

Chapitre II : Suites et récurrence

Objectifs :

- Modéliser un problème par une suite donnée par une formule explicite ou une relation de récurrence
- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite

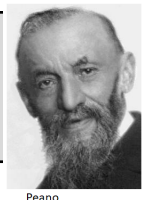
Permettant de modéliser des problèmes discrets, les suites sont un outil particulièrement intéressant. Plus formellement, une *suite numérique* est une liste de nombres réels, ordonnée, et indexée par les entiers naturels (ou numérotée). Une suite u peut-être vue comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout entier n associe le nombre $u(n)$ (*i.e*)

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{R} \\ n & \mapsto u_n \end{cases}$$

Parmi les techniques de démonstration permettant d'établir des propriétés sur les suites, le *raisonnement par récurrence* est parmi la plus importante et la plus puissante. Le raisonnement par récurrence s'apparente à l'*effet domino* en mathématiques ! L'effet domino, c'est une réaction en chaîne qui décrit la chute de dominos placés en ligne. Si l'on imagine ces dominos placés debout et assez proches les uns des autres, la chute du premier va provoquer la chute du deuxième puis du troisième et ainsi de suite. Au final, tous les dominos sont tombés.



Histoire des mathématiques : Ce raisonnement a été utilisé pour la première fois de manière explicite par Pascal dans son *Traité du triangle arithmétique* (1654). Mais ce sont Dedekind et Peano (1858-1932) qui l'ont rigoureusement formalisé au XIXe siècle.



Peano

I. Le raisonnement par récurrence

Définition

Une propriété (ou proposition) mathématique est une phrase écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui est soit vraie soit fausse.

Exemples :

$$P(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(n) : (1 + \pi)^n \geq 1 + n\pi$$

$$P(n) : n^3 - n \text{ est un multiple de } 3$$

Notation

Dans ce chapitre, il est très commode d'utiliser la notation $\forall n \in \mathbb{N}$ pour dire "pour tout entier naturel n "

Principe de récurrence

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

- **Etape 1 (Initialisation)** : $P(n)$ est vraie pour un entier n_0 ;
- **Etape 2 (Hérédité)** : pour tout entier $k \geq n_0$, " $P(k)$ est vraie" implique " $P(k + 1)$ est vraie"

Alors on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Etapes	Exemple
Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ fixé : • 1 - Prédicat : $P(n)$: propriété que l'on veut montrer • 2 - Initialisation : Pour $n = n_0$, on vérifie que P_{n_0} est vraie • 3 - Hérédité On suppose que pour un entier k quelconque ($k \geq n_0$) la proposition P_k est vraie et sous cette condition, on démontre que P_{k+1} est vraie. ➤ Soit en utilisant directement P_k ➤ Soit en "construisant" P_{k+1} • 4 - Conclusion Lorsque les deux étapes ont été réalisées, on conclut que la proposition P_n est vraie pour tout entier n avec $n \geq n_0$	On veut montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$. On note P_n la proposition, $u_{n+1} > u_n$. 1. Prédicat : $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$ 2. Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ donc $u_1 > u_0$ et P_0 est vraie 3. Hérédité : On suppose que P_k est vraie pour un certain $k \geq 0$ et montrons que P_{k+1} est vraie, à savoir $u_{k+2} > u_{k+1}$ <u>Au rang $k + 1$:</u> Par hypothèse de récurrence : $u_{k+1} > u_k$, donc $2u_{k+1} > 2u_k$ et $2u_{k+1} + 1 > 2u_k + 1$ soit $u_{k+2} > u_{k+1}$ Ainsi P_{k+1} est vraie. 4. Conclusion : La proposition est initialisée au rang $n = 0$ et est héréditaire donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

 **Heuristique**

On compare très souvent le principe de la récurrence ou *principe des dominos*. Cependant, il faut bien comprendre toute l'analogie et la subtilité !

On considère une suite de dominos.

Si un domino tombe alors le suivant tombera.

Comme le premier tombe alors le second tombera, puis le troisième, ...etc..

Conclusion : si le premier domino tombe alors tous tomberont.

Tout repose en fait sur le *principe de propagation* : "si l'un tombe alors le suivant aussi". C'est une sorte de réaction en chaîne.

Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :

- 1) Prouver que le premier domino tombe.
- 2) Etablir le principe : si le n ème domino tombe alors le suivant (le numéro $n + 1$) tombera.

Si on démontre ces deux choses alors la réaction se déclenche. Donc la propriété est démontrée pour tous les dominos !

Sauf qu'ici, un domino numéro n qui tombe est une propriété ou une formule vraie au rang n .

