BÀI 5. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x\in(a,b).$ Khi đó, hệ thức $y'=f'(x)$ xác định một hàm số mới trên khoảng $(a,b).$ Nếu hàm số $y'=f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm cấp hai của hàm số $y=f(x)$ tại x và kí hiệu là y'' hoặc $f''(x).$

Chú ý

- Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y=f(x)$ được định nghĩa tương tự và kí hiệu y''' hoặc $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x).$
- Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp $n-1,$ kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$ $(n\in\mathbb{N},n\geq 4).$ Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $y=f(x)$, kí hiệu $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x).$

$$\boxed{f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.}$$

II. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s=f(t)$ tại thời điểm $t.$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số $y=f(x)$

1. Phương pháp

- ✔ **Tính đạo hàm cấp 1:** $f'(x)$
- ✔ **Tính đạo hàm cấp 2:** $f''(x)=\left[f'(x)\right]'$
- ✔ **Tính đạo hàm cấp 3:** $f^{(3)}(x)=\left[f''(x)\right]'$
- ✔ **Tính đạo hàm cấp 4:** $f^{(4)}(x)=\left[f^{(3)}(x)\right]'$
- ✔ **Tính đạo hàm đến cấp được chỉ ra**

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)=\frac{4}{5}x^5-3x^2-x+4$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $16x^3-6.$ **B.** $16x^3-6x.$ **C.** $4x^3-6.$ **D.** $16x^2-6.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$f(x)=\frac{4}{5}x^5-3x^2-x+4$ thì $f'(x)=4x^4-6x-1,$ do đó: $f''(x)=16x^3-6.$

Ví dụ 2: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\cos 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-2\sin 2x.$ **B.** $-4\cos 2x.$ **C.** $-4\sin 2x.$ **D.** $4\cos 2x.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y=\cos 2x$ thì $y'=-2\sin 2x.$ Do đó $y''=-4\cos 2x.$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1.$ Tập hợp các giá trị x để đạo hàm cấp 2 của $f(x)$ không âm là:

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right].$ **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right).$ **C.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right).$ **D.** $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1$ thì $f'(x)=x^2+x-12;\ f''(x)=2x+1.$

Do đó $f''(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\frac{1}{x+1}.$ Tính $y''?$

A. $y''=\frac{2}{(x+1)^4}.$ **B.** $y''=\frac{2}{(x+1)^3}.$ **C.** $y''=\frac{-2}{(x+1)^3}.$ **D.** $y''=\frac{-2}{(x+1)^4}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y'=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow y''=\frac{2}{(x+1)^3}.$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\frac{x-3}{x+4}.$ Tính $M=2(y')^2+(1-y).y''.$

A. $M=0.$ **B.** $M=1.$ **C.** $M=\frac{1}{x+4}.$ **D.** $M=\frac{2x}{(x+4)^2}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = \frac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{14}{(x+4)^3}$

Lại có $1 - y = 1 - \frac{x-3}{x+4} = \frac{7}{x+4}$

Vậy: $M = 2(y')^2 + (1-y).y'' = 2.\frac{49}{(x+4)^4} + \frac{7}{x+4}.\left(-\frac{14}{(x+4)^3}\right) = 0.$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$ Tính $y'^2 - 2y.y''.$

A. 0. **B.** 2. **C.** $-1.$ **D.** 1.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $y' = x + 1 \Rightarrow y'' = 1.$

Vậy: $y'^2 - 2y.y'' = (x+1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right).1 = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x - 2 = -1.$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x\sin x.$ Tính $xy - 2(y' - \sin x) + xy''.$

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\sin x.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y' = \sin x + \cos x \Rightarrow y'' = \cos x + (\cos x - x\sin x) = 2\cos x - x\sin x.$

Vậy:

$xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = x^2\sin x - 2(\sin x + x\cos x - \sin x) + 2x\cos x - x^2\sin x = 0.$ **Ví dụ 8:** Cho hàm số $y = A\sin(\omega x + \varphi).$ Tính $M = y'' + \omega^2.y.$

A. $M = 1.$ **B.** $M = -1.$

C. $M = \cos^2(\omega x + 4).$ **D.** $M = 0.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y' = A\omega\cos(\omega x + \varphi) \Rightarrow y' = -A\omega^2\sin(\omega x + \varphi)$

$\Rightarrow y'' + \omega^2 y = -A\omega^2\sin(\omega x + \varphi) + A\omega^2\sin(\omega x + \varphi) = 0.$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0.$

A. $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y' = 2\cos 2x + 2\sin 2x \Rightarrow y'' = -4\sin 2x + 4\cos 2x.$

Phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow -4\sin 2x + 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 10: Cho hàm số: $y = (m-4)\frac{x^2}{2} + \cos x.$

Tìm m sao cho $y'' \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \le 3.$ **B.** $m \le 2.$ **C.** $m \ge 3.$ **D.** $m \ge 2.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = (m-4)x - \sin x \Rightarrow y'' = m - 4 - \cos x$

$y'' \le 0 \Leftrightarrow m - 4 - \cos x \le 0 \Leftrightarrow \cos x \ge m - 4 \quad (*)$

Vì $\cos x \ge -1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \ge m - 4 \Leftrightarrow m \le 3.$

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{1-x}.$ Giải bất phương trình $y'' > 0.$

A. $x > 1.$ **B.** $x < 1.$ **C.** $x \ne 1.$ **D.** Vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y' = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$

Vậy $y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(1-x)^3} > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1.$

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=-3x^3+3x^2-x+5;\ y^{(3)}(3)$ bằng:

A. $y^{(3)}(3)=-162$.

B. $y^{(3)}(3)=0$.

C. $y^{(3)}(3)=54$.

D. $y^{(3)}(3)=-18$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y=-3x^3+3x^2-x+5\Rightarrow y'=-9x^2+6x-1$

$y''=-18x+6$

$y^{(3)}=-18\Rightarrow y^{(3)}(3)=-18.$

Ví dụ 13: Cho hàm số $y=\sin^2 x$. Đạo hàm cấp 4 của hàm số là:

A. $-\cos^2 2x.$

B. $8\cos 2x.$

C. $-8\cos 2x.$

D. Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y=\sin^2 x$

$y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$y''=2\cos 2x$

$y'''=-4\sin 2x$

$y^{(4)}=-8\cos 2x.$

Ví dụ 14: Cho hàm số $y=f(x)=\sin 2x.$ Hãy chọn câu đúng.

A. $4y-y''=0.$ **B.** $4y+y''=0.$ **C.** $y=y'\tan 2x.$ **D.** $y^2+(y')^2=4.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$\begin{cases}y'=2\cos 2x\\ y''=-4\sin 2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4y-y''=8\sin 2x\\ 4y+y''=0\end{cases}.$

Ví dụ 15: Cho hàm số $y=\sqrt{x^2+1}$. Xét hai quan hệ:

(I) $y.y'=2x;$

(II) $y^2.y''=y'.$

Quan hệ nào đúng?

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có:

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ và $y'' = \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, suy ra $y.y' = x$ và $y^2.y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \neq y'$.

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = 2x^5 - \dfrac{4}{x} + 1$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $40x^3 - \dfrac{4}{x^3}$. **B.** $40x^3 + \dfrac{4}{x^3}$. **C.** $40x^3 - \dfrac{8}{x^3}$. **D.** $40x^3 + \dfrac{8}{x^3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$f(x) = 2x^5 - \dfrac{4}{x} + 1$ thì $f'(x) = 10x^4 + \dfrac{4}{x^2}$, do đó $f''(x) = 40x^3 - \dfrac{8}{x^3}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \dfrac{2}{1+x}; y^{(3)}(1)$ bằng:

A. $-\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$.

C. $-\dfrac{4}{3}$. **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$y = \dfrac{2}{1+x} \Rightarrow y^{(3)} = \dfrac{-12}{(1+x)^4}$

$y^{(3)}(1) = \dfrac{-12}{16} = \dfrac{-3}{4}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \cos^2 x;; y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. 2. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $-2\sqrt{3}$. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y = \cos^2 x \Rightarrow y' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$

$y'' = -2\cos 2x$

$y''' = 4\sin 2x$

$y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 4.\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}.$

Câu 4: Cho hàm số $y = \sin x + \cos x;\ y^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $\sqrt{2}$.

B. $-\sqrt{2}$.

C. 0.

D. Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y = \sin x + \cos x \Rightarrow y' = \cos x - \sin x$

$y'' = -\sin x - \cos x$

$y''' = -\cos x + \sin x$

$y^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

Câu 5: Với hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 1},\ y^{(3)}(2)$ là:

A. $\frac{80}{27}$.

B. $\frac{-80}{27}$.

C. $\frac{40}{27}$.

D. $\frac{-40}{27}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y = \frac{1}{x^2 - 1}$

$\Rightarrow y^{(3)} = -\frac{1}{2}.3!\left[\frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x+1)^4}\right]$

$y^{(3)} = -3\left[\frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x+1)^4}\right]$

$y^{(3)}(2) = \frac{-80}{27}.$

Câu 6: Cho hàm số $y = \cos^2 2x$ và các đạo hàm y', y'', y'''. Giá trị của biểu thức $y''' + 16y' + y'' + 16y - 8$ là kết quả nào sau đây?

