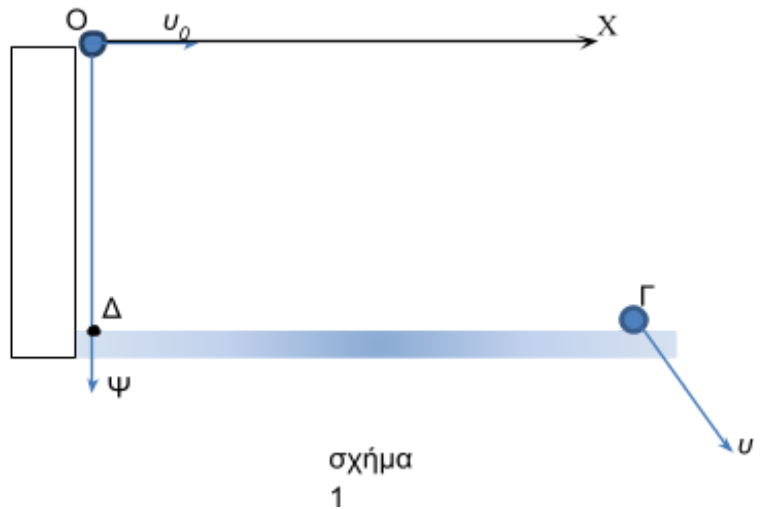


**Στροφορμή: Από το υλικό σημείο στο στερεό σώμα και στο σύστημα**

Α) Υλικό σημείο μάζας  $m = 1\text{kg}$  εκτοξεύεται οριζόντια από το σημείο Ο μιας ταράτσας, με αρχική ταχύτητα μέτρου  $v_0 = 10\text{m/s}$ , από ύψος  $h = 20\text{m}$  πάνω από το οριζόντιο έδαφος, όπως στο σχήμα 1. Βρείτε τη στροφορμή του ως προς το σημείο Δ, που βρίσκεται στο επίπεδο της τροχιάς, στη βάση του κτιρίου

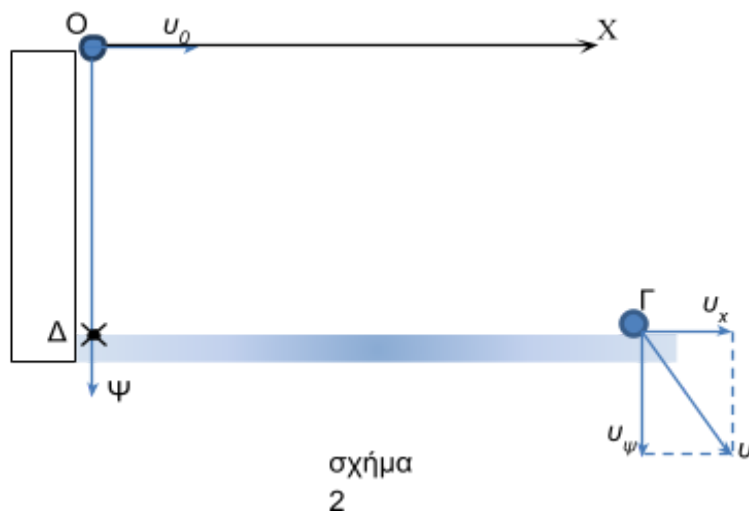
α) στη θέση εκτόξευσης Ο

β) στη θέση Γ λίγο πριν χτυπήσει στο έδαφος.


**Απάντηση**

α) Η στροφορμή θα έχει μέτρο  $|L_{O(\Delta)}| = m \cdot v_0 \cdot h = 200\text{kgm}^2 / \text{s}$

Το διάνυσμα της στροφορμής έχει τη διεύθυνση της ευθείας, που είναι κάθετη στο επίπεδο της



τροχιάς και διέρχεται από το Δ και φορά προς τη σελίδα (σχήμα 2).

