

КОРОТКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ДОВІДНИК

I. ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА РІВНЯННЯ

А. Формули скороченого множення

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Б. Степені та корені

- $a^k \cdot a^n = a^{k+n}$
- $a^k : a^n = a^{k-n}$
- $a^0 = 1, a \neq 0$
- $(a^k)^n = a^{kn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a \neq 0$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$
 $a \neq 0, b \neq 0$
- $\sqrt[k]{a^k} = a^{\frac{k}{k}} = a, a > 0$
- $\sqrt[k]{a^k} = \sqrt[k]{a^k}$
- $\sqrt[n]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

В. Лінійні рівняння $ax = b$

Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$; якщо $a = b = 0$, то x — будь-яке число; якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, то розв'язків немає ($\emptyset$).

Г. Квадратні рівняння $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac$$

- Якщо $D > 0$ — 2 розв'язки
- Якщо $D = 0$ — 1 розв'язок $\left(x = -\frac{b}{2a}\right)$;
- Якщо $D < 0$ — розв'язків немає

D	$y = ax^2 + bx + c$	
	$a > 0$	$a < 0$
1) $D > 0$		
2) $D = 0$		
3) $D < 0$		

II. ПРОГРЕСІЇ

Формули	А. Арифметична прогресія $a_1, a_2, \dots, a_n$	Б. Геометрична прогресія $b_1, b_2, \dots, b_n, q \neq 0$
Формула n-го члена прогресії	1. $a_n = a_1 + d(n-1)$	1. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Характеристична властивість прогресії	2. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	2. $b_n = \pm \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$
Сума n перших членів прогресії	3. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, або 4. $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$	3. $S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}$, або 4. $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$
	Сума нескінченної спадної геометричної прогресії	5. $S = \frac{b_1}{1 - q}$

В. Координати

1. Нехай дано точки

$A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді середина відрізка AB —

$$\text{точка } O \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

2. Нехай дано точки $A(x_1; y_1; z_1)$

і $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді довжина відрізка

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

3. Точки, симетричні точці

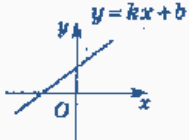
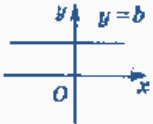
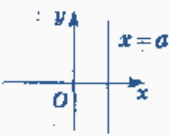
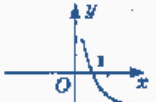
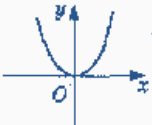
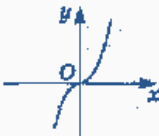
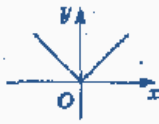
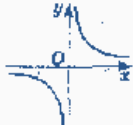
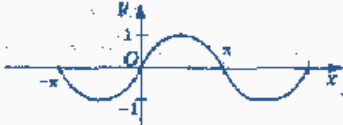
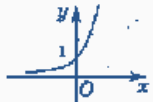
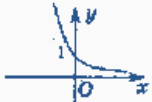
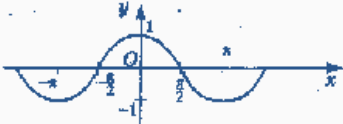
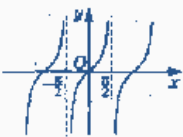
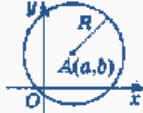
$A(x; y; z)$: відносно площини xOy —

$A_1(x; y; -z)$; відносно початку координат — $A_2(-x; -y; -z)$

4. Рівняння кола: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, де $a \geq 0, b \geq 0$

5. Рівняння сфери: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, де $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$

III. ГРАФІКИ

1. $y=kx+b$ а) $k>0$ $b>0$  б) $y=b$ $k=0$ $b>0$  в) $x=a$ $a>0$ 	6. $y=\log_a x$ а) $a>1$ б) $0<a<1$  
2. $y=ax^2$ $a>0$ 	7. $y=x^3$ 
3. $y=\sqrt{x}$, $b>0$ 	8. $y= x$ 
4. $y=\frac{k}{x}$, $k>0$ 	9. $y=\sin x$ 
5. $y=a^x$ а) $a>1$ б) $0<a<1$  	10. $y=\cos x$ 
11. $y=\operatorname{tg} x$ 	12. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ $a>0$ $b>0$ 

IV. ВЕКТОРИ

1. Нехай задано точки $A(a_1; a_2)$ і $B(b_1; b_2)$,
тоді $\overline{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$