A. 0.

B. 8.

C. -8.

D. $\cos 4x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$y = \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$

$\Rightarrow y' = -2\sin 4x;\ y'' = -8\cos 4x;\ y''' = 32\sin 4x.$

$\Rightarrow y''' + 16y' + y'' + 16y - 8 = 32\sin 4x - 32\sin 4x - 8\cos 4x + 8 + 8\cos 4x - 8 = 0.$

Câu 7: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\sin 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\sin 2x.$ **B.** $-4\sin x.$ **C.** $-4\sin 2x.$ **D.** $-2\sin 2x.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y=\sin 2x$ thì $y'=2\cos 2x$. Do đó $y''=-4\sin 2x$.

Câu 8: Xét hàm số $y=f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x)=-8$ có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $x=\dfrac{\pi}{2}.$ **B.** $x=0;\ x=\dfrac{\pi}{6}.$ **C.** $x=0;\ x=\dfrac{\pi}{3}.$ **D.** $x=0;\ x=\dfrac{\pi}{2}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Từ giả thiết ta có:

$$16\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-8\Leftrightarrow\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

.**Câu 7:** Cho hàm số $y=\cos^2 x.$

Tính $y''?$

A. $y''=-2\cos 2x.$ **B.** $y''=-4\cos 2x.$ **C.** $y''=2\cos 2x.$ **D.** $y''=4\cos 2x.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y'=-2\cos x\sin x=-\sin 2x\Rightarrow y''=-2\cos 2x.$

Câu 9: Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}.$ Tính $M=y^3.y''+1.$

A. $-2.$ **B.** $0.$ **C.** $-1.$ **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $$y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Rightarrow y''=\frac{1}{\left(2x-x^2\right)}.\left[-1.\sqrt{2x-x^2}-\frac{(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}}\right]$$

$$=\frac{-1}{\left(2x-x^2\right)\sqrt{2x-x^2}}\Rightarrow y^3.y''=-1\Rightarrow y^3.y''+1=0$$

.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=(x+1)^4.$ Tính $f''(2).$

A. 27. **B.** 81. **C.** 96. **D.** 108.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $f'(x)=4(x+1)^3 \Rightarrow f''(x)=12(x+1)^2$. Vậy $f''(2)=108.$

Câu 11: Cho hàm số $y=\sin^3 x.$ Tính $M=y''+9y.$

A. $\sin x.$ **B.** $6\sin x.$ **C.** $6\cos x.$ **D.** $-6\sin x.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y'=3\sin^2 x\cos x \Rightarrow y''=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x.$

Vậy:

$$M=y''+9y=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x+9\sin^3 x=6\sin x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=6\sin x.$$

Câu 12: Cho hàm số $y=x\tan x.$ Tính $M=x^2y''-2\left(x^2+y^2\right)(1+y).$

A. $\dfrac{x^2}{\cos^2 x}.$ **B.** 1. **C.** $x^2-\tan^2 x.$ **D.** 0.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y'=\tan x+\dfrac{x}{\cos^2 x}\Rightarrow y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x+2x\sin x+\cos x}{\cos^4 x}$

Lại có $x^2+y^2=x^2+x^2\tan^2 x=x^2\left(1+\tan^2\right)=\dfrac{x^2}{\cos^2 x}$

$1+y=1+x\tan x$.

Vậy $2\left(x^2+y^2\right)(1+y)=\dfrac{2x^2}{\cos^2 x}(1+x\tan x)\quad(1)$

$$x^2y''=x^2\left(\frac{\cos^2 x+\cos^2 x+2x\sin x\cos x}{\cos^4 x}\right)$$

$$=\frac{2x^2\left(\cos^2 x+x\sin x\cos x\right)}{\cos^4 x}=\frac{2x^2}{\cos^2 x}(1+x\tan x)\quad(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M=x^2y''-2\left(x^2+y^2\right)(1+y)=0.$

Câu 13: Cho hàm số $y=3x^5-5x^4+3x-2.$ Giải bất phương trình $y''<0.$

A. $x\in(-\infty;1)\setminus\{0\}.$ **B.** $x\in(1;+\infty).$

C. $x \in (-1;1).$ **D.** $x \in (-2;2).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = 15x^4 - 20x^3 + 3 \Rightarrow y'' = 60x^3 - 60x^2$.

$$y'' < 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x^2 < 0 \Leftrightarrow 60x^2(x-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Câu 14: Cho hàm số $y = \dfrac{1}{(x+1)^3}.$ Giải bất phương trình $y'' < 0.$

A. $x < -1.$ **B.** $x > -1.$ **C.** $x \neq 1.$ **D.** Vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = \dfrac{-3}{(x+1)^4} \Rightarrow y'' = \dfrac{12}{(x+1)^5}.$

Vậy $y'' < 0 \Leftrightarrow \dfrac{12}{(x+1)^5} < 0 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x) = \sin x.$ Hãy chọn câu **sai**.