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\text{s}$$

β) Στο έδαφος φτάνει τη χρονική στιγμή

Οι συνιστώσες της ταχύτητάς του είναι

$$v_x = v_0 = 10\text{m/s}$$

$$v_\psi = gt = 20\text{m/s}$$

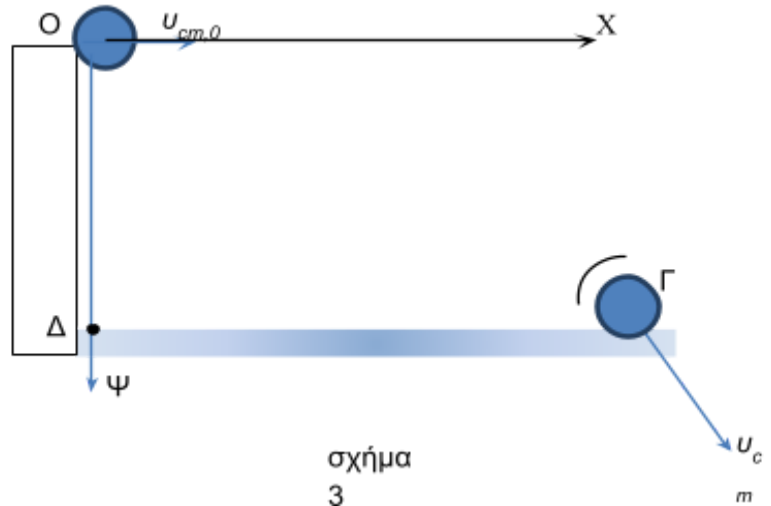
Η στροφορμή οφείλεται μόνο στην  $v_\psi$ . Ο μοχλοβραχίονας της στροφορμής είναι ίσος με το βεληνεκές, δηλαδή  $d = v_0 \cdot t = 20m$ . Τότε:

$$|L_{\Gamma(\Delta)}| = m \cdot v_\psi \cdot d = 400 \text{kgm}^2 / \text{s}$$

Το διάνυσμα της στροφορμής έχει τη διεύθυνση της ευθείας, που είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και διέρχεται από το  $\Delta$  και φορά προς τη σελίδα.

**B)** Σε λεπτό δίσκο μάζας  $m = 1\text{kg}$  και ακτίνας  $R = 0,2\text{m}$ , δίνουμε στο κέντρο μάζας του οριζόντια ταχύτητα μέτρου  $v_{cm,0} = 10\text{m/s}$ , εκτοξεύοντας το δίσκο από το σημείο  $O$  μιας ταράτσας, ύψους  $h = 20\text{m}$  πάνω από το οριζόντιο έδαφος, με το επίπεδό του κατακόρυφο όπως στο σχήμα 3. Ταυτόχρονα δίνουμε στο δίσκο γωνιακή ταχύτητα μέτρου  $\omega = 2\text{rad/s}$ , ώστε να στρέφεται δεξιόστροφα. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι

$$I = \frac{1}{2}mR^2 \quad \text{και} \quad g = 10\text{m/s}^2.$$

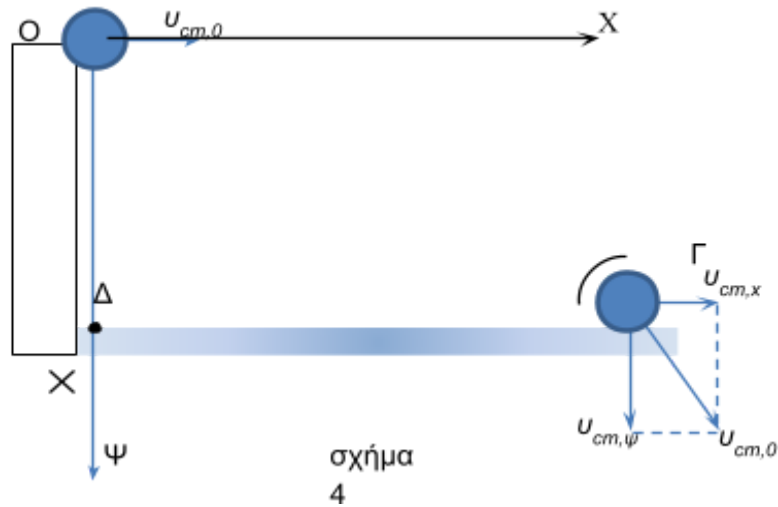


Βρείτε την ολική στροφορμή του ως προς το σημείο  $\Delta$  στη βάση του κτιρίου

- στη θέση εκτόξευσης  $O$
- στη θέση  $\Gamma$  λίγο πριν χτυπήσει στο έδαφος.