2. Нехай задано точки $A(a_1; a_2)$ і $B(b_1; b_2)$,
тоді довжина вектора $\overline{AB}$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

3. Вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ колінеарні тоді
й тільки тоді, коли $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \lambda$, якщо
 $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$

4. $\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(b_1; b_2)$ тоді й тільки тоді, коли
 $a_1 = b_1; a_2 = b_2$

$$5. \vec{a}(a_1; a_2) \pm \vec{b}(b_1; b_2) = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$$

6. $\vec{a}(a_1; a_2) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ — одиничні
взаємно перпендикулярні вектори (орти)

Скалярний добуток векторів

$$7. \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

або

$$8. \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi,$$

де φ — кут між векторами

Із формул 7–8 випливають формули 9–11

$$9. \cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$10. \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = a^2$$

$$11. (\vec{a} \perp \vec{b}) \Leftrightarrow (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0)$$

Аналогічно для тривимірного простору

V. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ТРИГОНОМЕТРИЇ

$$A. 1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2. \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3. \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$4. \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$B. 1. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$2. \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$3. \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$B. 1. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha =$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$3. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$r. 1. \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$2. \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$3. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$d. 1. \sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$2. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$3. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$E. 1. \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$2. \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$3. \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

VI. РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

1. Значення арксинуса й арккосинуса деяких чисел

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\arcsin a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	0	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$

$$2. \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$$

$$3. \arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$$4. \arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

$-1 \leq a \leq 1$	$a=0$	$a=1$	$a=-1$
5. Розв'язання рівнянь виду $\cos x = a$			
$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
6. Розв'язання рівнянь виду $\sin x = a$			
$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi l, l \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

7. Значення арктангенса й арккотангенса деяких чисел

a	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\arctg a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\operatorname{arccotg} a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$

$$8. \operatorname{arccotg} a + \arctg a = \frac{\pi}{2}$$

$$9. \operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$$

$$10. \arctg(-a) = -\arctg a$$

11. Розв'язання рівнянь виду $\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R}$:

$$x = \arctg a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

12. Розв'язання рівнянь виду $\operatorname{ctg} x = a, a \in \mathbb{R}$:

$$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

VII. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

А. Знаки тригонометричних функцій



Б. Правила вираження тригонометричних

функцій кутів $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$, через

тригонометричні функції кута α

При відхиленні кута α від вертикалі

$\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right.$ або $\left.\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ функція змінюється на

кофункцію ($\sin$ на $\cos$, tg на ctg і навпа-

ки). При відхиленні кута від горизонталі

$(\pi \pm \alpha$ або $2\pi \pm \alpha)$ функція не змінюється. Пе-

ред наведеною функцією ставиться знак чверті вихідної функції.

Наприклад,

$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha; \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha; \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

В. Періодичність

Для функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ найменший до-

датний період $T = 2\pi$; для функцій $y = \operatorname{tg} x$

і $y = \operatorname{ctg} x$ — $T = \pi$.

Г. Парність

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Д. Значення тригонометричних функцій деяких кутів

$\alpha,$ град	$\alpha,$ рад	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0°	0	0	1	0	—
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—	0
120°	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$

135°	3π/4	1/√2	-1/√2	-1	-1
150°	5π/6	1/2	-√3/2	-1/√3	-√3
180°	π	0	-1	0	-

Зауваження. $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$; $1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$

VIII. КОМБІНАТОРИКА. БІНОМ НЬЮТОНА. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

А. Розміщення (не всі елементи, важливий порядок)	1. $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ 2. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Б. Перестановки (використовують- ся всі елементи)	1. $P_n = n!$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$
В. Комбінації (не всі елементи, порядок елементів не важливий)	1. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 2. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Г. Властивості комбінацій

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

Д. Біном Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n,$$

де $(k+1)$ -й елемент розкладання $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

Е. Ймовірність події А

$P(A) = \frac{m}{n}$, де n — число всіх можливих випадків події А, а m — число сприятливих наслідків цієї ж події А

IX. ПОХІДНІ

А. Правила диференціювання

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
5. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
6. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
7. Рівняння дотичної: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.
 $y'(x_0) = \tan \alpha$, де α — кут, який утворює з додатним напрямком осі Ох дотична до графіка функції $y(x)$ у точці з абсцисою x_0 .

