. Східність ряду не дуже висока і потрібна велика кількість обчислень.

Більше зручно використання подібності матриць, за допомогою якого функція від матриці визначається наступним чином

, .

Повернемося до нашого прикладу:

Власні значення матриці A :

Матриця власних векторів

Ще один приклад,

2. Обчисліть , використовуючи теорему Келі – Гамільтона.

Складемо Вандермодову матрицю

det (V) = -2

f (A) = q 0 * I + q 1 * A = [1 0; 0 1]

Інший спосіб обчислення матричної функції дає *теорема Келі -Г амільтона* . Теорема встановлює, кожна матриця задовольняє своєму характеристичному рівнянню, т. е. виписавши поліном

, ,

можна записати

.

Для того щоб обчислити на основі теореми функцію , запишемо

,

де – невідомі скаляри.

З виразу видно, що з обчислення будь-якої матричної функції (навіть, наприклад) немає необхідності зводити матрицю в ступінь, більшу **n -1** , де **n** - розмірність квадратної матриці .

Визначити невідомий вектор можна досить просто, якщо матриця не має власних кратних значень. Тоді справедлива рівність , де вандермодова матриця для спектру , а вектор ,

.

Зазначені вище формули дають результат, якщо відомі власні значення матриці.

Можна приблизно обчислити функцію і без власних значень, використовуючи *апроксимацію Паде* . Для довільної функції, що диференціюється **f (A)** апроксимація Паде має вигляд

.

Коефіцієнти і виходять з умови, щоб коефіцієнти ряду Тейлора при ступенях ... апроксимації Паде [ ] були тими ж, що і коефіцієнти ряду Тейлора, що сходяться функції . Використовуючи вказану умову, коефіцієнти апроксимації Паде (у симетричному, найчастішому випадку **m = l**) можуть бути отримані за рівнянням

Операції диференціювання та інтегрування матричних функцій виконуються за формулами, аналогічними формулами для скалярних функцій.

Матрична експонента , де **t** – скаляр, **A** – матриця, особливо важлива теоретично систем. Для неї справедливі властивості

, якщо

Симетричні [1/1] та [2/2] апроксимації Паде для цієї функції мають вигляд

Запитання

1. Як визначається матрична функція?
2. Що встановлює теорема Келі – Гамільтона?
3. Як обчислюється матрична функція з використанням подібності до матриць?
4. Яка основна властивість апроксимації Паде ?

Завдання

1. Обчисліть , використовуючи подібність матриць.
2. Обчисліть , використовуючи теорему Келі – Гамільтона.

3. Знайдіть [1,1] апроксимацію Паде функції, заданої відрізком ряду Тейлора .

4. Запишіть [2,2] апроксимацію Паде для ланки запізнення **.**

Зауваження. У програмній системі Матлаб матрична експонента обчислюється підпрограмою **expm (A).** Ця програма може обчислювати експоненту і від символьної матриці.

ЛЕКЦІЯ 4. МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Визначивши матричні функції, можна перейти до конструювання рівнянь виду **f (P) = 0** щодо невідомої матриці **P.**

З усіх можливих класів матричних рівнянь найбільш важливими є лінійні та квадратні, які вивчимо більш детально.

Клас лінійних рівнянь представлений матричними рівняннями Ляпунова. Ці рівняння перелічені у табл. 1.

ТАБЛИЦЯ 1. Матричні рівняння Ляпунова

Назва	Запис рівняння	Символічний запис	Умови розв'язання
Рівняння Ляпунова			

Рішення рівняння Ляпунова зводиться реорганізації матриць для запису звичайної системи лінійних рівнянь. Розглянемо приклад .

.

Рішення рівнянь Ляпунова і є єдиними, симетричними, позитивно визначеними **P >0** якщо **A** – гурвіцева для рівняння першого типу або нільпотентна для рівняння другого типу, а **Q >0.**

Можна відзначити, що для справедлива рівність

.

Таким чином, замість обчислення інтеграла зазначеного виду можна вирішити лінійне матричне рівняння Ляпунова.

Подібно до інтегралу, що визначає рішення рівняння Ляпунова першого типу, сума

дорівнює рішенню рівняння Ляпунова другого типу .

Рівняння Ляпунова дає правило обчислення спеціальної ганкелевої норми, яка залежить від трійки матриць **{ A , B , C }** і обчислюється залежно , де , . Числа називаються *ганкелевими сингулярними числами* .

Перейдемо тепер до обговорення *квадратних матричних рівнянь* із симетричною матрицею рішень. Ці рівняння можуть бути отримані додаванням квадратного члена до запису рівняння Ляпунова і називаються *рівняннями Ріккаті* .

ТАБЛИЦЯ 2. Матричні рівняння Ріккаті

Визначення	Тип рівняння	Запис рівняння
	$\mathbf{LR}_1(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{S})$	

Оскільки ,
найчастіше використовуватимемо запис без матриці **S ,** опускаючи її й у символічному записі рівнянь.

Необхідне рішення з **P >0** завжди існує, якщо **Q >0, R >0 і** . Рішення – єдине.

Для вирішення рівнянь Ріккаті використовується *метод діагоналізації* , описаний у таблиці.

ТАБЛИЦЯ 3. Алгоритм розв'язання матричного рівняння Ріккаті

Записати рівняння		
Сформувати матрицю **M**		
Виконати перетворення подоби	; ;	

Відсортувати власні значення та вектори		
Обчислити рішення		

Розглянемо приклад розв'язання рівняння Ріккаті .

Простий приклад: ,

Коріння беруться лише негативні.

$$\left((-5.385)\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5 & -4\\ -1 & 5\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{T}_{12}\\ \mathbf{T}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.385 & 4\\ 1 & -10.385\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{T}_{12}\\ \mathbf{T}_{22}\end{bmatrix}=\begin{matrix}-0.385\mathbf{T}_{12}+4\mathbf{T}_{22}=0\\ \mathbf{T}_{12}-10.385\mathbf{T}_{22}=0\end{matrix}$$

$$\mathbf{T}_{12}=10.385,\mathbf{T}_{22}=1\rightarrow\mathbf{t}_2=\begin{bmatrix}10.385\\ 1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\mathbf{P}=\frac{1}{10.385}=0.0963$$

Перевірка:

Рівняння вирішено правильно.

Запитання.

1. Які властивості розв'язків рівнянь Ляпунова та Ріккаті ?

2. Власні вектори, що відповідають якимось власним значенням, не враховуються при обчисленні рішення рівняння Ріккаті другого роду?

Завдання.

1. Покласти **A** = 1, **B** = 1, **Q** = 1, **R** = 1 і розв'язати рівняння Ріккаті 2 роду як звичайне квадратне рівняння та за методом діагоналізації.

Зауваження. У програмній системі Матлаб деякі матричні рівняння вирішуються так: **P** = запишемо **[K , P] = lqr (A , B , Q , R)** , для **P** = запишемо **[K , P] = dlqr (A , B , Q , R)** , для запишемо **P = lyap (A ', Q)** , для запишемо **P = dlyap (A ', Q)** .

ЛЕКЦІЯ 5. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ: ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМ З НЕПЕРИВНОЮ І ДИСКРЕТНОЮ ШКАЛАМИ ЧАСУ, ОПЕРАТОРНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИСТЕМ

Для того , щоб було легше дослідити модель об'єкта, бажано привести її до деякого стандартного вигляду, для якого вже готові загальні рішення. Таким стандартом теорії управління вважається система ДК першого порядку, яка називається нормальною формою Коші.

В теорії управління прийнято позначати вектор стану через x(t), вхід об'єкта (сигнал управління) – через u (t). Лінійна система задається матричним лінійним диференціальним

або різницевим рівнянням

де , - Вектор станів розмірності **n** ;

, - Вектор входів розмірності **m** ;

, - Вектор виходів розмірності **l** ;

– крок зміни часу між двома послідовними значеннями сигналу;

i - Номер поточного кроку часу;

t – поточний час;

великі літери позначають числові матриці.

Надалі фіксуємо значення розмірностей **n, m, l.**

Система задана коректно, якщо .

У багатьох практичних завданнях вихід – це один або кілька змінних станів, які ми можемо виміряти.

Якщо матриці A , B , C та D у моделі (1) – постійні. Такі об'єкти називаються *стаціонарними* , на відміну *нестаціонарних* об'єктів, параметри яких змінюються у часі.

Запис моделей в єдиній формі (1) дозволяє відволіктися від сенсу змінних стану та досліджувати системи різної природи стандартними методами, які добре розроблені та реалізовані у сучасних комп'ютерних програмах.

Позначення як набору матриць **{A,B,C,D},** замінює **,** залежно від контексту, систему диференціальних чи різницевих рівнянь. Якщо матриця **D** опущена, вважається, що **D = 0** .

Для стислості систему називатимемо *безперервною* чи *дискретною* замість того, щоб говорити – система з безперервною чи дискретною шкалою часу.

Наприклад, безперервна система другого порядку з двома входами та двома виходами може бути задана матрицями:

Безперервна та дискретна системи *подібні* , якщо однаковий вхід призводить до однакових значень виходу в дискретні моменти часу, тобто при справедливі рівності .

Перетворення безперервної системи в дискретну називається *дискретизацією,* а зворотне перетворення – *континуалізацією* .

Дискретизація системи **{ A , B , C , D }** в задається формулами

, , , .

Континуалізація задається формулами

, , , .