### Απάντηση

α) Το κέντρο μάζας του δίσκου έχει τροχιακή στροφορμή, όπως το υλικό σημείο της



περίπτωσης (Α), μέτρου  $|L_{O(\Delta),τροχ}| = m \cdot v_{cm,0} \cdot h = 200 \text{ kgm}^2 / \text{s}$

Το διάνυσμα της στροφορμής έχει τη διεύθυνση της ευθείας, που είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και διέρχεται από το Δ και φορά προς τη σελίδα (σχήμα 4).

Ταυτόχρονα ο δίσκος έχει ιδιοστροφορμή - σπινμέτρο

$$|L_s| = I_{cm} \cdot \omega = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \omega = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,04 \cdot 10 = 0,2 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

Η ιδιοστροφορμή είναι ΙΔΙΑ ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου της κίνησης άρα και ως προς το Δ. Έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και φορά προς τον αναγνώστη.

Η συνολική στροφορμή ως προς το Δ θα είναι το διανυσματικό άθροισμα

$$\overset{\curvearrowright}{L}_{O(\Delta)} = \overset{\curvearrowright}{L}_{O(\Delta),τροχ} + \overset{\curvearrowright}{L}_s$$

Με θετική φορά προς τη σελίδα

$$L_{O(\Delta)} = +|L_{O(\Delta),τροχ}| - |L_s| = 199,8 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

με φορά προς τη σελίδα.

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2 \text{ s}$$

β) Στο έδαφος φτάνει τη χρονική στιγμή

Οι συνιστώσες της ταχύτητας του κέντρου μάζας είναι

$$v_{cm,x} = v_{cm,0} = 10 \text{ m/s}$$

$$v_{cm,y} = gt = 20 \text{ m/s}$$

Η τροχιακή στροφορμή οφείλεται μόνο στην  $v_y$ . Ο μοχλοβραχίονας της τροχιακής στροφορμής είναι ίσος με το βεληνεκές, δηλαδή  $d = v_0 \cdot t = 20 \text{ m}$ . Τότε:

$$|L_{\Gamma(\Delta)}| = m \cdot v_{cm,y} \cdot d = 400 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

Το διάνυσμα της στροφορμής έχει τη διεύθυνση της ευθείας, που είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και διέρχεται από το  $\Delta$  και φορά προς τη σελίδα (σχήμα 4).

Η μοναδική δύναμη που ασκείται στο δίσκο είναι το βάρος του  $\vec{W}$ , το οποίο δε δημιουργεί ροπή ως προς το κέντρο μάζας του άρα δεν υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση που θα αλλάξει τη γωνιακή ταχύτητά του, επομένως ο δίσκος έχει ιδιοστροφορμή - spin μέτρου

$$|L_s| = I_{cm} \cdot \omega = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \omega = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,04 \cdot 10 = 0,2 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

Η ιδιοστροφορμή είναι ΙΔΙΑ ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου της κίνησης άρα και ως προς το  $\Delta$ . Έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και φορά προς τον αναγνώστη.

