Ondes sismiques - Structure interne de la Terre

(Epreuve sans calculatrice)

Les ondes sismiques peuvent être induites de façon naturelle suite à un tremblement de terre ou de façon artificielle à l'aide de charges explosives disposées sous terre. Leurs domaines d'investigations sont nombreux : localisation d'un épicentre de tremblement de terre, prospection pétrolière, mesure d'épaisseur de croûte terrestre (continentale, océanique) voire même sonder la Terre encore plus en profondeur et ce jusqu'au noyau ... sorte d'échographie de l'intérieur de la planète !

Dans ce qui suit, on étudie exclusivement les ondes sismiques de type P présentées dans le document 1.

I/ Equation d'onde satisfaite par les ondes sismiques P

L'étude sera réalisée à une dimension, sur une poutre solide, homogène, d'axe *Ox*, de section S constante et de masse volumique μ constante dont la déformation est expliquée dans le document 2.

1) En termes de dimension, à quelle grandeur peut-on assimiler le module d'Young *E* ?

Considérons au repos le système constitué d'une tranche de poutre comprise entre les abscisses x_1 et x_2.

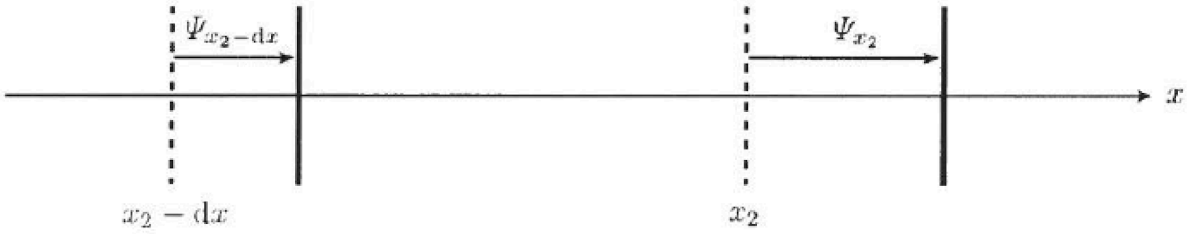
En présence de l'onde P, la section en x_1 se déplace de la quantité $\vec{\Psi}_{x_1} = \Psi(x_1, t)\vec{u}_x$ et celle en x_2 de la quantité $\vec{\Psi}_{x_2} = \Psi(x_2, t)\vec{u}_x$.

2) On souhaite exprimer la force $\vec{F}_d(x_2, t)$ que la poutre à droite de la tranche $\{x_1,x_2\}$ exerce sur la section *S* située en x_2.

Pour ce faire, on évalue l'allongement relatif d'une tranche infinitésimale de sections initialement comprises entre x_2 - *dx* et x_2.

a) Expliquer pourquoi on raisonne sur une tranche infinitésimale, et non sur la tranche $\{x_1,x_2\}$ finie.

On peut observer ci-dessous l'effet de l'onde sur la poutre. Avant son passage, la tranche considérée est située entre les pointillés et après son passage entre les traits pleins. La section initialement située en x_2 - *dx* s'est déplacée de la quantité $\vec{\Psi}_{x_2-dx} = \Psi(x_2 - de, t)\vec{u}_x$ et celle en x_2 de la quantité $\vec{\Psi}_{x_2} = \Psi(x_2, t)\vec{u}_x$.



b) Montrer, en utilisant la relation (R) du document 2, que $\vec{F}_d(x_2, t) = ES\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{x_2} \vec{u}_x$ où la dérivée partielle $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ est évaluée en x_2.

3) Justifier simplement que la force exercée sur la partie gauche de la poutre, située à l'abscisse x_1 s'écrit : $\vec{F}_g(x_1, t) = -\ ES\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{x_1} \vec{u}_x$ où la dérivée partielle $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ est évaluée en x_1.

4) On suppose que les seules forces agissant sur la tranche initialement comprise entre les abscisses x_1 et x_2 sont celles définies précédemment.
Montrer, à la limite où x_1 et x_2 sont proches et ce au point que $x_2 = x_1 + dx$, que le mouvement de la tranche satisfait : $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$ (Eq) où l'on déterminera la grandeur c.

5.a) Vérifier l'homogénéité de (Eq).

5.b) Interpréter simplement le comportement de c selon que μ augmente à E constant ou bien que E augmente à μ constant.

5.c) Pour une poutre en granite, principal constituant de la croûte terrestre, on a mesuré une densité moyenne $d = 2{,}4$ et un module d'Young de l'ordre de 60.10^9 SI. En déduire une valeur approximative de c qui est ici définie dans le cas unidimensionnel pour les ondes P.

II/ Fréquences propres de vibration d'une poutre - Cas de la Terre

On considère une poutre de longueur L dont les extrémités, situées en $x = 0$ et $x = L$, sont libres et on néglige l'influence de la pression atmosphérique.

6) Donner en justifiant les conditions aux limites sachant que les extrémités sont libres.

7) Dans le cas d'une poutre homogène, on propose pour solution de l'équation (Eq) :
$\underline{\Psi}(x, t) = \underline{\Psi}_1(x, t) + \underline{\Psi}_2(x, t)$ avec $\underline{\Psi}_1(x, t) = A.e^{j(\omega t - kx)}$ où A est réelle
et $\underline{\Psi}_2(x, t) = \underline{B}.e^{j(\omega t + kx)}$.

7.a) Montrer que $\underline{\Psi}_1(x, t) = A.e^{j(\omega t - kx)}$ et $\underline{\Psi}_2(x, t) = \underline{B}.e^{j(\omega t + kx)}$ sont solutions de l'équation (Eq).
En déduire que k est une grandeur réelle, qui sera déterminée et choisie positive par la suite.