A. $y' = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right).$ **B.** $y'' = \sin(x + \pi).$

C. $y''' = \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right).$ **D.** $y^{(4)} = \sin(2\pi - x).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$y^{(4)} = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x.$$

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x}{1 - x}.$ Đạo hàm cấp 2 của f là:

A. $y'' = 2 + \dfrac{1}{(1-x)^2}.$ **B.** $y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}.$

C. $y'' = \dfrac{-2}{(1-x)^3}.$ **D.** $y'' = \dfrac{2}{(1-x)^4}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$y=2x-1+\frac{1}{1-x}\Rightarrow y'=2+\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow y''=\frac{2(1-x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)=-\frac{1}{x}.$ Xét hai mệnh đề:

(I) $y''=f''(x)=\frac{2}{x^3}.$

(II) $y'''=f'''(x)=-\frac{6}{x^4}.$

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II).

C. Cả hai đều đúng. **D.** Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y'=\frac{1}{x^2}\Rightarrow y''=-\frac{2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$ (do đó (I) sai).

$\Rightarrow y'''=2.\frac{3x^2}{x^6}=\frac{6}{x^4}$ (do đó (II) sai).

Câu 18: Cho hàm số: $y=(2-m)x^4+2x^3+2mx^2+2m-1.$

Tìm m để phương trình $y''=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}.$ **B.** $m\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}.$

C. $m\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}.$ **D.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y'=4(2-m)x^3+6x^2+4mx\Rightarrow y''=12(2-m)x^2+12x+4m.$

Phương trình $y''=0$ có hai nghiệm phân biệt hay phương trình: $3(2-m)x^2+3x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-m\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-m\neq 0\\ 4m^2-8m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 2\\ \left[\begin{array}{l}m<\frac{1}{2}\\ m>\frac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Dạng 2: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số y=f(x)

1. Phương pháp

- ✔ Tính đạo hàm $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$.
- ✔ Dự đoán công thức đạo hàm cấp n của hàm số.
- ✔ Chứng minh công thức dự đoán bằng quy nạp toán học.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = \sin x,$ dự đoán công thức $y^{(n)}(x)$ bằng:

A. $y^{(n)} = \sin(x + n\pi).$ **B.** $y^{(n)} = \cos(x + n\pi).$

C. $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$ **D.** $y^{(n)} = \cos\left(x - n.\frac{\pi}{2}\right).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta chứng minh bằng quy nạp

Với n = 1, ta có $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ đúng.

Giả sử công thức đúng với n = k, tức là $y^{(k)} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$

Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$y^{(k+1)} = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right).$ Thật vậy:

$$y^{(k+1)} = \left[y^{(k)}\right]' = \left[\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Vậy, ta được $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{2x+1},$ dự đoán công thức $y^{(n)}(x)$ bằng:

A. $y^{(n)} = \sin(x + n\pi).$ **B.** $y^{(n)} = \cos(x + n\pi).$

C. $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$ **D.** $y^{(n)} = \cos\left(x - n.\frac{\pi}{2}\right).$

Hướng dẫn giải

$y' = -\frac{2}{(2x+1)^2}$; $y'' = \frac{2^2.2}{(2x+1)^3}$ và $y''' = -\frac{2^3.2.3}{(1+x)^4}$.

Dự đoán:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n.2^n.n!}{(2x+1)^{n+1}}.$$

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp.

Với n = 1, ta có:

$$y' = \frac{(-1).2.1!}{(2x+1)^{1+1}} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$ đúng.

Giả sử công thức đúng với n = k, tức là $y^{(k)} = \frac{(-1)^k.2^k.k!}{(2x+1)^{k+1}}$. (*)

Ta đi chứng minh (2) đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$$y^{(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}.2^{k+1}.(k+1)!}{(2x+1)^{k+2}}.$$

Thật vậy:

$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = [\frac{(-1)^k.2^k.k!}{(2x+1)^{k+1}}]' = (-1)^k.2^k.k!\left[\frac{1}{(2x+1)^{k+1}}\right]'$$

$$= (-1)^k.2^k.k!\left[-\frac{2(k+1)}{(2x+1)^{k+2}}\right] = \frac{(-1)^{k+1}.2^{k+1}.(k+1)!}{(2x+1)^{k+2}}$$, đpcm.