Η συνολική στροφορμή ως προς το  $\Delta$  θα είναι το διανυσματικό άθροισμα

$$\vec{L}_{\Gamma(\Delta)} = \vec{L}_{\Gamma(\Delta),\text{τροχ}} + \vec{L}_s$$

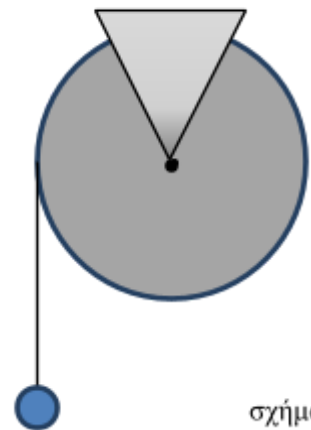
Με θετική φορά προς τη σελίδα

$$L_{\Gamma(\Delta)} = +|L_{\Gamma(\Delta),\text{τροχ}}| - |L_s| = 399,8 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

με φορά προς τη σελίδα.

Γ) Το σύστημα του σχήματος 5 αποτελείται από έναν κατακόρυφο δίσκο μάζας  $M = 1 \text{ kg}$  και ακτίνας  $R = 0,2 \text{ m}$ , που μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του χωρίς τριβές. Στην περιφέρεια φέρει αυλάκι στο οποίο έχει τυλιχτεί πολλές φορές αβαρές μη εκτατό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου κρέμεται υλικό σημείο μάζας  $m = 2 \text{ kg}$ . Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι  $I = \frac{1}{2} m R^2$  και  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να κινηθεί. Τη χρονική στιγμή  $t = 2 \text{ s}$ , υπολογίστε:

α) Τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου



σχήμα 5

β) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος και της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου

γ) Τη στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο Κ του δίσκου.

### Απάντηση

α) Σημειώνουμε τις δυνάμεις στα σώματα του συστήματος (σχήμα 6) και εφαρμόζουμε για κάθε σώμα τον 2ο Νόμο Newton:

Για το σώμα

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow mg - T = ma \quad (1)$$

Για το δίσκο

$$\Sigma \vec{\tau}_K = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow MR = \frac{I}{2} \cdot \frac{a}{R} \xrightarrow{T=T}$$

$$T = \frac{I}{2} Ma \quad (2)$$

(1)+(2)

$$\rightarrow mg = \left(m + \frac{M}{2}\right)a \Leftrightarrow 10 = 2,5a \Leftrightarrow a = 4 \text{ m/s}^2$$

β) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα είναι

$$v = a \cdot t = 4 \cdot 2 = 8 \text{ m/s}$$

Επειδή  $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a}{R} = \frac{4}{0,2} = 20 \text{ rad/s}^2$  θα έχουμε για το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του

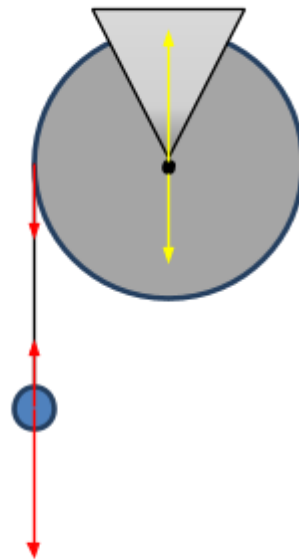
δίσκου  $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t = 20 \cdot 2 = 40 \text{ rad/s}$

γ) Το σύστημα θα έχει στροφορμή ως προς το κέντρο Κ του δίσκου

$$L_{\text{συστ}(K)} = L_{\text{σ\omega\mu}} + L_{\text{δίσκ}} \Leftrightarrow L_{\text{συστ}(K)} = |L_{\text{σ\omega\mu}}| + |L_{\text{δίσκ}}| \Leftrightarrow L_{\text{συστ}(K)} = m\omega R + I\omega \Leftrightarrow$$

$$L_{\text{συστ}(K)} = m\omega R + \frac{I}{2} MR^2 \omega \Leftrightarrow L_{\text{συστ}(K)} = 2 \cdot 8 \cdot 0,2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,04 \cdot 40 \Leftrightarrow L_{\text{συστ}(K)} = 11,2 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

κάθετη στο επίπεδο της κίνησης με φορά προς τον αναγνώστη.



σχήμα 6

Ανδρέας Ριζόπουλος

