

Physique 2 Mécanique Thermodynamique

On utilisera les lettres minuscules pour les grandeurs extensives pour respecter les normes en vigueur

A) Turboréacteur

1) Cycle dans le diagramme T, s

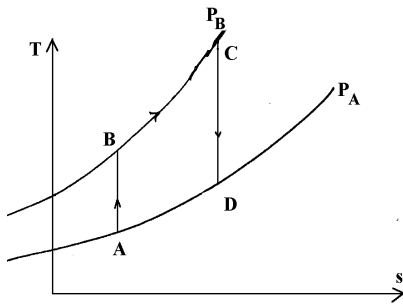
$$1-1) \quad dh = T ds - v dP$$

$$1-2) \quad ds = c_p \frac{dT}{T} - v \frac{dP}{P} \quad \text{avec } Pv = rT \text{ et } r = \frac{R}{M}$$

$$1-3) \quad dP = 0 \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = c_p \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} \Rightarrow s - s_0 = c_p \ln \frac{T}{T_0} \Rightarrow$$

$$T = A e^{\frac{s}{c_p}}$$

1- 4)

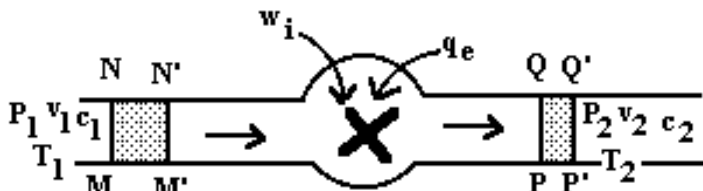


2) Rendement du turboréacteur.

2-1) On dépense de l'énergie dans la chambre de combustion pour fournir de l'énergie cinétique à un gaz .

2-2) Premier principe appliqué à l'unité de masse d'un fluide : $\Delta u + \Delta e_c = w_e + q_e$

On isole une masse M de fluide située entre MN et PQ à l'instant t en régime permanent. En amont les conditions thermodynamiques sont P_1, v_1, T_1 et la vitesse du fluide est c_1 . L'énergie potentielle de position est négligée. En aval ces conditions sont P_2, v_2, T_2 et c_2 .



A l'instant $t + dt$ la même masse M se trouve entre $M'N'$ et $P'Q'$. Choisissons dt tel que le volume balayé par MN soit le volume massique v_1 . Le volume balayé par PQ sera v_2 (régime permanent) ; soit w_i le travail (massique) fourni par la machine au fluide pendant cet intervalle.

Travail des forces de pression en amont : $P_1 v_1$

Travail des forces de pression en aval : $- P_2 v_2$ (comptés algébriquement par rapport au système)

$$\Rightarrow w_e = P_1 v_1 - P_2 v_2 + w_i$$

$$\text{Soit} \quad u_2 - u_1 + \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} = P_1 v_1 - P_2 v_2 + w_i + q_e \Rightarrow u_2 + P_2 v_2 - (u_1 + P_1 v_1) + \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} = w_i + q_e$$

$$\Rightarrow \boxed{h_2 - h_1 = w_i + q_e} \quad (I) \text{ 1}^{\text{er}} \text{ principe appliqué à un système ouvert}$$

$$(I) \text{ appliqué entre B et C} \Rightarrow h_C - h_B = Q_{BC}$$

$$2-3-a) \text{ (I) appliqué entre A et B } \Rightarrow h_B - h_A - \frac{c_A^2}{2} = W_C \text{ le compresseur étant calorifugé.}$$

$$2-3-b) \text{ (I) appliqué entre C et D } \Rightarrow \frac{c_D^2}{2} + h_D - h_C = W_T \text{ la turbine étant calorifugée.}$$

$$2-3-b) \text{ (I) appliqué entre A et D } \Rightarrow \frac{c_D^2}{2} - \frac{c_A^2}{2} + h_D - h_A = W_T + W_C + q_e \text{ avec } W_T + W_C = 0.$$

$$\text{Soit } \frac{c_D^2}{2} - \frac{c_A^2}{2} + h_D - h_A = q_e$$

$$2-4) \text{ gaz parfait } h = c_p T \Rightarrow \frac{c_D^2}{2} - \frac{c_A^2}{2} + c_p (T_D - T_A) = q_e$$

$$2-5) \quad \eta = \frac{\frac{c_D^2}{2} - \frac{c_A^2}{2}}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} + c_p (T_A - T_D)}{Q_{BC}} \quad \text{avec } Q_{BC} = c_p (T_C - T_B)$$

$$\text{D'où } \eta = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$$

$$2-6) \quad \text{Taux de compression } \tau = \frac{P_B}{P_A} = \frac{P_C}{P_D}$$

$$\text{Les évolutions AB et Cd étant isentropiques : } P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma = P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma \text{ et } P_C^{1-\gamma} T_C^\gamma = P_D^{1-\gamma} T_D^\gamma$$

$$\Rightarrow T_B = T_A \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \text{ et } T_D = T_C \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = \frac{-1}{\tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \text{ et } \boxed{\eta = 1 - \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

