

Números primos

Un número es primo si sólo tiene dos divisores, el 1 y él mismo. El 1 no se considera primo. Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, Hay infinitos números primos

Los números que no son primos se llaman números compuestos.

Eratóstenes fue un matemático griego que ideó un método para descubrir los números primos del 1 al 100 llamado criba de Eratóstenes. Consiste en escribir los números naturales del 1 al 100 en una tabla e ir tachando los múltiplos de 2, salvo el 2. Después se hace lo mismo con los múltiplos de 3, de 5, de 7, Los números que queden sin tachar son los números primos menores que 100.

Criba de Eratóstenes

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Posteriormente este mismo método fue usado para descubrir números primos.

Para averiguar si un número es primo o compuesto se comprueba si es divisible por los primos, empezando por el 2, hasta que el cociente sea menor que el divisor.

También se puede comprobar si es divisible entre los valores menores o iguales que su raíz cuadrada.

Si fuese divisible por algún primo, entonces el número es compuesto. En otro caso, el número es primo.

Actividades resueltas

Aplica la criba de Eratóstenes para obtener los números primos comprendidos entre el 101 y el 150.

Resolución

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139 y 149

En un aula hay 30 sillas distribuidas en 5 filas de 6 sillas cada una. Se rompe una silla.

¿Se podrán colocar las sillas ahora en filas con igual número de sillas en cada fila? Razona tú respuesta.

Resolución

No. Porque 29 es primo y sólo se puede expresar como $1 \cdot 29$. Sólo se podrían poner en 1 fila de 29 sillas o 29 filas de 1 silla

¿Qué valor resulta al multiplicar los 4 primeros números primos positivos?

Resolución

Los cuatro primeros números primos positivos son 2, 3, 5 y 7 (el 1 no se considera primo).
Por tanto, el producto pedido es $2.3.5.7 = 210$.

Paloma tiene en su tienda entre 336 y 342 mecheros que no puede guardar en cajas del mismo número de mecheros, salvo que los guarde todos juntos o de uno en uno. ¿Cuántos mecheros tiene?

Resolución

Buscamos los números primos comprendidos entre 336 y 342. Comprobamos uno por uno si son o no primos:

337 es primo pues $\sqrt{337} \cong 18,6$ y 337 no es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13 ni 17

338 es compuesto por ser divisible por 2 ; 339 es compuesto por ser divisible por 3,

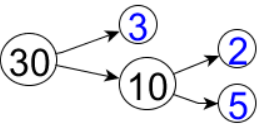
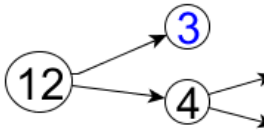
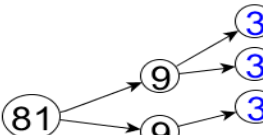
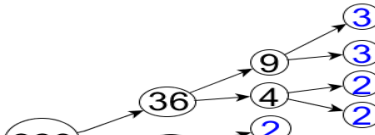
340 es compuesto por ser divisible por 2 ; 341 es compuesto por ser divisible por 11.

El único número primo es 337. Por tanto, tiene 337 mecheros

Factorización

Cualquier número compuesto se puede descomponer como producto de números primos

Factorizar un número es descomponerlo en factores primos

Método tradicional			
$\begin{array}{r l} 30 & 2 \\ \hline 15 & 3 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline 1 & \end{array}$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	$\begin{array}{r l} 12 & 2 \\ \hline 6 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$ $12 = 2^2 \cdot 3$	$\begin{array}{r l} 81 & 3 \\ \hline 27 & 3 \\ \hline 9 & 3 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$ $81 = 3^4$	$\begin{array}{r l} 36 & 2 \\ \hline 18 & 2 \\ \hline 9 & 3 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$
Método del diagrama en árbol			
 $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	 $12 = 2^2 \cdot 3$	 $81 = 3^4$	 $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Actividades resueltas

Explica por qué $4^7 5^3$ no es la factorización de ningún número

Resolución Porque 4 no es primo.

