SciencesPo

Mathématiques Appliquées aux Sciences Humaines et Sociales
Niveau introductif

Séances 1 et 2
Notions essentielles en mathématiques

FRACTIONS

« Dans tout ce qu'on entreprend, il faut donner les deux tiers à la raison et l'autre tiers au hasard : augmentez la première fraction, vous serez pusillanime ; augmentez la seconde, vous serez téméraire. »
Mémoires rédigés à Sainte-Hélène. - Napoléon Bonaparte

Propriété
Si un nombre admet une écriture fractionnaire, celle-ci reste égale si l'on multiplie ou divise son numérateur **et** son dénominateur par un même nombre non nul.

Remarque
Deux fractions sont égales si leurs produits en croix sont égaux.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a\times d = b\times c$$

Règle (addition, soustraction)
Pour additionner (ou soustraire) deux fractions, elles doivent être mises au même dénominateur. La somme de deux fractions de même dénominateur est la fraction de même dénominateur dont le numérateur est la somme des numérateurs.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Remarque
Le dénominateur commun le plus adapté est souvent le plus petit multiple de tous les dénominateurs.

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{15}{24} + \frac{14}{24} - \frac{8}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

Règle (multiplication)
Pour multiplier deux fractions, on multiplie les deux numérateurs entre eux et les deux dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$$

Remarque
Il est préférable de simplifier les différents facteurs avant d'effectuer les produits.

$$\frac{15}{28} \times \frac{49}{9} \times \frac{6}{25} = \frac{5\times3\times7\times7\times3\times2}{7\times2\times2\times3\times3\times5\times5} = \frac{7}{2\times5} = \frac{7}{10}$$

Dans ce dernier calcul, on a simplifié par $5\times3\times7\times3\times2$

Définition

Deux nombres sont **inverses** si leur produit égale 1. Soient a et b des nombres non nuls, l'inverse de a est $\frac{1}{a}$ et l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$

Règle (division)

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a\times d}{b\times d}$$

Moyenne harmonique

Soit $x_1,\ldots, x_n$ les valeurs d'une série statistique pondérée par $w_1,\ldots, w_n$ (autrement dit, la valeur x_1 apparaît avec une fréquence w_1, etc.). La **moyenne harmonique** est donnée par la formule

$$H = \frac{w_1+\ldots+w_n}{\frac{w_1}{x_1}+\ldots+\frac{w_n}{x_n}}$$

Remarque

Si la **série n'est pas pondérée** (la fréquence de chaque valeur est identique), on peut poser

$$w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 1$$

Exemples

- On effectue le tiers d'un trajet à la vitesse de 50 km/h, le tiers suivant à la vitesse de 80 km/h et le dernier tiers suivant à la vitesse de 100 km/h. La vitesse moyenne correspond à la moyenne harmonique de ces trois vitesses.

$$H = \frac{3}{\frac{1}{50}+\frac{1}{80}+\frac{1}{100}} = \frac{3}{\frac{8}{400}+\frac{5}{400}+\frac{4}{400}} = \frac{3}{\frac{17}{400}} = 3\times\frac{400}{17} = \frac{1\,200}{17}\approx 70,6\ km/h$$

  Le trajet a été parcouru à une vitesse moyenne de $70,6\ km/h$. On note qu'il n'est pas nécessaire de connaître la longueur du trajet pour répondre à cette question. La moyenne arithmétique n'est ici pas adaptée car la durée de chaque partie du trajet n'est pas identique.
- Considérons deux entreprises, l'une avec une capitalisation boursière de 150 milliards \$ et un bénéfice de 5 milliards \$ (P/E de 30) et une avec une capitalisation boursière de 1 milliard \$ et un bénéfice de 1 million \$ (P/E de 1000). Considérons un indice de rendu des deux stocks, avec 30% investis dans le premier et 70% investi dans le second. Nous voulons calculer le ratio P/E de cet indice.

$$P/E = \frac{0{,}3+0{,}7}{\frac{0{,}3}{30}+\frac{0{,}7}{1\,000}}\approx 93,46$$

Remarque

Le rapport prix/bénéfice est désigné par le rapport P/E

$$P/E = \frac{Share\ Price}{Earnings\ per\ Share}$$

ORDRE DE GRANDEUR

L'ordre de grandeur d'un nombre est la puissance de 10 la plus proche de ce nombre.