Б. Таблиця похідних

№ п/п	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	C	0
2	x	1
3	x ²	2x
4	x ⁿ	nx ⁿ⁻¹
5	√x	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$\sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}$	$\frac{k}{n} x^{\frac{k}{n}-1}$
7	$\frac{1}{x^k} = x^{-k}$	$-kx^{-k-1}$
8	sin x	cos x
9	cos x	-sin x
10	tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
11	ctg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
12	arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$
15	arcctg x	$-\frac{1}{1+x^2}$
16	e ^x	e ^x
17	a ^x	a ^x ln a
18	ln x	$\frac{1}{x}$
19	log _a x	$\frac{1}{x \ln a}$
20	x	$\begin{cases} 1, \text{ якщо } x > 0 \\ 0, \text{ якщо } x = 0 \\ -1, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$

Х. ІНТЕГРУВАННЯ

А. Таблиця первісних і невизначених інтегралів

№ п/п	$f(x)$	$F(x) = \int f(x) dx$
1	1	$x + C$
2	k	$kx + C$
3	x	$\frac{x^2}{2} + C$
4	$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
5	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
6	e^x	$e^x + C$
7	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
8	$\sin x$	$-\cos x + C$
9	$\cos x$	$\sin x + C$
10	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
11	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
12	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0$
13	$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$
14	$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C, a > 0$

Б. Правила інтегрування

- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
- $\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C \quad (k, b = \text{const})$

3. Інтегрування частинами;

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

В. Визначений інтеграл

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, a < c < b$
- $\int_a^a f(x) dx = 0$, якщо $f(x)$ непарна, неперервна

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

9. $S = \int_a^b f(x) dx$, де $f(x)$ — неперервна додатна функція — площа фігури, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$

ХІ. ЛОГАРИФМИ

А. Означення

Логарифмом $\log_a b = c$ називається таке число c , що $a^c = b$, де $b > 0$, $a > 0$; $a \neq 1$.

Десятиковим логарифмом називається логарифм, основа якого дорівнює 10.

$$\log_{10} b = \lg b$$

Натуральним логарифмом називається логарифм, основа якого дорівнює e .

$$\log_e b = \ln b$$

Б. Властивості

$$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$

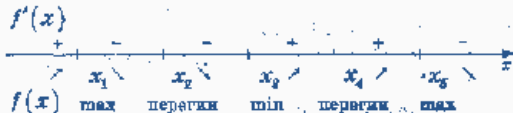
- $a^{\log_a b} = b$ — основна тотожність
- $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$
- $n \log_a b = \log_a b^n$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a = \log_a \frac{1}{a} = -1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b^n = \frac{n}{k} \log_a b$
- $\log_a b \cdot \log_a a = 1$
- $\log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{b} = \log_a b$
- $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$

ХІІ. НЕРІВНОСТІ

- $a^x > a^c \Leftrightarrow \begin{cases} x > c, \text{ якщо } a > 1, \\ x < c, \text{ якщо } 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\log_a x > \log_a c \Leftrightarrow \begin{cases} x > c, \text{ якщо } a > 1, \\ 0 < x < c, \text{ якщо } 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$

ХІІІ. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

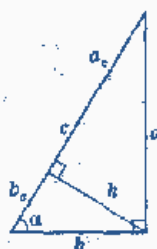
Для неперервної й диференційованої на ОДЗ функції $y=f(x)$ справджуються такі твердження.

- Корені рівняння $f'(x)=0$ $x_1, x_2, \dots, x_n$ є критичними точками функції $f(x)$.
- $f'(x)$

- Якщо $f''(a)>0$, то $f(x)$ у точці $x=a$ має мінімум, а якщо $f''(b)<0$, то $f(x)$ в точці $x=b$ має максимум.

ХІV. ТРИКУТНИКИ

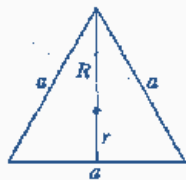
А. Прямокутний трикутник

- $a^2 + b^2 = c^2$
- $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$
- $a^2 = c \cdot a_c$
- $R = \frac{c}{2}$
- $b^2 = c \cdot b_c$
- $r = \frac{a+b-c}{2}$
- $h^2 = a_c \cdot b_c$
- $S = \frac{ab}{2}$
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- $S = \frac{ch}{2}$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- $h = \frac{ab}{c}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$



Б. Рівносторонній трикутник

- $h = R + r$
- $a = 2r\sqrt{3}$
- $R = 2r$
- $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
- $a = R\sqrt{3}$
- $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



