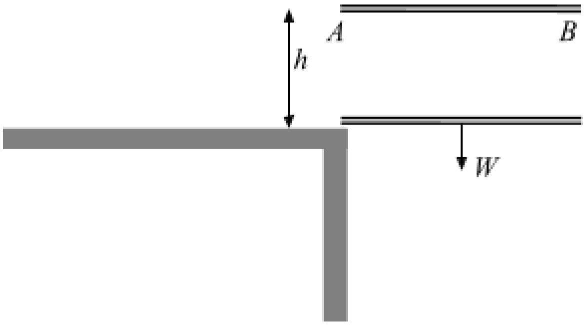
Ράβδος που συγκρούεται με ένα τραπέζι



Μια λεπτή λεία ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους $l = 0{,}1m$, αφήνεται ελεύθερη από οριζόντια θέση, που βρίσκεται σε ύψος $h = 0{,}8m$ πάνω από την επιφάνεια τραπεζιού, με τέτοιον τρόπο ώστε το ένα άκρο της ράβδου μόλις που να χτυπήσει το άκρο του τραπεζιού, όπως στο σχήμα. Η κρούση διαρκεί αμελητέο χρόνο και είναι ελαστική.

α) Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου αμέσως πριν την κρούση;

β) Ποια θα είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση;

γ) Αν η μάζα της ράβδου είναι $m = 1kg$ ποια θα είναι η τροχιακή στροφορμή της ράβδου ως προς το Α, αμέσως μετά την κρούση;

δ) Πόσο μετατοπίζεται το κέντρο μάζας της ράβδου μετά την κρούση, αν η ράβδος εκτελέσει μια πλήρη περιστροφή;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το μέσον της $I = \frac{1}{12}ml^2$, $\pi^2 = 10$ και $g = 10m/s^2$.

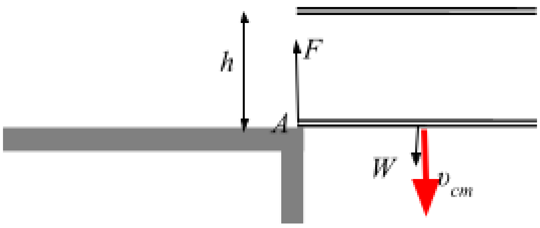
Απάντηση

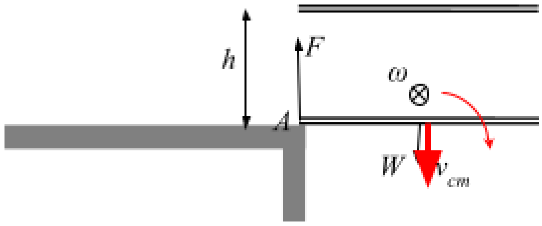
α) Στη ράβδο ασκείται μόνο το βάρος στο κέντρο μάζας της, δηλαδή στο μέσον της.
Επειδή $\Sigma F = W \neq 0$ και $\Sigma\tau_{(cm)} = 0$ η ράβδος εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση (ελεύθερη πτώση).

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη μεταφορική κίνηση

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 - 0 = mgh \Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \sqrt{2gh} \Leftrightarrow \upsilon_{cm} = 4m/s$$

β) Στην πολύ μικρή διάρκεια της κρούσης, μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα η μεταβολή στη στροφορμή της ράβδου, λόγω της ροπής του βάρους. Επίσης η ροπή της αντίδρασης F που δέχεται η ράβδος από την κόχη του τραπεζιού είναι μηδενική ως προς το Α. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης στροφορμής της ράβδου, ως προς το Α:





$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Leftrightarrow \vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\tau\rho o\chi} + \vec{L}_{spin,\mu\varepsilon\tau\alpha}$$

$$\Leftrightarrow m\upsilon_{cm}\frac{l}{2} = mv_{cm}\frac{l}{2} + I_{cm}\omega \Leftrightarrow m\upsilon_{cm}\frac{l}{2} = mv_{cm}\frac{l}{2} + \frac{1}{12}ml^2\omega$$

$$\Leftrightarrow \upsilon_{cm} = v_{cm} + \frac{l}{6}\omega \Leftrightarrow v_{cm} = 4 - \frac{1}{60}\omega \ \ (1)$$

Η κρούση είναι ελαστική άρα ισχύει η αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας:

$$E_{\mu\eta\chi,\pi\rho\iota\nu} = E_{\mu\eta\chi,\mu\varepsilon\tau\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow m\upsilon_{cm}^2 = mv_{cm}^2 + \frac{1}{12}ml^2\omega^2$$

$$\Leftrightarrow \upsilon_{cm}^2 = v_{cm}^2 + \frac{l^2}{12}\omega^2 \ \Leftrightarrow v_{cm}^2 = 16 - \frac{1}{1200}\omega^2 \ \ (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των *(1)* και *(2)*

Η *(2)* με τη βοήθεια της *(1)* δίνει:

$$\left(4 - \frac{1}{60}\omega\right)^2 = 16 - \frac{1}{1200}\omega^2 \Leftrightarrow 16 - \frac{8}{60}\omega + \frac{1}{3600}\omega^2 = 16 - \frac{1}{1200}\omega^2$$

$$\Leftrightarrow 4\omega^2 - 480\omega = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = 0 \ (\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota) \ \acute{\eta} \ \omega = 120 rad/s$$

γ) Από την *(1)* έχουμε

$$v_{cm} = 4 - \frac{1}{60}.120 = 4 - 2 = 2m/s$$

οπότε $L_{A(\tau\rho o\chi)} = mv_{cm}\frac{l}{2} = 1.2.0,05 = 0,1\frac{kg.m^2}{s}$

δ) Η κίνηση της ράβδου μετά την κρούση είναι σύνθετη:

- Το κέντρο μάζας εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα κάτω, αφού $\Sigma F = W$.
- Στροφική περί οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 120 rad/s$, αφού $\Sigma\tau_{cm} = 0$.

Για μια πλήρη στροφή χρειάζεται χρόνο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{60}s$

Το κέντρο μάζας μετατοπίζεται κατά

$$\Delta\psi = \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 = \frac{10\cdot 10}{2\cdot 3600} = \frac{100}{7200} \approx 0,014m$$

.

Σχόλια

1. Θεωρήσαμε λεία ράβδο ώστε τη στιγμή της κρούσης η δύναμη επαφής με το τραπέζι να είναι κατακόρυφη όπως στο σχήμα. Έτσι εξασφαλίζεται ότι το κέντρο μάζας θα έχει μετά την κρούση $\upsilon_{cm,x} = 0$, δηλαδή δε θα έχει οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας.

2. Ενώ η τροχιακή στροφορμή της ράβδου ως προς A μετά την κρούση, μεταβάλλεται με ρυθμό

$$\frac{dL_{A,\tau\rho o\chi}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(m\upsilon_{cm}\frac{l}{2}\right)=m\frac{l}{2}\cdot\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}=mg\frac{l}{2}=10\cdot 0,05=0,5kgm^2/s^2$$

η ιδιοστροφορμή μένει σταθερή αφού $\frac{dL_{A,spin}}{dt}=\Sigma\tau_{cm}=0$.

Ανδρέας Ριζόπουλος