Vậy, ta được: $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.2^n.n!}{(2x+1)^{n+1}}$.

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 19: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$.

A. $y^{(n)} = \frac{(2)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

B. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^{n+1}.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

C. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^n} - \frac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^n}$.

D. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $2x+1=7(x-2)-5(x-3)$; $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

Suy ra $y=\frac{7}{x-3}-\frac{5}{x-2}.$

Mà $\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.1^n.n!}{(x-2)^{n+1}}=\frac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}},\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}$

Nên $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}.$

Câu 20: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y=\cos 2x.$

A. $y^{(n)}=(-1)^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

B. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right).$

C. $y^{(n)}=2^{n+1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

D. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

Hướng dẫn giải:

ĐÁP ÁN D

Ta có $y'=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),y''=2^2\cos\left(2x+2\frac{\pi}{2}\right),$

$y'''=2^3\cos\left(2x+3\frac{\pi}{2}\right).$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

Câu 21: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y=\sqrt{2x+1}.$

A. $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}.3.5...(3n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}.$

B. $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}.$

C. $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n+1}}}.$

D. $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}, y''=-\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}, y'''=\dfrac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}.$

Câu 22: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x^2-3x+2}.$

A. $y^{(n)}=\dfrac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}+\dfrac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}.$

B. $y^{(n)}=\dfrac{5.(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}-\dfrac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}.$

C. $y^{(n)}=\dfrac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}:\dfrac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}.$

D. $y^{(n)}=\dfrac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y=\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{3}{x-1}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $y^{(n)}=\dfrac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}.$

Câu 23: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+5x+6}$

A. $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}.$

B. $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^n}-\dfrac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^n}.$

C. $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}}-\frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}.$

D. $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n-1}}-\frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n-1}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $x=3(x+2)-2(x+3)$; $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

Suy ra $y=\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x+2}.$

Mà $\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.1^n.n!}{(x+2)^{n+1}}=\frac{(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}, \left(\frac{1}{x+3}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.n!}{(x+)^{n+1}}$

Nên ta có: $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}}-\frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}.$

Câu 24: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y=\cos 2x.$

A. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

B. $y^{(n)}=2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

C. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right).$

D. $y^{(n)}=2^{n+1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có :

$y'=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right), y''=2^2\cos\left(2x+2\frac{\pi}{2}\right), \ y'''=2^3\cos\left(2x+3\frac{\pi}{2}\right).$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

Dạng 3: Ý nghĩa vật lý của đạo hàm cấp hai

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2$

(t: tính bằng giây, s: tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 12m/s$.

B. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 24m/s$.

C. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 18m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 9m/s^2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

- $S = t^3 - 3t^2 \Rightarrow v(t) = S' = 3t^2 - 6t$

$\Rightarrow v(3) = 3.3^2 - 18 = 9(m/s)$.

- $S = t^3 - 3t^2 \Rightarrow a = S'' = 6t - 6$

$a_{(t=4s)} = 6.4 - 6 = 18(m/s^2)$.

Ví dụ 2: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

A. $24(m/s^2)$. **B.** $17(m/s^2)$. **C.** $14(m/s^2)$. **D.** $12(m/s^2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ bằng $S''(3)$.

$S'(t) = 3t^2 - 6t + 5; S''(t) = 6t - 6$ nên $S''(3) = 18 - 6 = 12(m/s^2)$.

3. bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 25: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t: tính bằng giây, s tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ hoặc $t = 3$.

B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1$ là $a = 12m/s^2$.

C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $a = 12m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

- $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$

$\Rightarrow v(t) = S3t^2 - 6t - 9$

$v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array}\right.$

- $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$

$\Rightarrow a = S'' = 6t - 6$

$\Rightarrow a_{(t=3s)} = 6.3 - 6 = 12\left(m/s^2\right).$

Câu 26: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ là:

A. $12\left(m/s^2\right).$ **B.** $8\left(m/s^2\right).$ **C.** $7\left(m/s^2\right).$ **D.** $6\left(m/s^2\right).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ bằng $S''(2).$

$S'(t) = 3t^2 - 4t + 4;\ S''(t) = 6t - 4$ nên $S''(2) = 12 - 4 = 8\left(m/s^2\right)$.