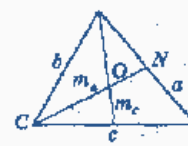
В. Різнобічний трикутник



- $S = \frac{ab \sin \gamma}{2}; S = \frac{bc \sin \alpha}{2}; S = \frac{ac \sin \beta}{2}$
- $S = \frac{c \cdot h_c}{2}$
- $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$
- $S = \frac{abc}{4R}, R = \frac{abc}{4S}$
- $S = \frac{(a+b+c) \cdot r}{2}; r = \frac{S}{p}$

ХV. ТРИКУТНИКИ. КОЛО

А. Бісектриса, медіана



- $\frac{a}{b} = \frac{n}{h}$
- $l^2 = ab - nh$
- $l = \frac{2ab \cos \alpha}{a+b}$
- $\frac{CO}{ON} = \frac{2}{1}$
- $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

Б. Теореми синусів і косинусів



- Теорема синусів: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$,
 $a = 2R \sin \alpha$
- Теорема косинусів: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$,
 $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

В. Коло

- $\angle C = \angle D = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{\sphericalangle AB}{2}$

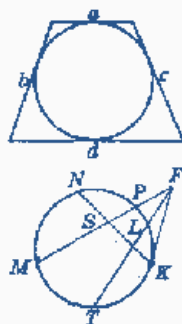


2. $a+d=b+c$

3. $NS \cdot SK = PS \cdot MS$

4. $FK^2 = FP \cdot FM$

5. $FP \cdot FM = FL \cdot FT$,
 FK — дотична



XVI. ЧОТИРИКУТНИКИ

A. Паралелограм



1. $S = bh$; $S = ah \sin \alpha$

2. $S = ab \sin \alpha$

Б. Ромб

1. $S = ah$; $S = 2ar$

2. $S = a^2 \sin \alpha$

3. $S = \frac{d_1 d_2}{2}$

4. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

5. $r = \frac{d_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$; $r = \frac{S}{2a}$

В. Трапеція

1. $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

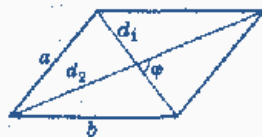
2. $S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}$

Г. Квадрат

1. $d = a\sqrt{2}$

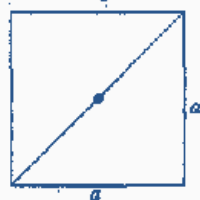
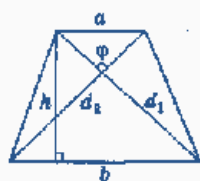
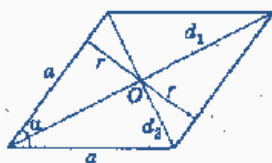
2. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{a}{2}$

3. $S = a^2 = \frac{d^2}{2}$



3. $S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}$

4. $2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$



XVII. СТЕРЕОМЕТРИЯ

1. Теорема про три перпендикуляри

а) $KO \perp \alpha$; $NO \perp l$,
 тоді $KN \perp l$

або

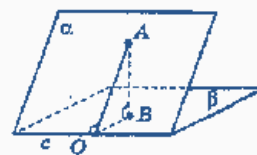
б) $KO \perp \alpha$; $KN \perp l$,
 тоді $NO \perp l$



2. Кут між площинами

а) $AO \perp c$, $BO \perp c$,
 тоді кут AOB —
 лінійний кут дво-
 гранного кута; кут
 між площинами α
 і β дорівнює куту AOB ;

б) $AB \perp \beta$, AB — відстань від точки A до площини β



3. Призма

$V = S_{осн} \cdot H$

$S = S_{бічн} + 2S_{осн}$



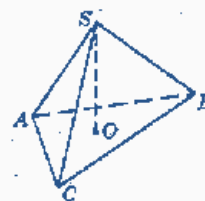
4. Піраміда

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$

$S = S_{бічн} + S_{осн}$

Зрізана піраміда

$V = \frac{H}{3} (S_2 + \sqrt{S_2 S_1} + S_1)$



5. Конус

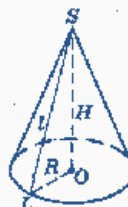
$S_{бічн} = \pi R l$

$S = \pi R l + \pi R^2$

$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$

Зрізаний конус

$V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2)$

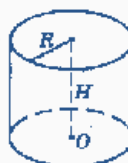


6. Циліндр

$S_{бічн} = 2\pi R H$

$S = 2\pi R H + 2\pi R^2$

$V = \pi R^2 H$



7. Куля

$S = 4\pi R^2$

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