Дискретизуємо наведену вище систему **{A, B, C}**

Раніше обчислена

Виберемо

Використання формул неможливе, якщо для матриці **A** не можна знайти зворотну, тобто матриця містить **нульові** власні значення. Або, при зворотному перетворенні, містить власні значення , рівні одиниці. Тоді для перетворення використовуються формули Лютера:

для дискретизації , , ,

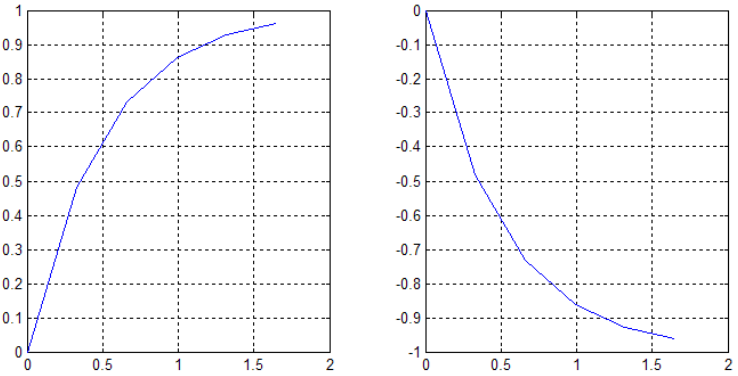
для континуалізації , , .

Чим більше , тим меншим має бути обраний крок дискретизації . Але якщо цей крок занадто малий, то час обчислення і помилки округлення істотно зростають. Рекомендується або . Оскільки регулятори прискорюють процеси у

системі, крок дискретизації слід вибирати з урахуванням оціненої норми матриці замкнутої системи. Тобто Якщо дискретизація виконується для подальшої розробки регулятора, слід вибрати, наприклад, . Крім того, має виконуватися умова , **i** = 1,2, …

Розраховуємо розгінну характеристику дискретизованої системи при подачі одиничного стрибка на перший вхід:

Побудуємо графік:



Аналогічно можна вирішити систему лінійних диференціальних рівнянь будь-якого порядку та побудувати її перехідний процес. Все рішення зводиться до додавання та множення матриць відповідного розміру, що для цифрової обчислювальної техніки є елементарним завданням.

Операторне подання безперервної системи може бути отримане, якщо до вихідної системи застосувати перетворення Лапласа, де **p** – *оператор Лапласа,* та записати

, ,

про те чи, вводячи позначення і , остаточно отримаємо .

Матриці показують вплив входів і початкових умов системи на вихід і називають *передатними функціями* (ПФ). Зазвичай вважають = **0** і використовують лише **W(p)** .

Вираз називають *резольвентою* матриці **A.** Для її обчислення потрібно звернення матриці, що містить не тільки числа, а й **символ** . Для виконання обчислень тільки з числовими матрицями, розроблено спеціальний алгоритм Левер'є . Запишемо резольвенту у вигляді

де .

Тоді матриці та числа обчислюють за формулами

Для обчислення **W(p)** отриману резольвенту необхідно помножити на матрицю **C** ліворуч і матрицю **B** праворуч.

Обчислимо передатну функцію, використовуючи алгоритм Левер'є для системи

.

Прийнявши ; ; , отримаємо

; ;

;

; .

Тоді ,

.

Для дискретних систем замість оператора Лапласа **p** використовується *оператор зсуву* (Оператор Лапласа дискретного перетворення або оператор випередження на один такт). Всі інші формули обчислення залишаються тими самими. Передатна функція записується як **W(z).**

Зворотна система або обчислюється за формулами .

Запитання.

1. Який критерій подібності безперервних та дискретних систем?
2. Як обчислити дискретну систему, якщо матриця **A** незворотня?
3. Як вибрати період дискретності?
4. Що таке передатна функція системи?
5. Для чого використовується алгоритм Левер'є ?

6. Як обчислюється обернена система?

Завдання.

1. Перевести в дискретний час систему .

2. Для системи покажіть еквівалентність двох наведених точних методів дискретизації та методу Ейлера, зробіть висновок про точність.

3. Запишіть ПФ дискретної системи { **A = 0.25, B = 1, C = 0.5, D = 2** }.

4. Запишіть ПФ зворотній системи для { **A = -0.5, B = 1, C = -0.125, D = 0.5** }.

У Матлабі дискретизація здійснюється програмою **[Ad, Bd] = c2d (A, B, dt)** . Континуалізація - програмою **[A, B] = d2c (Ad, Bd, dt).** Вектор передавальних функцій, відповідний **i** -му входу, обчислюється за допомогою програми **[n,d]=ss2tf(A,B,C,D,i)** , де **n** - матриця коефіцієнтів поліномів чисельника по спадних ступенях p **, d** - вектор коефіцієнтів поліномів знаменника передавальної функції за спадаючими ступенями **p** . Від передавальної функції простору станів переходять з допомогою функції **[A,B,C,D,]=tf2ss(n,d).**

ЛЕКЦІЯ 6 ПОДІБНІСТЬ СИСТЕМ І КАНОНІЧНІ ФОРМИ ОДНОМІРНИХ СИСТЕМ

Як і в попередніх розділах, говоритимемо, що системи подібні, якщо однакові входи призводять до однакових виходів. Тоді подібність систем і задається символічною формулою

де **T** – довільна оборотна матриця.

Справді, використовуючи загальну формулу розв'язання лінійного диференціального рівняння, можна записати:

і

Оскільки справедлива формула зрозуміло, що всім **t** і **u(t)** і, подібність систем доведено.

Навіщо це робити ?

Існує два способи використання подібності систем. По-перше, це перетворення матриць системи до виду, що містить мінімальне число чисел, що змінюються (зазвичай ненульових і не рівних одиниці). По-друге, це перетворення матриць на вигляд, що полегшує процедури аналізу та синтезу систем. Найчастіше обидва способи реалізуються в одній і тій формі уявлення, званої *канонічної формою* системи.

Канонічні форми поділяють на загальні форми та форми, специфічні для одновимірних систем (систем з одним входом та виходом, **SISO** -систем) та багатовимірних систем (систем з багатьма входами та виходами, **MIMO** -систем).

Існують дві загальні форми систем – *діагональна форма* (якщо немає повторюваних власних значень матриці **A**) і *жорданова форма* (Якщо є кратні власні значення матриці **A**). Форми виходять з вихідної системи, якщо як матриця перетворення подібності **T** використовується матриця власних векторів матриці **A** . $(p+2)(p+2)=p^2+2p+4=0.25\,p^2+0.5p+1=0 \quad p_1=p_2=-2$

Наприклад, для системи , , , діагональна канонічна форма має вигляд (матриця перетворення подібності, обчислена раніше дорівнює ,)

, , .

Канонічні форми одновимірних систем можуть бути записані у вигляді:

Матриці мають наведену вище структуру називають фробеніусовими матрицями.

Також ясно, що

= , = .

Форми безпосередньо пов'язані з передавальною функцією системи

і містять коефіцієнтів, стільки ж, скільки і в передавальній функції, замість коефіцієнтів у загальному поданні.

Якщо передавальна функція містить член у чисельнику передавальної функції , тоді числа в матрицях повинні бути змінені за правилом: замінюється на , тобто

.

Крім того, система міститиме матрицю .

Матриця перетворення подібності перетворення загальної системи **{A,B,C}** в канонічну форму, наприклад ,

задається співвідношеннями ,

Слід звернути увагу, що правильні канонічні форми виходять, якщо чисельник і знаменник передавальної функції не містять рівних один одному коріння. Інакше необхідно скоротити дріб та знизити розмірність системи.

Розглянемо, наприклад, побудова системи передавальної функції виду . Тоді .

А ось передатна функція

еквівалентна системі

Зазначимо, що передатна функція в безперервному часі за визначенням еквівалентна диференційному рівнянню з початковими нульовими умовами:

,

а передатна функція в дискретному часі еквівалентна різницевому рівнянню:

,

або, зміщуючи ряд на **n** елементів і розв'язуючі вираз щодо поточного значення виходу, отримаємо:

.

У свою чергу, зроблене перетворення еквівалентно діленню чисельника та знаменника передавальної функції на записи її у вигляді .

Розглянемо, нарешті, уявлення типових ланок як систем. Подання інерційної ланки першого порядку:

Подання інтегральної ланки першого порядку:

Подання ланки запізнення апроксимацією Паде 1-го порядку:

,

коли чисельник і знаменник одного порядку.

Канонічна форма Ассео задається формулами

, ,

- Загального виду.

Канонічна форма існує, якщо індекс керованості, що обчислюється за формулою

,

такий , що виконується умова . Матриця перетворення **T** обчислюється за правилом

,

Матриці **ctr** та **obs** рівні

,

_____ Друк_____

Розглянемо приклад. Нехай дана система

, ,

.

Неважко обчислити, що індекс керованості дорівнює . Тоді

,

.

Остаточно отримаємо

, ,

.

_____ Друк_____

```
% Знаходження канонічної форми CF7 для Am, Bm, Cm
Am = [-0.2340 0.7990 -0.7420 -0.5596 -0.2656 0.2341;
0.1184 0.9409 1.0823 0.4437 -1.1878 0.0215;
0.3148 -0.9921 -0.1315 -0.9499 -2.2023 -1.0039;
1.4435 0.2120 0.3899 0.7812 0.9863 -0.9471;
-0.3510 0.2379 0.0880 0.5690 -0.5186 -0.3744 ;
0.6232-1.0078-0.6355-0.8217 0.3274-1.1859];
Bm = [ -1.0559 -1.3493;
1.4725 -0.2611;
0,0557 0,9535;
```

```
-1.2173 0.1286;
-0.0412 0.6565;
-1.1283-1.1678];
Cm = [ -0.4606 -1.2132 0.9312 -0.6451 0.2316 1.3396;
-0.2624 -1.3194 0.0112 0.8057 -0.9898 0.2895];

ctr = [ Bm Am * Bm Am ^ 2 * Bm ];
rank ( ctr );
mu = 3;
N3 = [ 0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 1] * inv ( ctr );
N2 = N3 * Am;
N1 = N2 * Am;
Tm = [ N3; N2; N1];
TT = inv (Tm);
ACF7=Tm*Am*TT;
BCF7=Tm* Bm ;
CCF7=Cm*TT;
```

Зовнішньо-пов'язана форма служить для подання матриці передавальних функцій виду .

