

**Concours ESIGETEL
Physique 2**

**- Session Mai/Juin 2000
Mécanique – thermodynamique**

Série MP

1^{ère} partie : Etude d'un skieur :

$$1. \lambda = \frac{[F]}{[V]} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1} \Rightarrow \lambda \text{ en kg.s}^{-1}.$$

2. projection du PFD sur Oy : $0 = N - mg \cos \alpha$
condition de glissement $T = f N$

$$N = mg \cos \alpha$$

$$T = f mg \cos \alpha$$

3. Projection du PFD sur Ox : $m \frac{dv}{dt} = -\lambda v - T + mg \sin \alpha$

de solution $v = A e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{mg}{\lambda} (\sin \alpha - f \cos \alpha)$ avec $\tau = \frac{m}{\lambda}$

C.I : $v(0) = 0 \Rightarrow A + v_l = 0$ en posant $v_l = \frac{mg}{\lambda} (\sin \alpha - f \cos \alpha)$

$$\Rightarrow v = v_l (1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

4. Quand $t \rightarrow \infty$ $v \rightarrow v_l$ AN : $v_l = \frac{800 \sqrt{2}}{1.2} (1 - 0.9) = 400.0.1.1.4 = 56 \text{ m.s}^{-1}$

5. $\frac{v_l}{2} - v_l = v_l (1 - e^{\frac{-t_1}{\tau}}) \Rightarrow t_1 = \tau \ln(2)$; $\tau = \frac{m}{\lambda} = 80 \text{ s} \Rightarrow t_1 = 80.0.7 = 56 \text{ s}$

6. $\Delta E_c = E_c(t_1) - 0 = \frac{1}{2} m v_l^2$; $\Delta E_p = -mg x(t_1) \sin \alpha$

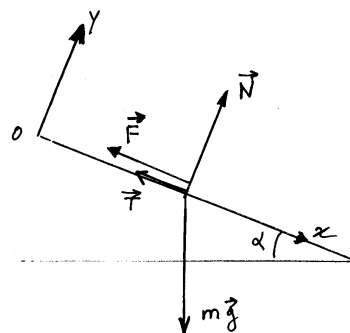
$$\frac{dx}{dt} = v_l (1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \Rightarrow x(t_1) = \int_0^{t_1} v_l (1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) dt = v_l t_1 - \frac{\tau v_l}{2} \text{ avec } t_1 = \tau \ln(2) \text{ on}$$

obtient $x(t_1) = v_l t_1 \left(1 - \frac{1}{2 \ln(2)}\right)$ et $\Delta E_p = -mg v_l t_1 \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{2 \ln(2)}\right)$

7. $E_c(t_1) + E_p(t_1) = E_c(0) + E_p(0) + W_F + W_T$

$$W_T = -f mg x(t_1) \cos \alpha$$

$$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2} m v_l^2 - mg v_l t_1 \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{2 \ln(2)}\right) + f mg \cos \alpha v_l t_1 \left(1 - \frac{1}{2 \ln(2)}\right)$$



$$\text{soit } W_F = \frac{1}{8} m v_l^2 - mg v_l t_1 \left(1 - \frac{1}{2 \ln(2)} \right) (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

$$\text{Calcul direct de } W_F : W_F = \int_0^{t_1} -\lambda \vec{v} \cdot \vec{v} dt = -\lambda \int_0^{t_1} v_l^2 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})^2 dt$$

$$W_F = -\lambda v_l^2 \int_0^{t_1} (1 + e^{-\frac{2t}{\tau}} - 2 e^{-\frac{t}{\tau}}) dt = -\lambda v_l^2 t_1 + \frac{\lambda \tau}{2} v_l^2 [e^{-\frac{2t_1}{\tau}} - 1] - 2\lambda \tau v_l^2 [e^{-\frac{t_1}{\tau}} - 1]$$