Asocia a cada número su descomposición en factores primos:

45 24 75 72 63 84 12

$$3^2 \cdot 7 \quad 2^3 \cdot 3^2 \quad 3^2 \cdot 5 \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 3 \cdot 5^2 \quad 2^3 \cdot 3 \quad 2^2 \cdot 3$$

Resolución

$$45 = 3^2 \cdot 5 \quad 24 = 2^3 \cdot 3 \quad 75 = 3 \cdot 5^2 \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2 \quad 63 = 3^2 \cdot 7 \quad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 12 = 2^2 \cdot 3$$

Factoriza 360

Resolución

$$360 = 2 \cdot 180 = 2 \cdot 90 = 2 \cdot 45 = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

El número 266 puede descomponerse en producto de tres números primos. ¿Cuál es el mayor de los tres?

Resolución $266 = 2 \cdot 133 = 2 \cdot 7 \cdot 19$. El mayor factor de 266 es 19Método de euclides para el cálculo de divisoresCálculo de los divisores de una potencia de base un n° primo.Tomemos, por ejemplo $2^5 = 32$; observamos que sus divisores son $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16$ y $2^5 = 32$. Hay en total $5 + 1 = 6$ divisoresEn general, si p es un número primo los divisores de p^n son: $p^0, p^1, p^2, p^3, \dots, p^n$. Hay en total $n + 1$ divisores.Ejemplos:- La potencia 3^6 tiene $6 + 1 = 7$ divisores, que son $3^0 = 1; 3^1 = 3; 3^2 = 9; 3^3 = 27; 3^4 = 81; 3^5 = 243$ y $3^6 = 729$ - Hallemos ahora los divisores de $200 = 2^3 \cdot 5^2$

X	1	2	4	8
1	1	2	4	8
5	5	10	20	40
25	25	50	100	200

Los divisores de 200 son 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100 y 200

ANEXO: MÁS ACTIVIDADES

– ¿Cuál o cuáles de los siguientes números NO es primo?

a) 3 b) 5 c) 7 d) 11 e) 12 f) 13

– Señala el número que es primo entre los siguientes: 51 71 91

– ¿Cuál es la suma de los números primos entre 27 y 52?

– ¿Hay algún número primo de tres cifras e iguales las tres?

– ¿Hay algún número primo capicúa de 2 cifras? ¿Y de 3 cifras?

– Rodea con un círculo los números primos de esta lista

2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
1	3	7	9	1	3	7	9	1	3	7	9	1	3	7

– ¿Cuántos divisores tiene el cuadrado de un número primo?

– Indica los números que sean primos: 30 15 44 46 231 49 63 99 20 300
 120 111 222 48 31 66 740 750 38 47 2 4 8 11 15 17
 21 30 33 5 9 13 18 24 29 36 37 42 397 2323 342153 817
 1067 667 24398541 6579023404 727 773 9451 707 1073 119 2431

– Aplica la criba de Eratóstenes a los números comprendidos entre el 101 y el 200:

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Para ello tacha los múltiplos de 2, 3, 5, 7, 11 y 13

– Calcula los números primos comprendidos entre 20 y 40

– Calcula los números primos comprendidos entre 100 y 130

– ¿De cuántas formas puede escribirse 25 como suma de dos números primos?

– Obtén 4 primos de la forma AA, BAB, BACD y AAAC

– En el instituto hay un número de alumnos entre 780 y 788, con los que no se pueden formar equipos del mismo número de miembros sin que sobren alumnos, a menos que haya sólo un equipo o tantos equipos como alumnos. ¿Cuántos hay exactamente?

– En el salón de actos de un instituto van a asistir 60 personas. Queremos distribuir las en filas iguales de modo que cada fila tenga por lo menos 10 personas y menos de 40.

a) Haz un dibujo con todas las posibilidades

b) Comunican que van a faltar 7 personas. ¿Es posible distribuir las con las condiciones expuestas?

– En el laboratorio hay más de 90 minerales y menos de 100. Se quieren colocar en cajas iguales de modo que en cada caja haya el mismo número de minerales y que todas las cajas queden completas. Sólo se puede hacer de dos maneras. ¿Cuántos minerales puede haber en el laboratorio?