Показано, що якщо кожен рядок і кожен стовпець матриці передатних функцій не містять загального множника, то одновимірні підсистеми , що представляють передавальні функції , формують систему:

,,

Особливістю наведеної форми і те, що у ній взаємодія підсистем, які мають окремі передавальні функції, здійснюється за допомогою станів, а виключно з допомогою взаємодії входів і виходів підсистем.

Запитання.

1. Що таке подібні системи?
2. Які загальні канонічні форми таких систем ви знаєте?
3. При передавальній функції якого виду система містить матрицю **D** ?
4. У чому потрібно виявляти обережність при поданні передавальної функції системою?

Завдання.

1. Запишіть канонічну форму системи

, , .

2. Покажіть , що системи **S1** і **S2** подібні
S_1={}, S_2 ={}.
3. Запишіть систему передавальної функції

.

Зауваження. У програмній системі Матлаб подання передавальної функції системою здійснюється за допомогою програми **[A, B, C, D] = tf2ss (num, den),** де **num** – вектор коефіцієнтів полінома чисельника передавальної функції за спадаючими ступенями **p**, **den** – вектор коефіцієнтів полінома знаменника за спадними ступенями **p.** Коріння **r** полінома можна обчислити за допомогою програми **[r] = roots (den),** де **den** – вектор коефіцієнтів полінома за спадаючими ступенями **p.** Відновлення полінома по коріння здійснюється програмою **[den] = poly (r).** Відновлює передатну функцію з масиву нулів **z** , полюсів **p** і коефіцієнта передачі **k** програма **[n , d] = zpk (z , p , k).**

ЛЕКЦІЯ 7 . СТРУКТУРА СИСТЕМИ І З'ЄДНАННЯ ПІДСИСТЕМ

Для того щоб зробити якісний аналіз зручнішим, систему часто представляють у формі структурної схеми. Матричні структурні схеми лінійних багатовимірних систем { **A,B,C,D** } у безперервному та дискретному часі показані на малюнку.

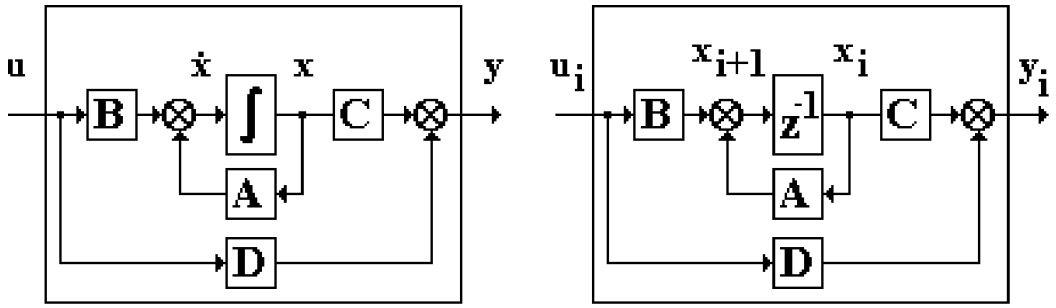


Рис. 1. Структурні схеми системи у безперервному та дискретному часі

З першої схеми видно, що сигнал на вході інтегратора, як і в рівнянні, формує сума сигналу , що проходить через матрицю і сигналу , що проходить через матрицю . Вихід системи формують сигнали , що проходить через матрицю , і проходить через матрицю . Аналогічна ситуація на схемі системи у дискретному часі.

Використовуючи матричні структурні схеми, отримаємо формули формування нової системи за допомогою з'єднань підсистем.

Правила отримання формул з'єднання розглянемо з прикладу з'єднання підсистем S_1 = і S_2 = із зворотним зв'язком $\mathbf{S=S_1S_2}$. Ясно, що при цьому число входів другої підсистеми має дорівнювати числу виходів першої підсистеми = і, відповідно, число входів першої підсистеми повинно дорівнювати числу виходів другої підсистеми =.

Нарисуємо відповідну матричну структурну схему. Далі, вважаємо інтегратор розривом ланцюга та записуємо, які сигнали приходять на вхід інтегратора та формують . Тоді видно, що це сума сигналу , що проходить

Рис. 2 Система зі зворотним зв’язком

через матрицю сигналу , що проходить як через матрицю , так і через матриці та , а також сигналу , що проходить через матриці та . Аналогічно, на вході другого інтегратора формується сума сигналу , що проходить через матрицю , а також сигналу , що проходить через матриці та . На вихід системи попадає сигнал , що проходить через матрицю . Сказане можна записати у вигляді

Розкриваючи дужки та переставляючи члени, отримаємо:

Нарешті, розширюючи вектор стану, отримаємо формули

Аналогічно можна отримати формули системи для паралельно та послідовно пов'язаних підсистем S_1 = і S_2 = .

Для паралельно пов'язаних підсистем **S=S 1 +S 2** (виконується умова =, =) запишемо:

.

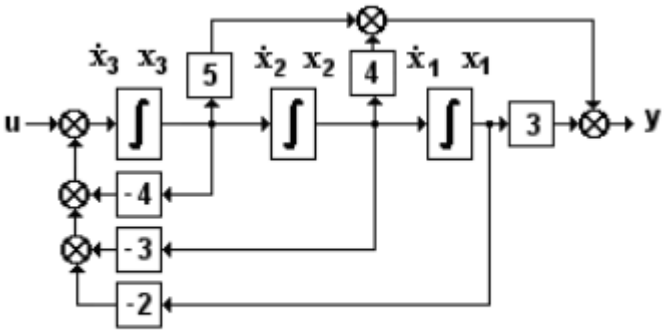
Для послідовно пов'язаних систем **S=S$_1$S$_2$** (=). Запишемо:

.

Розглянемо тепер побудову деталізованих структурних схем.

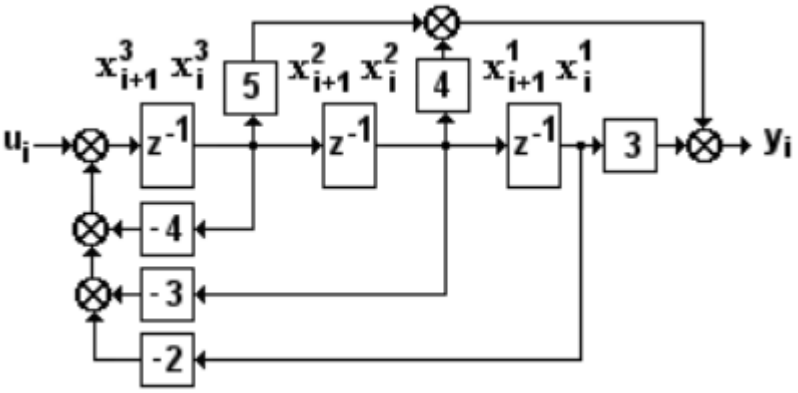
Побудуємо, наприклад, деталізовану структурну схему системи в безперервному часі, заданої матрицями

Для побудови схеми намалюємо стільки інтеграторів, яка розмірність матриці **A** системи. На вході інтегратора написуємо похідну відповідного стану, але в виході інтегратора – саме стан. Потім зв'язуємо похідні з відповідними станами та входом, а стану – з виходом відповідно до числа, зазначених у матрицях. Тут кожен рядок матриць **A** і описує суму сигналів на вході відповідного інтегратора, а кожен стовпець матриці **C** вказує сигнали, що формують вихід **.** Остаточно отримаємо структурну схему.

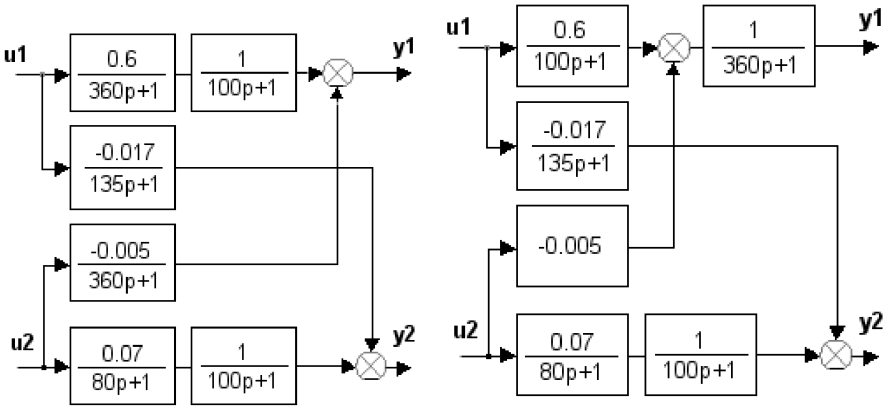


Звернімо увагу, що лінія без зазначення коефіцієнта означає одиничний коефіцієнт, тобто. одиницю як коефіцієнт на структурних схемах можна не вказувати.

Якщо система задана в дискретному часі, то структурна схема мало відрізняється, крім заміни інтегралів на оператори запізнення однією такт.



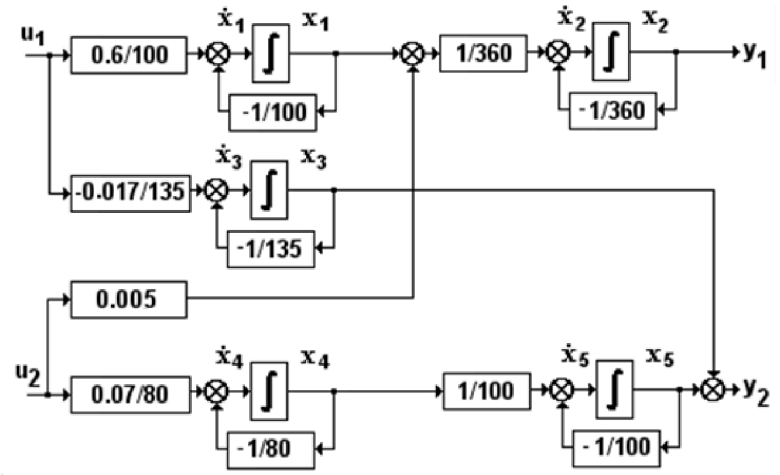
Розв'язання зворотного завдання – побудова матриць системи за деталізованою структурною схемою – розглянемо з прикладу. Нехай дана структурна схема системи (а) у безперервному часі, заданої передатними функціями.