$$e^{-\frac{2t_1}{\tau}} = \frac{1}{4} ; e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{1}{2} \Rightarrow [e^{-\frac{t_1}{\tau}} - 1] = -\frac{1}{2} \text{ et } +\frac{\lambda \tau}{2} v_l^2 e^{-\frac{2t_1}{\tau}} = \frac{\lambda \tau}{8} v_l^2 = \frac{m}{8} v_l^2 \text{ car } m = \lambda \tau$$

$$\lambda v_l^2 t_1 = \lambda v_l t_1 \frac{mg}{\lambda} (\sin \alpha - f \cos \alpha) = mg v_l t_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

$$\lambda \tau v_l^2 = \lambda \tau v_l \frac{mg}{\lambda} (\sin \alpha - f \cos \alpha) = \frac{t_1 v_l mg}{\ln(2)} (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

En reportant toutes ces expressions dans l'expression précédente de W_F on retrouve l'équation obtenue dans la première partie de la question 7.

8. Nouvelle origines de temps et d'espace à $t' = 0$, $x' = 0$ et $v = \frac{v_l}{2}$

$$\text{PFD : } m \frac{dv}{dt} = -10 f mg \cos \alpha + mg \sin \alpha \text{ soit } \frac{dv}{dt} = -g (10 f \cos \alpha - \sin \alpha) = \text{cste} = -a$$

$$\Rightarrow v = -a t' + \text{cste} = -a t' + \frac{v_l}{2} \Rightarrow x' = -\frac{1}{2} a t'^2 + \frac{v_l}{2} t'$$

$$\text{C.I. : pour } t' = t_2 \quad v = 0 \Rightarrow x'(t_2) = \frac{v_l^2}{8a}$$

$$\text{A.N. : } a = g (10 f \cos \alpha - \sin \alpha) = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} (9 - 1) = 40 \sqrt{2} = 56 \text{ m.}$$

2^{ème} partie : Lancement d'un satellite :

1. Préliminaire :

1.a. cours . forme locale du théorème de Gauss. Champs Newtoniens.

1.b. cours. $V = - \text{grad } \vec{g}$

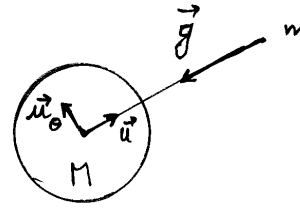
$$\vec{g} = -4\pi G \frac{\rho R^3}{3r^2} \vec{u} \quad (r > R) \quad V = -\frac{4\pi G \rho R^3}{3r}$$

$$\vec{g} = -4\pi G \frac{\rho r}{3} \vec{u} \quad (r < R) \quad V = \frac{4\pi G \rho}{2} \left(\frac{r^2}{2} - R^2 \right)$$

1.c. symétrie sphérique.

2. Etude du mouvement du satellite**2.a.** théorème du moment cinétique : force centrale.**2.b.** cours. $C = r_0 v_0 = (R + h) v_0 = r^2 \dot{\theta}$
avec $r_0 = r$ ($t=0$)

2.c. $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{C} \frac{d\theta}{dt}$



$$\text{PFD} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{GM}{r^2} \vec{u} \Rightarrow d\vec{v} = - \frac{GM}{C} \vec{u} \frac{d\theta}{dt} dt$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = - \dot{\theta} \vec{u} \Rightarrow d\vec{v} = \frac{GM}{C} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} dt \Rightarrow d\vec{v} = \frac{GM}{C} d\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{GM}{C} (\vec{u}_\theta + \vec{e})$$

$$\text{A } t=0 \quad \vec{u}_\theta = \vec{v}_0 ; \quad \vec{v} \cdot \vec{u}_\theta = v_0 = \frac{GM}{C} (1 + \vec{e} \cdot \vec{u}_\theta) \Rightarrow v_0 = \frac{GM}{C} (1 + e)$$