– Elena tiene entre 62 y 68 sellos y le es imposible colocarlos en varias hojas de un álbum, poniendo el mismo número de sellos en cada una. Sólo tiene la posibilidad de poner todos los sellos en la misma hoja o un sello en cada hoja. ¿Podrías decir cuántos tiene exactamente?

– Clara tiene un número de libros entre 62 y 66, que puede expresar como suma de dos números primos. ¿Cuántos libros tiene? ¿Cuáles son los dos números primos?

– El padre de Berta tiene un número de días de vacaciones al año entre 34 y 38, que puede expresar como suma de dos números primos. ¿Cuántos días de vacaciones tiene? ¿Cuáles son los dos números primos?

– ¿Cuál es el número cuya descomposición en factores primos es $2^2 5^3 7$? a) 257 b) 420 c) 3500

– La descomposición en factores primos del número 300 es: a) $3 \cdot 10^2$ b) $3 \cdot 2 \cdot 5^2$ c) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

– Observa la descomposición en producto de factores primos de los siguientes números:

$$A = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \quad B = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad C = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

a) Calcula el valor de cada uno de estos números

b) Calcula el número por el cual hay que multiplicar el número A para obtener C. ¿Es el número C múltiplo de A?

c) Calcula el número por el cual hay que multiplicar el número B para obtener A. ¿Es el número B divisor de A?

d) Calcula el número por el cual hay que multiplicar el número B para obtener C. ¿Es el número B divisor de C?

– Calcula los valores de x, y, z: $x = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ $y = 5^3 \cdot 7 \cdot 11$ $z = 5 \cdot 7^2$

Una vez hallados x, y, z, responde verdadero (V) o falso (F) en cada caso:

a) x es múltiplo de y. b) z es divisor de x. c) $x + y$ es múltiplo de 35. d) y es divisible por z.

e) $y \cdot z$ es divisible por x. f) z es divisible por x.

– Si $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$, ¿cuál es la factorización de $90 \cdot 660$?

– Factoriza los números: 6 10 4 15 27 12 24 20 21 32 25 28

72 100 75 128 243 121 68 18 252 585 200 462 24 96 8 500
1260 12 18 20 77 60 45 63 84

– Si la factorización de un número es $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, ¿cuál será la factorización de un número 10 veces mayor?

– Un número tiene como factores el 2 y el 3 y tiene 4 divisores, ¿qué número es?

– ¿Cuántos divisores tiene $7^5 \cdot 13^4$?

– Calcula todos los divisores de los siguientes números, hallando primero cuántos hay:

2^8 $3^7 \cdot 5^9$ $2 \cdot 5 \cdot 7^3$ 2^5 5^3 3^1 $3^4 \cdot 2^3$ $2^4 \cdot 3$ $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $2 \cdot 3^3 \cdot 5$ 800 540 432 136
1225 2700 64 112 72 900 392 160 1125 686 1050 120 36 45 52
100 216 415 980

VARIOS

– Dado un número natural n , se denota $P(n)$ al producto de todos los divisores positivos de n , incluidos 1 y n . Por ejemplo, $P(12) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1728$.

Hallar todos los números naturales n menores que 400 tales que n tiene exactamente dos divisores primos distintos y $P(n) = n^6$.

– Entre los números enteros desde el 1991 al 2011 (ambos inclusive), ¿cuál es el que tiene la mayor cantidad de divisores? Por ejemplo, 60 tiene 12 divisores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

En general, si $N = p^a \cdot q^b \cdot \dots$, n° de divisores de $N = (a + 1)(b + 1) \cdot \dots$

a) Dar una lista de todos los números enteros positivos menores que 100000 que tienen por lo menos 119 divisores.

b) Dar una lista de todos los números enteros positivos menores que 1000000 que tienen por lo menos 219 divisores.

Nota: Por ejemplo, 60 tiene 12 divisores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

– ¿Sabías que 2021 es un número semiprimo, o sea un número que es producto de dos primos, 43 y 47? También es un número libre de cuadrados es decir no existe ningún primo que elevado al cuadrado sea divisor de 2021. Eso quiere decir que 2021 sólo tiene 4 divisores: 1, 43, 47 y 2021.