а б

Перш ніж приступити до упорядкування матриць, необхідно перетворити структурну схему таким чином, щоб винести загальні множники. Тоді структурна схема матиме вигляд (б)

Замінюючи кожну передатну функцію виду поданням у вигляді відповідної системи , отримаємо структурну схему



Тепер можна записати матриці (для зручності запису матриць, зверху та зліва від матриці напишемо вектор стану, входу та виходу)

Запитання.

1. За яких умов можна поєднувати багатовимірні системи?

2. Яка послідовність побудови структурної схеми системи за заданими матрицями?

3. Яка послідовність побудови матриць системи за заданою структурною схемою?

4. Як визначається розмірність матриць системи за структурною схемою?

ЛЕКЦІЯ 8. РОЗДІЛ РУХІВ, АГРЕГУВАННЯ, ДЕЦЕНТРАЛІЗАЦІЯ, РЕДУКЦІЯ І СТАЦІОНАРИЗАЦІЯ СИСТЕМ

У ряді випадків у динамічній системі реалізуються процеси, у яких одна група станів змінюється значно швидше, ніж інша. Тоді можна поділити систему на дві підсистеми, одна з яких описує швидкі процеси, а друга – повільні. Така процедура називається *поділом руху* або *часовою декомпозицією*, а система – *сингулярно збуреною*.

Розглянемо систему як

де **>0** – мале число, **u(t)** – функція, що повільно змінюється. Тоді, встановлюючи **= 0,** отримаємо систему, що описує повільні процеси,

де рівність отримано в результаті розв'язування рівняння відносно . Ввівши швидкий час , можна записати швидку підсистему у вигляді , де належить константою.

У лінійному випадку аналізована система має вигляд

Встановлюючи **=0** ми отримаємо систему **{A,B,C,D},** де

Таким чином, замість початкової ми отримали дві незалежні підсистеми, а саме

Зрозуміло, що заміна вірна, якщо і .

У деяких випадках зручніша модальна, тобто заснована на знанні власних значень, формулювання завдання. Перетворюючи початкову систему **{A,B,C}** на жорданову канонічну форму за допомогою матриці власних векторів **T** і розбиваючи матрицю **J** на два блоки

,

де

,

, , , ,

можна записати повільну підсистему у вигляді

Агрегування безперервної системи **{A, B}** пов'язані з заміною вектора станів **x** вектор **z** меншої розмірності за співвідношенням **,** де **z** називається вектором *агрегованих змінних*, і **W** – прямокутна *матриця агрегування*. Ця матриця може збігатися з матрицею вимірювань **C**, і формувати зовсім інші, необхідні досліднику, вимірювання. Тоді агрегована система матиме вигляд

де

, .

Зазначимо, що агрегування не гарантує близькості процесів у початковій та отриманій системах. Цю близькість слід досліджувати додатково за допомогою моделювання. У цілому агрегування можна використовувати, якщо справедливо і

.

Децентралізація системи пов’язана з вивченням можливості розбиття системи на частини, які обрані довільно. Для децентралізації запишемо систему як

де вектор взаємозв'язків **f(x,u), f(0,0)=0,** такий, що матриці стають блочно-діагональними. Тоді нехтуючи взаємозв'язками, дістанемо

децентралізовану систему, розбиту на **k** підсистем з матрицями . Децентралізація допустима, коли , де - Вектор виходу децентралізованої системи, а - мале число. Остання умова справедлива, якщо справедлива нерівність

за умови, що , .

Редукція системи пов'язана з вибором такої системи меншої розмірності, яка близька до початкової в певному сенсі, але де .

Найпростіший спосіб редукції пов'язані з використанням збалансованої реалізації системи {}. Збалансована реалізація системи з гурвицевою матрицею **A** полягає у побудові такої системи { }, що матриці , є діагональними і, крім того, .

Збалансована реалізація, матриця перетворення подібності **T** та ганкелеві сингулярні числа **v** виходять з Матлаб-програми []= **balreal (A,B,C).**

Так, якщо

, , , ,

і ганкелеви сингулярні числа системи відсортовані в порядку спадання , то редукувавши систему до {} ми отримаємо помилку апроксимації, рівну

,

де

, .

Стаціонаризація нестаціонарних систем дозволяє отримати приблизно еквівалентну стаціонарну систему. Є два методи стаціонаризації – *усереднення* та *метод заморожених коефіцієнтів* .

Для ілюстрації усереднення запишемо лінійну періодичну систему з періодом **T**

, ,

де

, .

Тоді стаціонарну систему можна записати у вигляді

, ,

де

, .

Метод заморожених коефіцієнтів пропонує аналізувати нестаціонарну систему при кожному **t** як стаціонарну. Як буде показано нижче, метод не гарантує близькості процесів вихідної та стаціонаризованої систем. Для коректного використання методу у кожному конкретному випадку мають бути знайдені умови, що забезпечують таку близькість.

Запитання.

1. Коли використовується поділ рухів у системі?

2. Коли використовується агрегування системи?

3. Що таке децентралізація системи?

4. Навіщо використовується редукція системи?

5. Що таке стаціонаризація системи?

Завдання.

1. Проведіть поділ рухів у системі

2. Проведіть агрегування наведеної в задачі 1 системи, якщо .

3. Децентралізуйте систему

, **y=x** ,

та визначте помилку децентралізації при

4. Стаціонаризуйте систему .

5. Редукуйте систему

якщо її збалансована реалізація дорівнює

а ганкелеві сингулярні числа дорівнюють 0.0650 та 0.0032.

ЛЕКЦІЯ 9. ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Лінійна система

асимптотично стійка , якщо для будь-якого входу та довільного числа , Записуючи рівняння для виходів обох систем

,

,

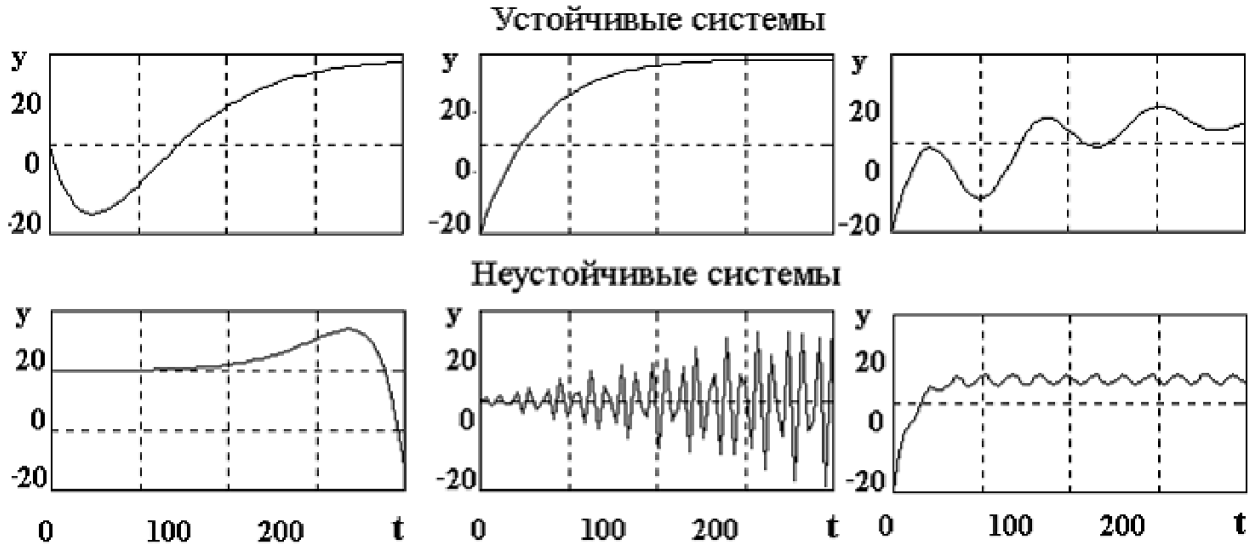
отримаємо . З останнього виразу видно, що система стійка, якщо . Виконуючи перетворення подоби, можемо записати , звідки одночасно можна сформулювати **критерій стійкості** – система стійка, якщо дійсні частини всіх своїх значень негативні . Дискретна система стійка, якщо .

Якщо є хоча б одне з ( ), то система *нестійка* . Якщо є (), а інші (), то наявність комплексного коріння веде до , де - гармонійна функція з , якщо все , то .

Для аналізу стійкості використовують функцію Ляпунова виду , де , де () та .

Стійкість системи з матрицями, що містять інтервали коефіцієнтів, називається *робастною стійкістю* .

Приклади розгінних характеристик лінійних стійких і нестійких систем показано малюнку.



Система *керована* , якщо можна вибрати такий процес на вході , що він переведе систему з будь-якого початкового стану до будь-якого кінцевого стану протягом кінцевого інтервалу часу .

Знайдемо критерій керованості одновимірної дискретної системи

У моменти часу стану системи мають вигляд

Тоді вектор входу однозначно визначається за формулою

де .

Матриця називається *матрицею керованості* та система керована, якщо існує матриця зворотна для матрици .

У разі багатовимірних систем матриця керованості буде не квадратною, а прямокутною та *критерій керованості* запишеться у вигляді

Некерована система може бути перетворена до форми керованості виду і матриця перетворення **T** має вигляд ,

де $\eta_1, \ldots, \eta_k$ - кронекерові індекси , , і - довільна матриця, що забезпечує виконання умови . Після перетворення **замість** вихідної системи **{ A , B , C }** слід використовувати систему , .