3) *Etude de la portion de tuyère en aval de la turbine.*

$$3-1) \text{ En appliquant (I) entre M et N } \Rightarrow \frac{c_N^2}{2} - \frac{c_M^2}{2} + h_N - h_M = 0 \text{ car } q_e = 0 \text{ (tuyère calorifugée) et}$$

$$w_i = 0 \text{ (pas de parties mobiles) soit } \frac{c_N^2}{2} - \frac{c_M^2}{2} + c_p (T_N - T_M) = 0$$

$$3-2) \quad c_p = \frac{r\gamma}{\gamma-1} \text{ avec } r = \frac{R}{M}$$

$$\text{On a d'après 3-1) } \frac{c^2}{2} + c_p T = \text{cste} \Rightarrow \frac{d(c^2)}{2} + \frac{r\gamma}{\gamma-1} dT = 0 \quad (a)$$

$$3-3) \quad (1-\gamma) \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0 \quad (b)$$

$$3-4) \quad a- \quad Pv = rT \text{ et } 1 = \rho v \Rightarrow \rho = \frac{rT}{P} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \quad (c)$$

$$b- \text{ Débit massique } D_m, \text{ vitesse du son } c_s = \sqrt{\gamma r T}; \quad D_m = s c \rho \Rightarrow 0 = \frac{ds}{s} + \frac{dc}{c} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (d)$$

$$\begin{aligned}
 (a) \Rightarrow c \, dc + \frac{r \gamma T}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} &= 0 \quad \text{soit} \quad c \, dc + \frac{c_s^2}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} = 0 \quad (a') \\
 (b) \text{ et } (c) \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} &= \gamma - 1 \frac{dT}{T} \quad (c') \quad \text{Finalement } (a') \text{ et } (c') \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{-c \, dc}{c_s^2} \\
 \text{Soit en reportant dans (d)} \quad \frac{ds}{s} + \frac{dc}{c} \left(1 - \frac{c^2}{c_s^2} \right) &= 0 \Rightarrow ds > 0 \text{ entraîne } dc > 0 \text{ si } c > c_s.
 \end{aligned}$$

B) Fusée et satellite

1) Champ gravitationnel terrestre.

1-1) Cours Théorème de Gauss $\oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi \Sigma M_{\text{int}}$

$$\begin{aligned}
 \vec{g} &= - \frac{GM}{r^2} \vec{u} \quad \text{pour } r > R \Rightarrow \text{avec } GM = g_s R^2 \quad \vec{g} = - \frac{g_s R^2}{r^2} \vec{u} \\
 \vec{g} &= - \frac{GM}{R^3} r \vec{u} \quad \text{pour } r < R \Rightarrow \vec{g} = - \frac{g_s r}{R^3} \vec{u}
 \end{aligned}$$

1-2) $\vec{g} = - \text{grad } \mathcal{V}$

$$\mathcal{V} = - \frac{g_s R^2}{r} \quad \text{pour } r > R$$

$$\mathcal{V} = - \frac{g_s r^2}{R^3} + C$$

La continuité de $\mathcal{V}$ pour $r = R$ permet de calculer $C \Rightarrow C = -g_s \left(R + \frac{1}{R} \right)$ et

$$\mathcal{V} = - \frac{g_s r^2}{R^3} - g_s \left(R + \frac{1}{R} \right) \quad \text{pour } r < R$$

2) Propulsion par réaction.