Exemples

- L'ordre de grandeur de la taille d'un humain est de $1\ m = 10^0\ m$
- L'ordre de grandeur du tour de la Terre (environ 40 000 km) est $10\,000\ km = 10^4\ km$
- L'ordre de grandeur de la tour la plus haute du monde (828 m) est $1\,000\ m = 10^3\ m$
- L'ordre de grandeur de la taille d'un acarien (de 0,2 mm à 0,5 mm) est de $0,1\ mm = 10^{-1}\ mm$

Remarques

- Lorsque le nombre est à égale distance de deux puissances de 10, on choisira la puissance la plus élevée. Par exemple, l'ordre de grandeur de 5,5 est 10 et non 1.
- L'ordre de grandeur de 0 est 0.

DÉVELOPPEMENT, FACTORISATION

Définitions
Développer, c'est transformer un produit en une somme (ou différence) de termes.
Factoriser, c'est transformer une somme en un produit de facteurs.

Exemple

$$x(2 - y) \underset{\text{Factoriser}}{\overset{\text{Développer}}{\rightleftarrows}} 2x - xy$$

Double distributivité

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$(3x - 2)(4x - 5) = 12x^2 - 15x - 8x + 10 = 12x^2 - 23x + 10$

Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$(2x + 7)^2 = 4x^2 + 28x + 49$
$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30 + 25$
$(6x + 8)(6x - 8) = 36x^2 - 64$

INDICES DE SOMMATION ET DE PRODUIT

Lorsqu'on souhaite additionner ou multiplier des termes présentant une forme générale pouvant être indexée par un entier naturel, on peut utiliser un symbole pour exprimer la somme ou le produit de façon synthétique.

Le symbole Σ (« Sigma » pour la somme) ou le symbole Π (« Pi » pour le produit) précède une expression dépendant d'un paramètre (k, i, n....) qui croît de 1 en 1.

Sous le symbole, on indique la première valeur de l'indice et au-dessus du symbole, on indique la dernière valeur de l'indice.

Exemples

$\sum_{k=0}^{5} (2k + 1) = (2\times0 + 1) + (2\times1 + 1) + (2\times2 + 1) + (2\times3 + 1) + (2\times4 + 1) + (2\times5 + 1) = 36$

$\prod_{i=2}^{7} 3^i = 3^2 \times 3^3 \times 3^4 \times 3^5 \times 3^6 \times 3^7 = 3^{27}$

Taux d'évolution et coefficient multiplicateur

1. Taux d'évolution direct et coefficient multiplicateur

Définition 1

On considère une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f d'une même grandeur numérique. Le **taux t d'évolution** de cette grandeur est donné par la formule

$$t = \frac{V_f - V_i}{|V_i|}$$

Exemples

- Le prix d'une paire de baskets passe de 159€ à 199€. Le taux d'évolution du prix est de
$$\frac{199-159}{159} = \frac{40}{159} \approx 0,25 \approx \frac{25}{100}$$
Le prix a augmenté d'environ 25%.
- La température est passé de $-10°C$ à $-3°C$. Le taux d'évolution de la température est de
$$\frac{-3-(-10)}{|-10|} = \frac{7}{10} = \frac{70}{100}$$
La température a augmenté de 70%
- Le solde d'un compte en banque est passé de 1 600€ à $-$ 200€. Le taux d'évolution du solde est de
$$\frac{-200-1\,600}{1\,600} = -\frac{1\,800}{1\,600} \approx -1,125 \approx -\frac{112,5}{100}$$
Le compte en banque a perdu 112,5% de sa valeur.