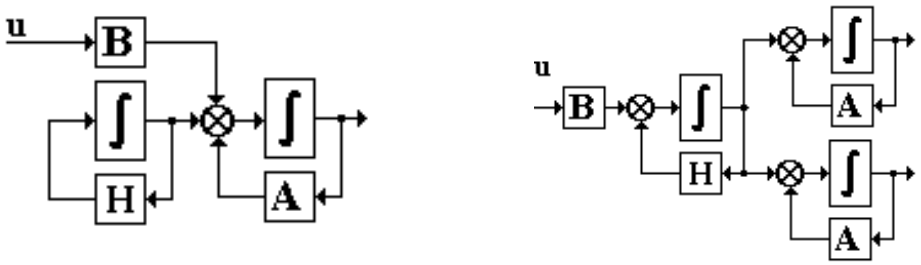
Якщо система керована, можна вибрати таке управління, що власні значення матриці **A** можуть бути розташовані на заздалегідь обрані позиції. Якщо , то лише власних значень можуть бути розташовані на задані позиції, інші власних значень залишаються на початкових позиціях. Таким чином, спектр матриці розбитий на керовану та некеровану частини. Система в безперервному (дискретному) часі називається *стабілізованою*, якщо ( ).

Система *нормально керована* , якщо вона керована по кожному входу незалежно .

Система *керована по виходу* , якщо

Система, некерована по входу , називається *інваріантною* щодо зазначеного входу.

Є три основні причини некерованості: статичний розрив, паралельні гілки та динамічний розрив. Перша - відсутність шляху від сигналу управління до входу хоча б одного з інтеграторів (елементів затримки дискретного часу). Друга – наявність паралельних гілок з однаковими підсистемами, які, за правилами перетворення структурних схем, можна перенести, знизивши розмірність системи. Третю, динамічний розрив, розглянемо з прикладу.



Дана система, задана передатною функцією ,

матриці системи для якої мають вигляд .

Матриця керованості дорівнює .

Оскільки визначник цієї матриці дорівнює нулю, система некерована. Перетворимо систему до форми керованості. Тоді

, .

Видно, що система стабілізується, оскільки некероване власне значення негативно, а як керована система слід взяти систему . Розклавши знаменник передавальної функції, можна скоротити дріб. Це і є динамічний розрив.

.

Розглянемо другий приклад. Дана система .

Матриця керованості дорівнює .

Оскільки визначник цієї матриці дорівнює нулю, система некерована.

Перетворимо систему до форми керованості. Тоді

, .

Видно, що як керована система слід взяти систему

.

Записавши передатну функцію за вихідною системою, отримаємо

.

Необхідно винести загальний множник із паралельних гілок.

Система *спостерігається*, якщо можна відновити стан системи спостережень за її виходом і входом . Знову розглянемо систему з одним входом та виходом у дискретному часі. Завдання вирішується у два етапи. Спочатку по і відновлюють , а потім моделюванням, розраховують вектор стану .

Тоді

Введемо матриці та вектори

Тепер можна записати , звідки отримаємо

.

Таким чином, критерієм спостереження є невиродженість матриці спостереження . Узагальнюючи отриманий критерій на багатовимірні системи, запишемо, що *критерієм спостереження* є умова .

Якщо , то система перетворюється на форму спостережуваності .

Розглянемо ту саму систему, що розглядали у другому прикладі аналізу керованості.

Матриця спостереження дорівнює .

Оскільки визначник цієї матриці дорівнює нулю, то система не спостерігається .

Перетворимо систему до форми спостереження. Тоді

,

.

Видно, що як спостерігається система слід взяти систему

.

Система в безперервному (дискретному) часі називається *детектованою,* якщо (). Детектована система має бути зведена до системи .

Система *нормально спостерігається,* якщо вона спостерігається кожного виходу незалежно **.**

Система *нормальна*, якщо вона одночасно нормально спостерігається та керована.

Зазначимо, що у разі різних власних значень матриці **A** критерії керованості та спостереження можуть бути отримані з використанням діагональної канонічної форми системи. Якщо матриця діагональної форми має нульовий рядок, то система некерована, якщо матриця містить нульовий стовпець, то система не спостерігається. Якщо **i** стовпець матриці має нульовий елемент, то система некерована по **i** входу, якщо **j** рядок матриці має нульовий елемент, то система не спостерігається по **j** виходу.

Перекладемо систему

у діагональну форму. Матриця власних векторів дорівнює

.

Перетворена система має вигляд

.

Видно, система некерована, але спостерігається.

Аналізуючи структуру матриць керованості та спостерігальності системи , можна записати

= , = .

Рівності виражають властивість *дуальності* , тобто завдання спостереження системи може бути замінена завданням управління системою і навпаки.

Поєднати аналіз стійкості та керованості (спостереження) дозволяє використання так званих граміанів керованості і спостерігальності , що обчислюються через рішення рівнянь Ляпунова

, .

Тоді система стійка та керована (спостерігається), якщо матриця відповідного граміану позитивно визначено.

Стійка система у безперервному часі *мінімофазова ,* якщо всі *нулі системи* мають негативну речову частину. Нулями системи називають числа , що задовольняють умову .

Якщо , то нулі можуть бути обчислені як корені полінома, одержаного як визначник матриці передавальних функцій

.

Зрозуміло, що нулями системи з одним входом та виходом є корені полінома чисельника передавальної функції.

Система *строго мінімофазова,* якщо вона мінімофазова і матриця позитивно визначена, тобто .

Стійка система *статична,* якщо при вплив на неї стрибками жодна з реакцій не прагне нуля, тобто .

Критерієм статичності є умова (у разі)

.

Аналогічно визначаються властивості системи у дискретному часі. Тільки замість нульових власних значень аналізують власні значення, поодинокі за модулем.

Завдання.

Перевірте, чи є система у безперервному часі

стійкої , керованої, спостерігається, керованої по виходу, мінімофазової , статичної?

У системі Матлаб нулі системи обчислюються за допомогою програми **z = tzero (A , B , C , D).**

ЛЕКЦІЯ 10. КІЛЬКІСНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМ

Метою кількісного аналізу є розробка методики порівняння стійких систем на основі прямих та непрямих критеріїв якості процесів у системах. При аналізі систем як тестові вхідні сигнали використовуються стрибки, імпульси та гармонійні функції, а також білий шум.

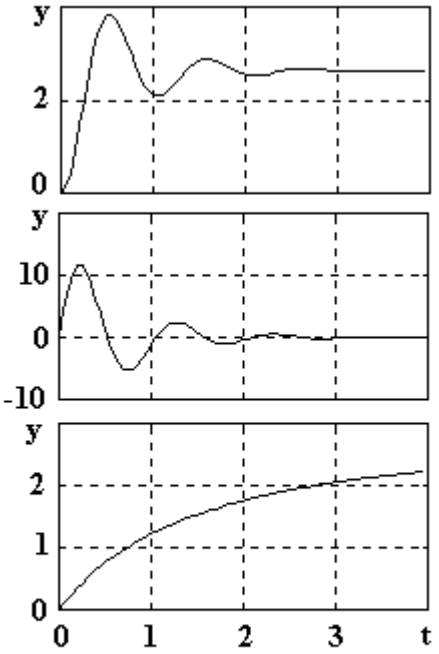


Рис 4. Примеры процессов в системах

Реакція на вектор стрибків системи обчислюється залежно від:

для безперервної системи

,

для дискретної системи

.

Значення виходу системи, що встановилося **z** при дії стрибків на вході дорівнює:

для безперервної системи

для дискретної системи .

Типовими є реакції на стрибок, зображені малюнку 4. Припустимо далі, що у малюнку зображено процес **j** виходу, отриманий під час подачі стрибка на **i** вхід. Основними прямими критеріями якості при цьому є перерегулювання, загасання та час встановлення.

Для процесів першого виду *перерегулювання* може бути обчислено за формулою

,

де – значення **j** виходу, що встановилося, а – модуль значення виходу на піку першого коливання.

Для другого виду процесів () перерегулювання обчислюється за формулою

.

де – модуль значення виходу піку другого коливання.

Іноді в цьому випадку замість перерегулювання використовується загасання, що обчислюється за формулою

.

де – модуль значення виходу піку третього коливання.

Приблизно (без відсотків).

Для третього виду процесів перерегулювання дорівнює нулю.

Час встановлення по каналу обчислюється як мінімальний час, при якому значення виходу досягає 1-5% максимального або встановленого значення. Тоді

або , де .

Перерегулювання та час встановлення системи можуть бути обчислені як максимальне значення з критеріїв, обчислених по окремих каналах .

Розглянемо приклад. Для першого процесу на рис. 4: , , , ; для другого процесу , , , ; для третього процесу , .

У загальному випадку критерії обчислюються за допомогою комп'ютерного моделювання. Зазвичай процеси вважають якісними, якщо .

Аналізуючи реакцію безперервної лінійної системи на гармонійне збурення **i** -го входу , можна показати, що амплітуда коливань, що встановлюються на **j** виходу обчислюється за такою формулою , де – уявна одиниця, .

Автокореляційна функція виходу безперервної стійкої системи **{A, B, C}**, яка збуджена білим шумом інтенсивності **Q**, обчислюється за співвідношенням , . Коваріаційна матриця дорівнює .

Модальний кількісний аналіз безперервних систем проводять за власними значеннями , розподіл яких на площині можна намалювати у вигляді трапеції (рис. 5), і ввести такі критерії, як - *ступінь коливання* і - *ступінь стійкості* . Приблизно можна записати, що , , . Однак

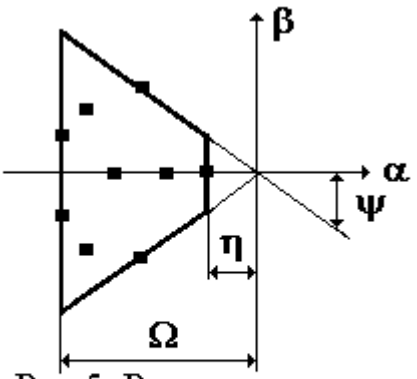


Рис 5. Расположение собственных значений на комплексной плоскости

оскільки де - константа, це обмежує вибір мінімального значення .