Exemple de démonstration par récurrence**Enonce** : Démontrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :

- **Prédicat** soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- **Initialisation** : Pour $n = 0$
 - terme de gauche : la somme vaut 0
 - terme de droite : $\frac{0(0+1)}{2} = 0$

Il y a bien égalité, on a montré que $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Hypothèse de récurrence On suppose que $P(k)$ est vraie pour un certain k

On veut démontrer que $P(k + 1)$ est vraie à savoir que $P(k + 1)$: $1 + 2 + \dots + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ Au rang $k + 1$:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + \dots + (k + 1) &= 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) \\
 &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \text{ on utilise l'hyp de récurrence} \\
 &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \text{ on met au même dénominateur} \\
 &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ on factorise par } (k + 1)
 \end{aligned}$$

Donc $P(k + 1)$ est vraie.

- **Conclusion** : La propriété est initialisée pour $n = 0$, héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n

Contre-exemple : L'initialisation est indispensable !

On considère la propriété $P(n)$: 6 divise $7^n + 1$
 Cette propriété est héréditaire à partir de $n = 0$.

En effet, supposons que $P(n)$ soit vraie, donc il existe k_n tel que $7^n + 1 = 6 \times k_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$

Au rang $n + 1$:

$$7^{n+1} + 1 = 7 \times 7^n + 1 = 7(6k_n - 1) + 1 = 42k_n - 6 = 6(7k_n - 1) = 6k_{n+1} \text{ avec } k_{n+1} = 7k_n - 1 \in \mathbb{Z}$$

donc $P(n + 1)$ est toujours vraie lorsque $P(n)$ est vraie : la propriété est héréditaire.

Cependant, on ne peut pas conclure par récurrence que la propriété est vraie pour tout entier naturel car elle n'a pas été initialisée. D'autant que $P(0)$ est fausse : $7^0 + 1 = 2$ qui n'est pas divisible par 6.

En fait, la propriété est fausse pour toutes les valeurs entières de n .

Il faut bien comprendre que l'hérédité est un mécanisme qui nécessite une amorce pour s'appliquer de proche en proche et ici nous n'avons pas l'amorce.

Exercice : On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 2^n - 1$

II. Comportement global d'une suite

Définition : sens de variation d'une suite

Une suite (u_n) est **croissante** si pour tout entier naturel n : $u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est **décroissante** si pour tout entier naturel n : $u_n \geq u_{n+1}$.

Une suite est dite **monotone** si elle est soit (toujours) croissante, soit (toujours) décroissante.

Une suite est dite **constante** si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n$.

Exemples :

La suite des entiers pairs 0, 2, 4, ... est une suite arithmétique de raison $r = 2$, elle est croissante car $r > 0$.

La suite des nombres 1, 2, 4, 8, 16, ... est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de terme initial $u_0 = 1$, elle est croissante car $q > 1$.

La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_n = (-1)^n$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Méthodes pour étudier les variations d'une suite

- Méthode fonctionnelle** : Si $u_n = f(n)$, on étudie le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$
 - si f est croissante alors la suite (u_n) est croissante
 - si f est décroissante alors la suite (u_n) est décroissante
- Méthodes algébriques** :
 - Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$; si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite est croissante
 - Si $u_n > 0$, pour tout n , comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1; si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite est croissante.
- Méthode par récurrence** : Elle s'applique à une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. On montre la propriété $P(n)$: $u_{n+1} \geq u_n$ pour montrer que la suite est croissante.

Exemples :

- $u_n = -\frac{1}{3}n + 4, \forall n \in \mathbb{N}$

C'est une suite définie par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$, comme la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction affine de coefficient directeur $-\frac{1}{3} < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

- $u_n = \frac{2^n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$

La suite est telle que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^n} = \frac{2}{3} < 1$, donc la suite est décroissante.

Définitions : suite majorée, suite minorée

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :

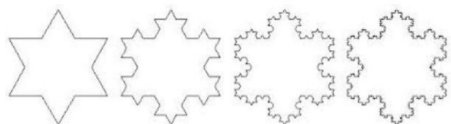
- majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$, on dit que M est un majorant de (u_n) .
- minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$, on dit que m est un minorant de (u_n) .
- bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Culture scientifique : Les fractales

Il s'agit d'un type d'objets géométriques très lié aux suites. Créé par Benoît Mandelbrot en 1974, le flocon de Von Koch en est un bel exemple.

Voici le protocole de construction :

- Une figure initiale : un triangle équilatéral.
- Une règle de transformation : Remplacez le tiers central de chaque segment par un triangle équilatéral sans base.
- Répérez cette opération sur la figure obtenue; Et, ceci, autant de fois que vous le voulez.



Ce qui est très étrange avec cette figure, c'est qu'elle a un périmètre infini et pourtant une aire finie (car comprise dans le cercle circonscrit du triangle initiale)...