Définition 2

Le **coefficient multiplicateur** c qui correspond à un **taux d'évolution** t est égal à

$$c = \frac{V_f}{V_i} = \begin{cases} 1 + t \text{ si } V_i \geq 0 \\ 1 - t \text{ si } V_i < 0 \end{cases}$$

Démonstration

- Supposons que $V_i \geq 0$
$$1 + t = 1 + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_i}{V_i} + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} = c$$
- Supposons que $V_i < 0$
$$1 - t = 1 - \frac{V_f - V_i}{-V_i} = \frac{V_i}{V_i} + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} = c$$

Exemples

- Pour le premier exemple, le coefficient est de
$$c = 1 + \frac{40}{159} = \frac{199}{159} \approx 1,25$$
$$159 \times 1,25 \approx 199$$
- Pour le deuxième exemple, le coefficient est de
$$c = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10} = \frac{-3}{-10}$$
$$-10 \times \frac{3}{10} = -3$$
- Pour le troisième exemple, le coefficient est de
$$c = 1 + \left(-\frac{1\,800}{1\,600}\right) = -\frac{200}{1\,600} \approx -0,125$$
$$1\,600 \times (-0,125) = -200$$

Remarque

Un coefficient de **0,7** correspond soit à une **diminution de 30%** si la quantité de départ est **positive**, soit à une **augmentation de 30%** si la valeur initiale est **négative**.

2. Taux d'évolutions successives et coefficient multiplicateur

Soit V_0 la valeur initiale d'une grandeur numérique.

Propriété

- Si $V_0 \geq 0$ subit n évolutions successives de taux t_1, t_2… t_n tous **supérieurs à** -1, alors, si c_1, c_2… c_n désignent les coefficients multiplicateurs correspondants à ces taux, les valeurs successives seront toutes positives et le coefficient multiplicateur total c sera égal à
$$c = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$$
- Si $V_0 < 0$ subit n évolutions successives de taux t_1, t_2… t_n tous **inférieurs à** 1, alors si c_1, c_2… c_n désignent les coefficients multiplicateurs correspondants à ces taux, les valeurs successives seront toutes négatives et le coefficient multiplicateur total c sera égal à
$$c = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$$

Remarques

Le coefficient multiplicateur dépendant du taux d'évolution et de la valeur initiale, les autres cas sont moins systématiques.
Par exemple, on considère deux augmentations successives de 150% et de 50%.
Si la valeur initiale est 100, la valeur finale est $100 \times 2,5 \times 1,5 = 375$ et le coefficient vaut $c = 3,75$
Si la valeur initiale est -100, la valeur finale est $-100 \times (-0,5) \times 1,5 = 75$ et le coefficient vaut $c = -0,75$
Dans le dernier cas, si l'on change l'ordre des augmentations, on obtient $-100 \times 0,5 \times (-0,5) = 25$
Avec les conditions de la propriété, les évolutions peuvent être effectuées dans l'ordre que l'on veut sans changer le résultat. Ce n'est pas le cas autrement.

Exemples

- Le **prix** d'une paire de basket (donc **positif**) augmente de 10% puis baisse de 20% puis baisse encore de 50%. Le coefficient multiplicateur total est $1,1 \times 0,8 \times 0,5 = 0,44$
Le prix final représente donc 44% du prix initial, soit une **baisse de 56%**
- Un professeur de mathématiques dépensier possède toujours un **solde négatif** sur son compte en banque. Au cours du mois, il observe une baisse de son solde de 20%, puis une hausse de 50% en enfin une baisse de 30%. Le coefficient multiplicateur total est $1,2 \times 0,5 \times 1,3 = 0,78$.
Son solde a donc subi une **hausse de 22%**.

3. Taux d'évolution réciproque et coefficient multiplicateur

On considère une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f d'une même grandeur numérique. Soit t le taux d'évolution et c le coefficient multiplicateur. Soit t' le taux et c' le coefficient entre V_f et V_i (c'est-à-dire retrouver la valeur initiale en connaissant la valeur finale), on utilise la propriété suivante.