Інтегральний кількісний аналіз проводиться за інтегральними критеріями якості, коли система збурена імпульсами або ненульовими початковими умовами (початковий стан може бути введений у вигляді де вектор містить амплітуди імпульсів). Критерієм якості є інтеграл виду

або, коли система обурена стрибками, інтеграл виду

.

Матриці і в інтегралах є довільно призначаються позитивно визначеними матрицями, а **z** - вектор стану виходу, що встановився. Елементи матриць і з одного боку, означають різну вагу, що надається аналітиком відхиленню різних виходів системи при їх підсумовуванні, а з іншого – є розмірними величинами, що дозволяють підсумовувати різнорозмірні виходи. Найчастіше матриці вибираються діагональними з позитивними елементами діагоналі.

Можна показати, що інтеграл у разі лінійної безперервної системи може бути перетворений на вигляд

,

де . Тому останній інтеграл може бути прийнятий як канонічна форма інтегрального критерію.

Для лінійної безперервної системи інтеграл може бути обчислений в результаті рішення рівняння Ляпунова та множення матриці рішення на вектор початкового стану у вигляді .

У ряді випадків необхідно використовувати критерій, що враховує гладкість вихідного процесу, яка в критерії представлена похідними виходу:

.

Якщо система обурена білим шумом з ковариаційною матрицею **U** і нульовим математичним очікуванням, причому вхід не корелюваний з початковою умовою , то ковариаційна матриця стану визначається з рівняння .

Обчислимо коваріаційну матрицю за формулою . Тоді, вводячи критерій , ми можемо його обчислити за такою формулою . Якщо переписати останній критерій у вигляді

,

стає зрозумілим, що це той самий канонічний критерій.

Якщо необхідно проаналізувати систему , збурену майже довільною невипадковою функцією або довільним марковським кольоровим шумом, то завдання може бути зведене до вже розглянутої введенням в систему моделі функції або шуму як підсистеми зі створенням нової системи , збуреної вже імпульсом або білим шумом

.

При підвищених вимогах до швидкодії процесів іноді вводять критерій

.

Його величина визначається виразом

, , , .

Також можна обчислити евклідову норму передавальної функції системи

.

Для стаціонарної дискретної лінійної системи канонічний критерій обчислюється за такою формулою , де .

Аналізуючи керовані системи, необхідно брати до уваги «вартість» покращення системи. Ця «вартість» включає дві складові. По-перше, слід обчислити «вартість» керуючого сигналу, що використовується, обчислюючи інтеграли при обуренні імпульсами:

або при обуренні стрибками:

.

Крім того, необхідно перевірити, що всі керування та виходи системи змінюються в допустимих межах.

Нарешті, наступний напрямок кількісного аналізу пов'язані з аналізом чутливості інтегрального критерію якості щодо відхилення матриць системи.

Нехай безперервна система задана у найбільш загальному вигляді з матрицями канонічного критерію якості . Щоб величина критерію не залежала від початкового стану, обговоримо стохастичну систему, збурену білим шумом одиничної інтенсивності. *Чутливість інтегрального критерію якості* визначається за залежністю

,

,

,

,

,

,

де , .

Тоді наближена формула обчислення відхилення критерію щодо зміни, наприклад, матриці **A** має вигляд

.

Відхилення критерію щодо зміни інших матриць обчислюється повністю аналогічно.

Запитання.

1.Что таке перерегулювання та як воно обчислюється?

2. Що таке згасання і як воно обчислюється?

3. Що таке час встановлення та як воно обчислюється?

4. Як обчислюється реакція безперервної системи на стрибок?

5. Як обчислюється значення виходу системи, що встановилося, при дії стрибків на вході?

6. Як обчислюється інтегральний критерій якості під час дії імпульсів на вході безперервної системи?

7. Як обчислюється чутливість інтегрального критерію якості відхилення параметрів безперервної системи?

8. Як обчислюється відхилення величини інтегрального критерію якості у разі відхилення матриць системи?

Завдання.

Дана система .

1. Знайдіть величину критерію якості під час впливу систему імпульсу , використовуючи для розрахунків як рівняння Ляпунова, так і безпосереднім інтегруванням.

2. Обчисліть чутливість системи .

ЛЕКЦІЯ 11. КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ СТАНУ

Надати процесам у системі, що збуджується імпульсами, потрібну якість, що задається квадратичною функцією норм векторів стану та управління, дозволяють регулятори. Обговоримо синтез регуляторів для лінійних безперервних та дискретних систем, які вважаються керованими та спостережуваними.

Оптимальний регулятор першого виду (*регулятор енергії*) конструюється в результаті мінімізації критерію якості виду

.

Подібно до того, як для пошуку мінімуму будь-якої опуклої функції необхідно прирівняти до нуля її похідну, так, формально, це справедливо при мінімізації функціоналів. Але як мінімізована функція береться так званий гамільтоніан , що складається з підінтегрального виразу і рівняння системи без похідної, помноженого на деяку невідому функцію - множник Лагранжа .

Необхідна умова мінімуму задається виразом

Обчислюючи похідні, отримаємо

Звідки .

Вважаючи далі , можна записати і

.

Нарешті, підставляючи , отримаємо ,

або, представляючи рішення у символічному вигляді .

Регулятор стану визначається виразом або де . Нарешті, вводячи нове символічне уявлення, запишемо закінчене розв'язання завдання у вигляді . Величина критерію в точці мінімуму дорівнює .

Звернемо увагу, що для конструювання часто зручно використовувати критерій

,

який пов'язаний з вихідним через перевизначення матриці .

Для налаштування регулятора виберемо діагональну матрицю з елементами на діагоналі, . Тоді, якщо перехідний процес виходу перевищує допустиме граничне значення, слід збільшити величину . Аналогічно, вибравши діагональну матрицю , отримаємо, що якщо управління перевищує допустиме граничне значення, слід збільшити величину . Так ітеративно можна налаштувати регулятор на потрібний перехідний процес.

Якщо розглядається система у дискретному часі

з відповідним критерієм якості , то розв'язання задачі має вигляд

,

.

Символічне подання рішення запишемо у вигляді

.

Розв'язання задачі для *безперервно-дискретної* системи виду

з критерієм якості

еквівалентно конструюванню дискретної системи виду

з критерієм ,

де .

Завдання, що розглядається, допускає також двоїсту постановку. Вводячи *вихід для оцінки якості,* систему можна записати у вигляді

, .

Тоді критерій може бути переписаний у вигляді , де , , ,

і завдання конструювання може бути зведено до ,

підстановкою , , та використанням , .

У класичній теорії часто рекомендується критерій виду

.

Підставляючи значення похідної з рівняння системи, зведемо цей критерій до попереднього критерію підстановкою

, , .

Аналогічний критерій можна записати для системи у дискретному часі

,

який зводиться до критерію у дискретному часі підстановкою

,

, .

Завдання з критерієм, що гарантує підвищену швидкодію процесів , , зводиться до канонічної постановки , **K =** заміною .

Відомо, що завдання з цим критерієм призводить до рішення, при якому час досягнення області з області , дорівнює , а дійсна частина всіх власних значень замкнутої системи менше, ніж ( ).

Усі описані вище рішення стабілізують як стійкі, і нестійкі системи.

Розв'язання задачі конструювання *за критерієм Красовського* визначається співвідношеннями

, , .

Наступний критерій є *критерієм локальної оптимізації* , що записується у вигляді .

Розв'язання задачі в безперервному часі записується у вигляді

, , ,

а в дискретному часі

, , .

Зрозуміло, що за обома описаними вище критеріями існує, якщо вихідна система стійка.

Запитання.

1. Для чого у системі використовуються регулятори?

2. Що таке гамільтоніан та які умови його мінімуму?

3. Яка загальна формула запису регулятора стану?

4. До розв'язання якого рівняння зводиться розв'язання задачі конструювання оптимального регулятора енергії?

5. У якому разі слід використовувати інтегральний критерій із експонентою у записі?

6. Що таке вихід оцінки якості?

7. У чому особливість критерію Красовського і які обмеження щодо його застосування?

8. Які обмеження застосування критерію локальної оптимізації?

9. У чому є сутність завдання модального управління?

10. Для чого використовуються поліноми Баттенворт ?

11. Як компенсується вплив нулів мінімофазової та немінімофазової систем?

12. Як конструюється аперіодичний регулятор?

13. Яка основна особливість аперіодичного регулятора?

Завдання.

1. Для системи сконструюйте регулятор стану за критерієм Красовського $\mathbf{J_4}$ (Q = 3 , R = 1).

2. Для системи сконструюйте регулятори стану за критерієм енергії **J** (**Q** = 3 , **R** = 1); аперіодичний регулятор.

Зауваження. У програмній системі Матлаб символічного позначення K = відповідає програма , а символічного позначення K = відповідає програма .

ЛЕКЦІЯ 12 КОНСТРУЮВАННЯ СПОСТЕРІГАЧІВ СТАНУ

У попередньому підрозділі вважалося, що у системі вектор стану x повністю доступний виміру, чи матриця C оборотна – у разі регулятор стану може бути просто перетворений до виду , де . Однак така операція неможлива в загальному випадку. Тому необхідно вирішити спеціальне завдання відновлення вектора стану на основі доступних вимірювань та управлінь. Систему, яка вирішує зазначену задачу, називають спостерігачем стану.

Очевидно, що *найпростішим спостерігачем* для, наприклад, безперервної системи **{A, B, C}** буде модель системи з тими ж матрицями **{A, B, C}** . Система та її спостерігач показані на рис. 8.