$$\text{Soit } e = \frac{C v_0}{GM} - 1$$

$$\text{A un instant } t \text{ quelconque : } \vec{v} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{GM}{C} (1 + \vec{e} \cdot \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \end{pmatrix} \text{ soit en projection sur } \vec{u}_\theta \quad r \dot{\theta} = \frac{C}{r} = \frac{GM}{C} (1 + \vec{e} \cdot \vec{u}_\theta)$$

$$\text{avec } \vec{e} \cdot \vec{u}_\theta = e \cos(\theta - \theta_0) \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{GM}{C^2} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)]$$

$$\text{posons } \frac{1}{p} = \frac{GM}{C^2} \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

$$\text{calcul de } \theta_0 : \text{ A } t=0 \quad \frac{p}{r_0} = 1 + e \cos \theta_0 = \frac{C^2}{GM r_0} = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM r_0} = \frac{r_0 v_0^2}{GM} = \frac{C v_0}{GM}$$

$$\text{soit } \frac{C v_0}{GM} - 1 = e \cos \theta_0 \quad \text{or} \quad e = \frac{C v_0}{GM} - 1 \quad \text{donc } e = e \cos \theta_0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \text{ ou } \pi$$

$$\text{3.a. vitesse de libération } e = 1 \Rightarrow v_l = \frac{2GM}{C} \Rightarrow v_l C = 2GM = (R + h) v_l^2$$

$$\text{soit } v_l = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \quad \text{La trajectoire est parabolique.}$$

$$\text{Trajectoire circulaire d'altitude } h : (e = 0) v_c = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

$$\text{3.b. } E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r} \quad \text{avec } r = R + h \text{ (position initiale)}$$

$$r v_0 = C \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} \left[1 - \frac{2 G M r}{C^2} \right]$$

$$\text{Or à } t = 0 : \theta = 0 \text{ et } \theta_0 = 0 \text{ (ou } \pi) \quad r = \frac{p}{1+e} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} \left[1 - \frac{2 G M}{C v_0} \right]$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} \left[1 - \frac{2}{1+e} \right] \quad \text{car } 1 + e = \frac{C v_0}{G M} \quad \text{or } p = \frac{C^2}{G M} \Rightarrow$$

$$\frac{C^2}{r^2} = \frac{(1+e)^2 C^2}{p^2} = \frac{(1+e)^2 C^2 G^2 M^2}{C^4} \Rightarrow E_m = - \frac{1}{2} m \frac{(1+e)^2 G^2 M^2}{C^2} \frac{1-e}{1+e}$$

$$\text{Soit } E_m = - \frac{1}{2} m \frac{G^2 M^2 (1-e^2)}{C^2}$$

$E_m < 0$ soit $0 < e < 1$ trajectoire elliptique

$E_m = 0$ soit $e = 1$ trajectoire parabolique

$E_m > 0$ soit $e > 1$ trajectoire hyperbolique

$$3.c. \quad 1 - e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{et } p = \frac{C^2}{G M} = \frac{b^2}{a}$$

$$E_m = - \frac{G M m}{2 a}$$

D'où en reportant dans l'expression de E_m : $E_m = - \frac{G M m}{2 a}$

4.a. $v_0 > v_c$; apogée v_A , r_A . $v_0 (c - a) = v_A (c + a)$ soit $v_0 (e - 1) = v_A (e + 1)$

$$e - 1 = \frac{C v_0}{G M} - 2 \quad ; \quad e + 1 = \frac{C v_0}{G M} \Rightarrow v_A = v_0 \frac{C v_0 - 2 G M}{C v_0} = v_0 \frac{[(R+h)v_0^2 - 2 G M]}{(R+h)v_0^2}$$

$$r_A = \frac{p}{1-e} = \frac{C^2}{G M} \frac{1}{2 - \frac{C v_0}{G M}} = \frac{C^2}{2 G M - C v_0} = \frac{[(R+h)^2 v_0^2]}{2 G M - (R+h) v_0^2}$$

4.b. $v_c = \sqrt{\frac{G M}{R+h}}$ (défini en 3.a) $v_{cA} = \sqrt{\frac{G M}{r_A}}$ vitesse sur la trajectoire circulaire passant par l'apogée. v_A = vitesse sur la trajectoire elliptique à l'apogée.