2-1) $\vec{P}(t) = m(t) \vec{v}(t)$

$$\begin{aligned}
 \vec{P}(t+dt) &= m(t+dt) \vec{v}(t+dt) + (-dm) \left(\vec{v} + \vec{u} \right) \\
 &= (m+dm) \left(\vec{v} + d\vec{v} \right) - dm \vec{v} - dm \vec{u} \quad \text{en négligeant les termes du deuxième ordre.}
 \end{aligned}$$

$$\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = m \vec{g} \, dt \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \vec{u} = m \vec{g} \quad \text{comme } \frac{dm}{dt} = -D \text{ on obtient :}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + D \vec{u} = m \vec{g}$$

2-2) $(m_0 - Dt) \frac{d\vec{v}}{dt} = -D \vec{u} \Rightarrow \text{en projection} \quad dv = D u \frac{dt}{m_0 - Dt} \Rightarrow v = -u \ln \frac{m(t)}{m_0}$

$$\Rightarrow v_{\text{max}} = u \ln \left(\frac{m_0}{m_1} \right)$$

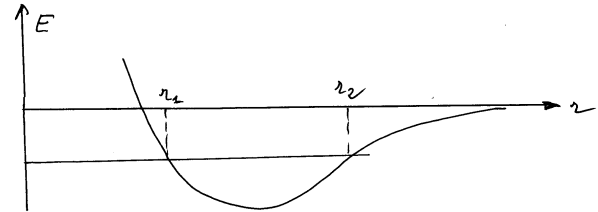
3) Energie des états liés

$$3-1) \mathcal{U}_p = \frac{-GMm}{r}$$

$$3-2) E_c = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}) \quad ; \quad E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}) - \frac{GMm}{r}$$

$$3-3) \dot{r} = 0 \Rightarrow f(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} = -|E|$$

Pour $E < 0$ $\dot{r}$ s'annule pour deux valeurs r_1 et r_2 correspondant au périhélie et à l'apogée de la trajectoire.



$$E = \frac{-GMm}{2a}$$

4) Perte d'altitude d'un satellite.

$$4.1) E = \frac{-GMm}{2r} \quad \text{Si } E \text{ diminue, } r \text{ diminue}$$

$$4.2) E = \frac{-GMm}{2r} \quad ; \quad \mathcal{U}_p = \frac{-GMm}{r} \quad ; \quad E = E_c + \mathcal{U}_p \Rightarrow E_c = \frac{GMm}{2r}$$

Si r diminue, E_c augmente.

4.3) τ est un temps de relaxation caractéristique du freinage considéré.

τ est très grand devant la période de révolution.

$$4.4) \text{ Composante orthoradiale de l'accélération : } \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{dC}{dt}$$

$$\text{PFD (composante orthoradiale): } m \frac{1}{r} \frac{dC}{dt} = -m \frac{v}{\tau} \quad \text{avec } C = rv \text{ (trajectoire circulaire)} \Rightarrow$$

$$m \frac{1}{r} \frac{dC}{dt} = -m \frac{C}{\tau r} \Rightarrow \frac{dC}{dt} = -\frac{C}{\tau} \Rightarrow C = C_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$4.5) \quad r \dot{\theta}^2 = \frac{MG}{r^2} \Rightarrow C^2 = rMG \quad (a) \quad \text{et au premier ordre : } C \approx C_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \quad (b)$$

$$(a) \Rightarrow 2 \frac{dC}{C} = \frac{dr}{r} \quad ; \quad (b) \Rightarrow dC \approx -C_0 \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \frac{dr}{r} = -2 \frac{dt}{\tau}$$

$$4.6) \text{ Sur une période : } \frac{\Delta r}{r} = -2 \frac{T}{\tau}$$

5) Dépressurisation.

A l'instant t dans le compartiment de volume $v = a^3$ on a $N = n a^3$ particules

A l'instant $t + dt$ on a $N + dN$ particules

$$dN = -\frac{1}{6} n s u dt = -\frac{1}{6} \frac{N}{a^3} s u dt \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\frac{s u}{6 a^3} dt \quad \text{avec } \frac{s u}{6 a^3} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{On en déduit } P \text{ avec } Pa^3 = \frac{N}{N_A} RT$$

6) Orbites stables d'un satellite.

Lycée Joliot-Curie Rennes

PFD avec le formule de Binet pour l'accélération :

$$-m \frac{C^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \frac{-GMm}{r^2} \Rightarrow \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \frac{GM}{C^2}$$

$$\frac{GM}{C^2} \text{ homogène à une longueur ; on pose } \frac{GM}{C^2} = \frac{1}{p}$$

Soit à résoudre l'équation différentielle $\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \frac{1}{p}$ de solution :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + A \cos(\theta + \varphi) \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \varphi)}$$

$E < 0 \Rightarrow r_1 \leq r \leq r_2$ (cf 3.3) $\Rightarrow e < 1 \Rightarrow$ trajectoire elliptique