Propriété

$$c' = \frac{1}{c}$$

Exemples

- La Bourse de Paris a subi une baisse de 5% de ses valeurs. De quel pourcentage doit-elle augmenter pour revenir à son niveau initial ?

Les capitalisations sont en euros donc elles sont positives. Une baisse de 5% correspond donc à un coefficient c de ***0,95*** *donc*
$$c' = \frac{1}{c} = \frac{1}{0,95} \approx 1,053$$
La bourse doit augmenter d'environ $5,3\%$ *pour revenir à son niveau initial.*

- Le prix d'un T-shirt est augmenté de 25%. De quel pourcentage doit-on le diminuer pour revenir au prix initial ?
$$c' = \frac{1}{c} = \frac{1}{1,25} \approx 0,8$$
Le prix doit donc être diminué de 20%.

- Un commerçant veut « offrir la TVA » à ses clients. Quel taux de remise doit-il appliquer aux prix TTC (La TVA est de 20%) ?

Le coefficient multiplicateur correspondant à la TVA est
$$1 + \frac{20}{100} = 1,2$$
Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est
$$\frac{1}{1,2} \approx 0,833 \approx \left(1 - \frac{16,7}{100}\right)$$

Le commerçant doit appliquer une remise de 16,7 %.

4. Taux d'évolution moyen

Propriété

- Si $V_0 \geq 0$ subit n évolutions successives de taux t_1, $t_2 \ldots$ t_n tous **supérieurs à** -1, alors, si c_1, $c_2 \ldots$, c_n désignent les coefficients multiplicateurs correspondants à ces taux, le coefficient multiplicateur moyen égale

$$c_m = \left(c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

- Si $V_0 < 0$ subit n évolutions successives de taux t_1, $t_2 \ldots$ t_n tous **inférieurs à** 1, alors si c_1, $c_2 \ldots$ c_n désignent les coefficients multiplicateurs correspondants à ces taux, le coefficient multiplicateur moyen égale

$$c_m = \left(c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

Remarques

- c_m est la **moyenne géométrique** des coefficients multiplicateurs.
- c_m permet d'évaluer le taux moyen, c'est-à-dire le taux si les variations étaient constantes.
- $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

Exemple

Les bénéfices d'une entreprise augmentent de 12% une année et de 8% l'année suivante.

$$c_m = \sqrt{1,12 \times 1,08} \approx 1,0998$$

Les bénéfices de l'entreprise augmentent donc de 9,98% par an en moyenne.

Indices

Les indices sont essentiellement utilisés dans des séries chronologiques.

Définition

Dire que I_n est l'indice à la date t_n avec pour base 100 à la date de référence t_0 signifie que la valeur à la date t_n est égale à I_n % de la valeur à la date t_0

$$I_n = \frac{\text{valeur à la date } t_n}{\text{valeur à la date } t_0} \times 100$$

La valeur d'une grandeur observée une année ou un mois sert de référence (indice 100) et toutes les autres données (antérieures ou ultérieures) sont exprimées sous forme de pourcentage par rapport à cette année de référence. **Indices et grandeurs sont alors proportionnels.**

Les indices sont particulièrement utiles pour comparer des évolutions de deux grandeurs quand les grandeurs ne sont pas du même ordre ou n'ont pas les mêmes unités (comparer PIB et population par exemple).

Propriété

Le pourcentage d'évolution d'une grandeur entre deux dates est le pourcentage d'évolution de l'indice quelle que soit la base choisie.

Remarque

La notion d'indice n'est pas nécessairement associée à l'évolution d'une grandeur dans le temps.

Exemple

On étudie l'évolution de la population d'un pays (en millions d'habitants). On choisit la base 100 en 1900.

Année	1900	1950	2000
Population	21,2	25,6	30,5
Indice	100	121	144

$I_1 = \frac{25,6}{21,2} \times 100 \approx 121$

$I_2 = \frac{30,5}{21,2} \times 100 \approx 144$

La population a augmenté de 44% entre 1900 et 2000.