$$\Delta v = \frac{v_{cA} - v_A}{v_{cA}}$$

$$\frac{v_A}{v_{cA}} = \frac{v_0 [(R+h)v_0^2 - 2 G M] (R+h) v_0}{(R+h) v_0^2 \sqrt{G M} \sqrt{2 G M - (R+h) v_0^2}} = \frac{-\sqrt{2 G M - (R+h) v_0^2}}{\sqrt{G M}} = -\sqrt{2 - \frac{(R+h) v_0^2}{G M}}$$

$$\frac{v_A}{v_{cA}} = -\sqrt{2 - \frac{v_0^2}{v_c^2}} \Rightarrow \Delta v = 1 + \sqrt{2 - \frac{v_0^2}{v_c^2}}$$

3^{ème} partie : Etude du chauffage d'une station spatiale :

$$1.a. \quad \overset{\text{VJ}}{J_Q} = - \lambda \text{ grad } T$$

1.b. λ en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

1.c. $j_Q(r) 4\pi r^2 = j_Q(r + dr) 4\pi(r + dr)^2$ en régime permanent.

$$\begin{aligned} j_Q(r) &= j_Q(r + dr) \\ &= j_Q(r) + \frac{dj_Q}{dr} dr \Rightarrow \frac{dj_Q}{dr} = 0 \text{ soit } \frac{d}{dr}(j_Q(r) 4\pi r^2) = 0 \\ \Rightarrow 4\pi\lambda \frac{dT}{dr} (r^2 \frac{dT}{dr}) &= 0 \Rightarrow r^2 \frac{dT}{dr} = K \Rightarrow dT = K \frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

$$\int_{T_i}^T dT = K \int_{R_i}^r \frac{dr}{r^2} \Rightarrow T - T_i = K \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right]$$

$$\int_{T_i}^{T_e} dT = K \int_{R_i}^{R+e} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow T_e - T_i = K \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+e} \right]$$

$$\Rightarrow T - T_i = (T_e - T_i) \left(\frac{R+e}{e} \right) \left(1 - \frac{R}{r} \right)$$

1.d. $P_1 = 4\pi r^2 j_Q(r) = -\lambda 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{P_1}{4\pi} \int_{R_i}^{R+e} \frac{dr}{r^2} = -\lambda \int_{T_i}^{T_e} dT$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{4\pi} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+e} \right] = \lambda (T_i - T_e) \Rightarrow P_1 = 4\pi\lambda R \left(\frac{R+e}{e} \right) (T_i - T_e)$$

$$R_{Th} = \frac{T_i - T_e}{P_1} = \frac{e}{4\pi\lambda R(R+e)}$$

2.a. Loi de Wien $\lambda_m T_s = 2900 \mu\text{m.K}$; $\lambda_m = 0,5 \mu\text{m} \Rightarrow T_s = 5800 \text{ K}$

(Les valeurs de λ_m et de la constante de Wien n'étaient pas données dans l'énoncé ... alors que

l'on rappelle que $C = r^2 \dot{\theta}$ pour un mouvement à force centrale !)

2.b. $P_s = \sigma T^4 = 5,7 \cdot 10^{-8} (5800)^4 = 6,45 \cdot 10^7 \text{ W.m}^{-2}$

2.c. $P_s \cdot 4\pi R^2 = P_r \cdot 4\pi r^2$ et $P_2 = P_s \left(\frac{R}{r} \right)^2 \text{ S A.N. } P_2 = 6,45 \cdot 10^7 \left(\frac{7}{1500} \right)^2 = 1400 \text{ S}$

2.d. $P'_2 = 1400 \text{ S} \cos \alpha$.

2.e. $e = \frac{P_1}{P'_2} = \frac{P_1}{1400 \text{ S} \cos \alpha} \Rightarrow S = \frac{P_1}{1400 e \cos \alpha}$