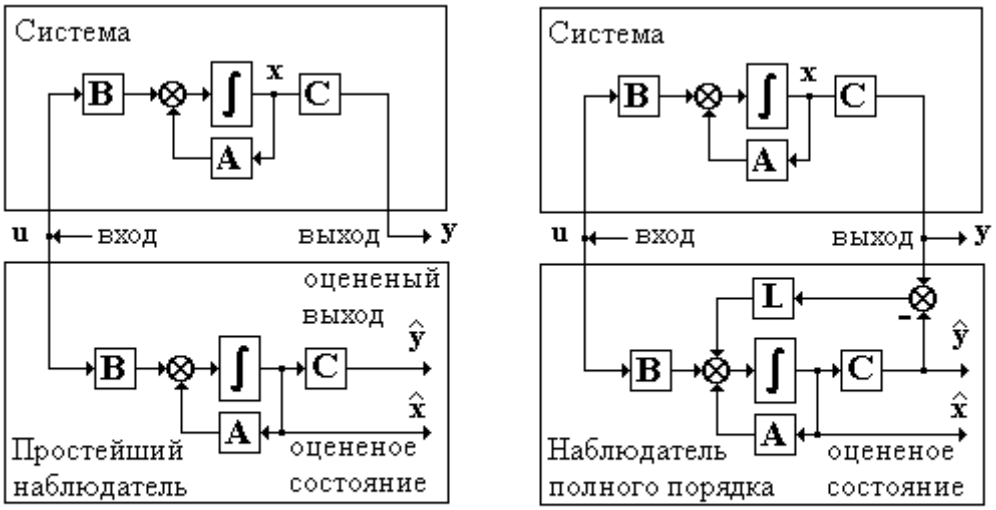


Рис.8. Простейший наблюдатель и наблюдатель полного порядка

Однак добре відомо, що модель системи ніколи не збігається із самою системою і, отже, вихід системи не збігатиметься з виходом моделі. Тому замість найпростішого конструюють *спостерігач повного порядку* , вводячи зворотний зв'язок з неузгодженості між дійсним та оціненим значеннями виходу. Зрозуміло, що вихід такого спостерігача не за всіх моментів часу **t** збігається з виходом вихідної системи. Тому спостерігач конструюється таким чином, щоб гарантовано виходи системи та спостерігача збігалися при .

Для безперервної системи *спостерігач повного порядку* має вигляд

,

де матриця вибирається таким чином, щоб матриця була гурвіцевою .

Для дискретної системи спостерігач аналогічний

де матриця має бути нільпотентною.

Спостерігач повного порядку відновлює повний вектор стану навіть у тому випадку, коли деякі елементи цього вектора доступні для безпосереднього вимірювання. Щоб запобігти відновленню таких станів, можна сконструювати *спостерігач мінімального порядку* розмірності , званий ще *спостерігачем Луенбергера*. Для конструювання спостерігача припустимо, що система дана в канонічній формі

, ,

.

Запишемо друге рівняння у координатній формі

.

З першого рівняння можна записати

.

Тоді, можна записати спостерігач стану для

.

Підставляючи

,

отримаємо

.

Вводячи нову змінну **z** за правилом

,

можна записати

.

Таким чином, спостерігач мінімального порядку для запишеться у формі

,

,

де

.

Наприклад, розглянемо конструювання спостерігача мінімального порядку для безперервної системи, заданої матрицями

.

Тоді

Для вибору матриці **L** у спостерігачі необхідно прийняти низку додаткових умов. Наприклад, такою умовою може бути швидкість зменшення помилки спостереження. Тоді завдання зводиться до розташування власних значень спостерігача подібно до того, як це було зроблено для регулятора стану. Зазначимо, якщо в останньому випадку вибрати **L=2** , формула помилки спостереження змінної , яка визначається матрицею , матиме вигляд .

Спостерігач мінімального порядку для дискретної системи

,

записується повністю аналогічно

, ,

де .

Оптимізаційна постановка задачі конструювання спостерігача повного порядку дозволяє вибрати матрицю спостерігача **L** так, щоб мінімізувалася помилка відновлення недоступного вимірювання вектора стану **x**.

Для оцінки поведінки помилки спостереження припустимо, що на початкову систему

,

діють взаємно некорельовані білі шуми з нульовим математичним очікуванням та інтенсивностями **Q** та **R** відповідно, тобто

, ,

, ,

, .

Приймемо очікування помилки спостереження як *критерій якості*

.

Тоді матриця спостерігача визначається за виразами

,

де - коваріаційна матриця помилки спостереження, а мінімальна величина критерію якості дорівнює

.

Сконструйований спостерігач називається *фільтром Калмана* .

Порівнюючи вирази для конструювання регулятора стану і фільтра Калмана, можна побачити, що рівняння визначення матриці регулятора стану і матриці фільтра Калмана збігаються, якщо замість матриць підставити матриці і навпаки.

Тобто якщо , то .

Ця відповідність, вже зазначене раніше, названа властивістю дуальності завдань управління та спостереження.

Завдання конструювання спостерігача для дискретних систем вирішується аналогічно, тобто можна записати .

Узагальнено, для проектування спостерігача можна записати , маючи на увазі відображення для безперервних систем та дискретних систем.

Зазначимо, що оскільки обчислення матриці фільтра Калмана завжди призводить до сталої роботи спостерігача, часто цю процедуру використовують для визначення матриці спостерігача без урахування властивостей шумів і, відповідно, оптимальності, просто підбираючи позитивно визначені матриці (найчастіше діагональні з позитивними елементами на діагоналі) **Q** і **R.**

Ще один тип спостерігача – *диференціюючий спостерігач* – відновлює вектор стану, використовуючи похідні вектора виходу.

У найпростішому випадку системи з одним входом та виходом

,

заданої у канонічній формі Фробеніуса, наприклад, у вигляді

,

оцінюваний вектор стану дорівнює .

У випадку дискретної системи такий спостерігач сконструювати неможливо, оскільки в поточний момент часу необхідне знання майбутніх значень виходу.

Розглядаючи багатовимірну систему, введемо кронекерові індекси та . Диференціюючи вихід системи разів, отримаємо

, , …,

.

Вибираючи тепер рядків у відповідній матриці кожного **i** виразу (тут означає перші **k** рядків матриці **D ,**) запишемо матриці (Олександров, 1986) [1]

Остаточно спостерігач запишемо у вигляді

Зрозуміло, що рішення може бути отримано, якщо .

Відзначимо, що цей спостерігач відновлює вектор стану з великою помилкою, якщо на вході системи діють збурення, що швидко змінюються, що є причиною малої застосування спостерігачів зазначеного типу, особливо для систем високого порядку.

Запитання.

1. Що таке спостерігач?
2. Яка основна умова конструювання спостерігачів повного порядку?
3. У чому сенс конструювання спостерігача мінімального порядку?
4. Якою є розмірність вектора станів спостерігача мінімального порядку?
5. Який принцип вибору настроювальної матриці спостерігача , що не оптимізує ?
6. Які умови конструювання спостерігача, що оптимізує?
7. Який критерій оптимальності використовується при конструюванні спостерігача, що оптимізує?
8. Яка причина малої застосовності диференційних спостерігачів?

Завдання.

1. Запишіть спостерігачі повного та мінімального порядків для системи у безперервному часі

,

задавшись довільною матрицею спостерігача **L** .

2. Намалюйте деталізовану структурну схему наведеної вище системи з регулятором стану та спостерігачами повного порядку, мінімального порядку диференціюючим спостерігачем.

ЛЕКЦІЯ 13 . КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ ЗІ ЗБУРЕННЯМИ ТА ЗАВДАННЯМИ

Є два види збурень, які не впливають на розв'язання задачі оптимального керування і дію яких можна проігнорувати в тому сенсі, що вони не вносять жодних додаткових змін до структури регулятора та спостерігача – це імпульс та білий шум. Так, для системи

,

збуреною імпульсом або білим шумом **f** інтенсивності **V,** завдання конструювання регулятора зводиться до розглянутої раніше задачі без обурень підстановкою або записом критерію оптимальності у вигляді . Мінімальна величина критерію дорівнює .

З іншого боку, ясно, що будь-який регулятор стану , що стабілізує систему , зменшує дію збурення, якщо норма досить велика. У цьому можна переконатися, якщо порівняти стан виходів керованої системи і початкової системи , збурених одним і тим же стрибкоподібним збуренням **f** . Цей висновок справедливий також і для повного регулятора, що складається з регулятора стану та спостерігача стану та званого регулятором виходу.

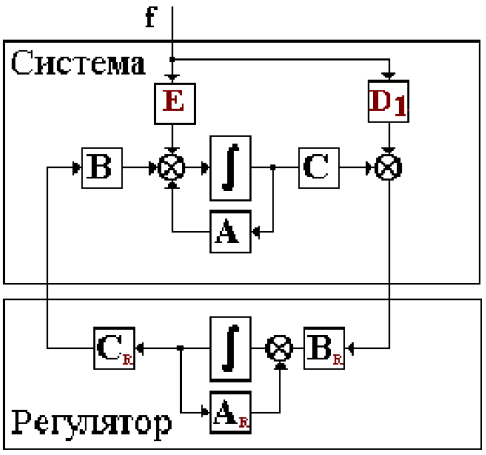


Рис.9. Структура системы управления

, ,

стан системи , з яким дорівнює

. Ці міркування справедливі й у системи у дискретному часі.

Можна поставити таке завдання, яке містить вимогу ослаблення збурень у явному вигляді. Для цього введемо спеціальний вихід для оцінки якості та запишемо вихідну систему та регулятор у вигляді

Розглядаючи - *завдання конструювання,* вимагаємо, щоб норма матриці передавальних функцій замкнутої системи була меншою за деяке задане малого числа . Тоді параметри регулятора мають вигляд

а Розв'язання задачі конструювання не єдине.

Для завдання норма матриці передавальних функцій замкнутої *системи* записується у вигляді . Тоді параметри регулятора

а

Інший підхід до зменшення впливу збурень полягає у завданні *статичної помилки* та інших прямих показників якості. Відповідний метод розроблено для мінімофазових систем. Завдання зводиться до стандартної задачі конструювання.

Припустимо, що вихідна система задана в канонічній формі Ассео з . Вимагаємо, щоб при дії стрибкоподібних збурень величини система мала перерегулювання не більше, ніж час встановлення не більше, ніж статичну помилку не більше, ніж . Тоді, записавши поліноміальну виставу системи

,

де , а пов'язано з матрицею , , можна визначити вагові матриці критерію у вигляді

, **R = I** ,

де , ,

якщо бажаний

монотонний процес та ,

якщо бажаний

коливальний процес та ,

, , – довільний скаляр.

Вирішуючи стандартну задачу конструювання з певними ваговими матрицями, отримаємо регулятор стану у вигляді , який може бути переписаний у вигляді або, остаточно, .

Розглянемо знову безперервну систему (**m = l).**

,

Для того щоб забезпечити рівність значення вектора виходу **y** *завданням* , необхідно в регулятор додати компенсатор завдання

.

Запишемо константу як . Тоді значення виходу , , де - встановився вектор стану. Таким чином .

Остаточно запишемо вираз для матриці компенсатора завдань .

Для того щоб забезпечити рівність значення вектора виходу **y** нулю, незважаючи на дію вимірюваних стрибкоподібних збурень **f ,** можна використовувати регулятор

.

Нехай константа записана у вигляді , Тоді можна записати

, ,

де – значення вектора стану, що встановилося. Вирішуючи отримане рівняння щодо , і вважаючи значення вектора виходу **y, що встановилося,** дорівнює нулю, отримаємо . Остаточно, запишемо вираз для матриці компенсатора збурень у вигляді

.

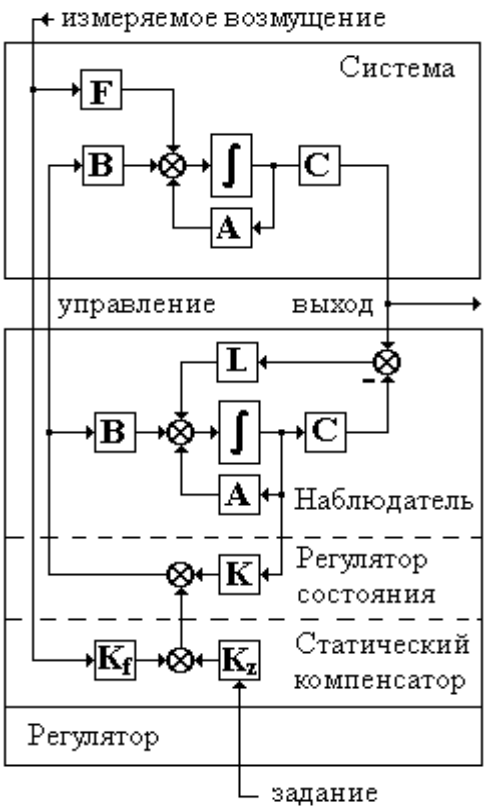


Рис.10. Структура системы со статическим компенсатором возмущений

Якщо завдання та збурення подаються одночасно, регулятор має вигляд

Для системи в дискретному часі матриці компенсаторів завдань і збурень мають вигляд

.

З метою повної компенсації обурень, що вимірюваються, можна використовувати систему, показану на рис. 11. Тут – початкова система каналу управління, – початкова система каналу збурення, – регулятор, – компенсатор збурень.

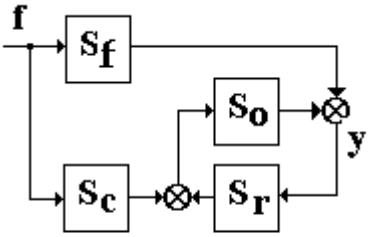


Рис.11. Инвариантная система типа 1

Легко бачити, що повна компенсація забезпечується, якщо де означає зворотну *модель* (**m=l**)

.

Інший спосіб компенсації впливу збурень пов'язаний із включенням моделі збурень у систему. Найчастіше як обурення приймається стрибок. Відомо, що моделлю стрибка є інтегратор. Тоді приєднуючи інтегратор до виходу, отримаємо розширену систему.

Структура розширеної системи з регулятором стану безперервної системи (**m = l**)

показано на рис. 12.

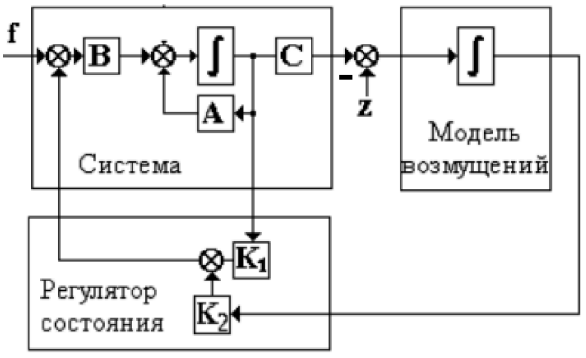


Рис.12. Система управления с ПИ-регулятором

Розширені матриці мають вигляд

Для використання стандартної процедури оптимального синтезу необхідно розширити вагову матрицю **Q** , приєднуючи по діагоналі одиничну підматрицю і формуючи матрицю . Як видно із рис. 12, регулятор стану може бути записаний у вигляді

.

Останнє вираз описує структуру так званого ***ПІ*** (*пропорційно-інтегрального*) регулятора.

При розгляді системи у дискретному часі (**m = l**)

розширення матриць об'єкта із включенням у модель дискретного інтегратора здійснюється у вигляді

Розв'язання задачі конструювання регулятора стану як у безперервному часі, так і в дискретному часі, стандартне, а саме

.

Зрозуміло, що з отримання повного регулятора необхідно сконструювати спостерігач. Процедура конструювання спостерігача виконується для розширеної системи як

.

Тепер, наприклад, для системи в дискретному часі можна намалювати структурну схему, за якою побудувати матриці повного регулятора, що включає регулятор стану, спостерігач стану та модель збурень у вигляді

Моделювання дискретної системи керування виконується у вигляді

Матриці моделі ПІ-регулятора в безперервному часі мають вигляд

Рівняння системи з безперервним регулятором мають вигляд

Модель замкнутої системи у безперервному часі має вигляд

Регулятор у безперервному та дискретному часі можна трохи спростити, якщо не відновлювати доступні вимірювання стану моделі збурень. Така структура для безперервного часу показано на рис. 13б. Матриці регулятора та системи складаються аналогічно.

Зазначимо, що згідно з теорією систем традиційно використовуваний ПІ регулятор є найкращим для управління ланкою першого порядку, що піддається дії стрибкоподібних збурень. Так, для системи , вирішивши рівняння Ріккаті, знайдемо і запишемо ПІ-регулятор . ПІД-регулятор – найкращий для ланки другого порядку або першого порядку із запізненням. Тут Д-складова служить відновлення одного недоступного виміру стану диференціюванням виходу замість використання спостерігача. Для ланки

вирішивши рівняння Ріккаті знайдемо матрицю регулятора стану і запишемо ПІД регулятора регулятори найкращі для ланок першого та другого порядків, що збуджуються імпульсами.

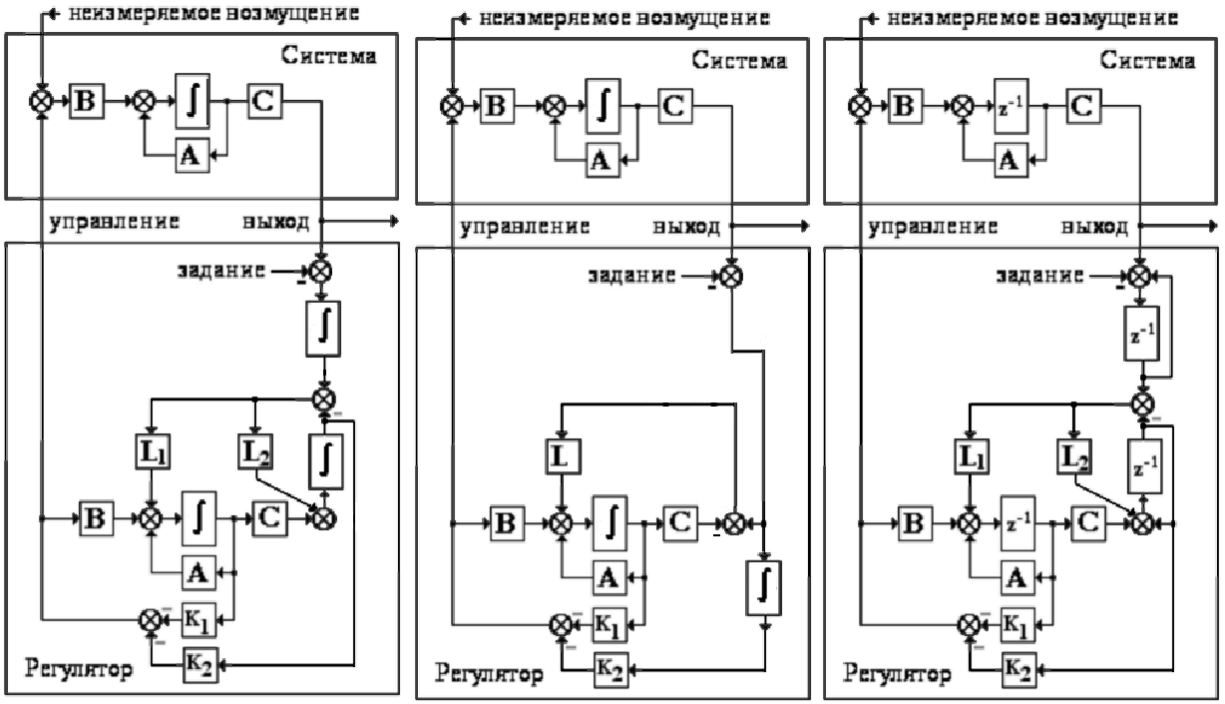


Рис.13. Структура системы с ПИ - регулятором и наблюдателем состояния

Завдання. Сконструюйте регулятор П з компенсаторами завдань і збурень, а також регулятор для системи . Намалюйте структурну схему системи управління

.