7.b) Déterminer, en le justifiant, le sens de propagation de l'onde caractérisée par $\underline{\Psi}_1(x, t)$.

7.c) Qu'appelle-t-on vitesse de phase v_ϕ ? Donner son expression générale et montrer qu'elle ne dépend pas de la pulsation dans le cas des ondes P.

7.d) A-t-on le droit de sommer les solutions de l'équation (Eq) ? Justifier.

7.e) Justifier simplement l'utilisation des ondes $\underline{\Psi}_1(x, t)$ et $\underline{\Psi}_2(x, t)$ dans la formulation de $\underline{\Psi}(x, t)$.

7.f) Montrer que $\underline{\Psi}_1(x, t)$ ou $\underline{\Psi}_2(x, t)$ admet une périodicité spatiale notée λ que l'on déterminera en fonction de k. Comment appelle-t-on λ ?

8) Déterminer, compte tenu des conditions aux limites énoncées en introduction du II/, $\Psi(x, t)$ en notation réelle. Quelle est la condition que doit vérifier k ?
Comment nomme-t-on l'expression obtenue pour $\Psi(x, t)$?

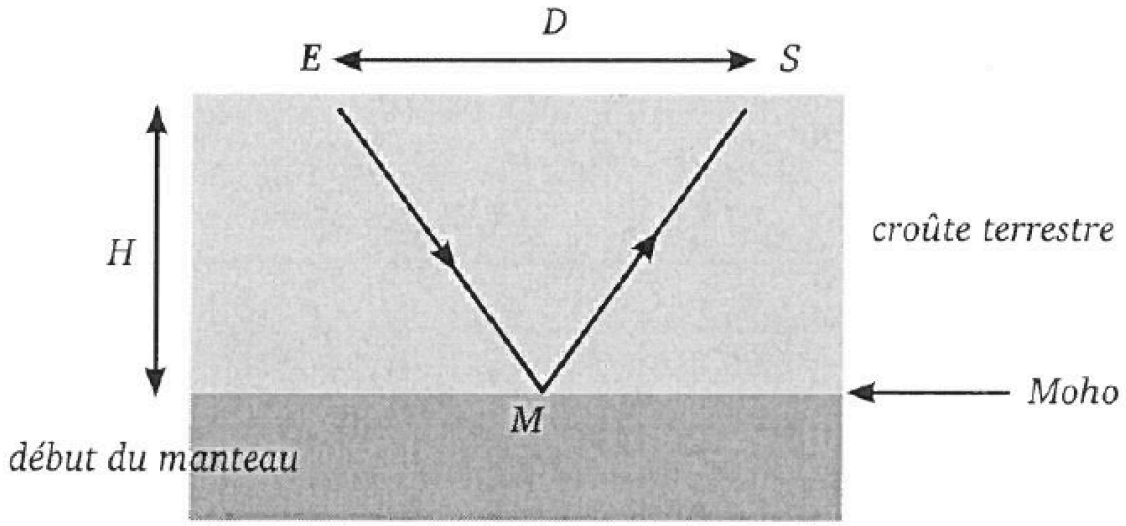
9) Déterminer la plus basse fréquence (ou fréquence fondamentale) de vibration de la poutre.
Représenter $\Psi(x, t)$ correspondant à la fréquence fondamentale en fonction de x à différents instants (on supposera $A > 0$).
Où sont disposés les nœuds et les ventres de vibration ?
Faire de même pour une autre fréquence au choix (à préciser).

10) A partir des questions précédentes, donner en justifiant la démarche, l'expression la plus générale de l'onde pouvant se propager sur la poutre ainsi que les différentes fréquences qui la composent.

11) Un séisme violent peut mettre la planète toute entière en vibration. Bien que la géométrie de la Terre diffère de celle d'une poutre, donner en extrapolant le résultat de la question II/9., une estimation littérale de la fréquence fondamentale de vibration de la Terre. On la modélise par une sphère homogène de rayon $R_T = 6{,}4.10^3$ km, de masse volumique μ et de module d'Young E constants.
En pratique, on peut enregistrer une période de l'ordre de 10^3 s, voire davantage, et ce même plusieurs semaines après le séisme. En utilisant la valeur de c trouvée à la question I/5c), conclure quant à la validité de la transposition du modèle à la Terre.

III. Mesure d'épaisseur de la croûte terrestre continentale

Suite à un séisme observé le 8 octobre 1909 en Croatie. Andrija Mohorovičić constata sur les sismogrammes enregistrés à la station d'observation l'apparition de deux ondes décalées dans le temps, tel un écho. II en a conclu que l'onde P produite au moment du séisme et se propageant dans toutes les directions à l'intérieur de la croûte terrestre depuis le foyer sismique a emprunté deux trajets différents pour parvenir jusqu'à la station : l'un direct, depuis le foyer sismique jusqu'au sismographe (onde P_d, « d » pour direct) et un second, plus long, après réflexion sur une discontinuité (onde P_m, « m » pour indiquer la réflexion de l'onde P sur le manteau). En hommage à M. Mohorovičić, la surface de séparation entre la croûte terrestre et le manteau s'appelle le « Moho ».
Depuis, on a répété ces mesures en enfouissant sous terre des charges explosives de forte puissance. A l'échelle de la croûte terrestre, le foyer sismique est alors pratiquement confondu avec l'épicentre, situé par définition sur la surface terrestre à la verticale du foyer sismique. La distance entre l'épicentre (E) et la station (S) étant faible devant le rayon terrestre, on pourra modéliser la croûte et le manteau par des tranches planes (figure ci-dessous), chaque milieu étant ici supposé homogène.



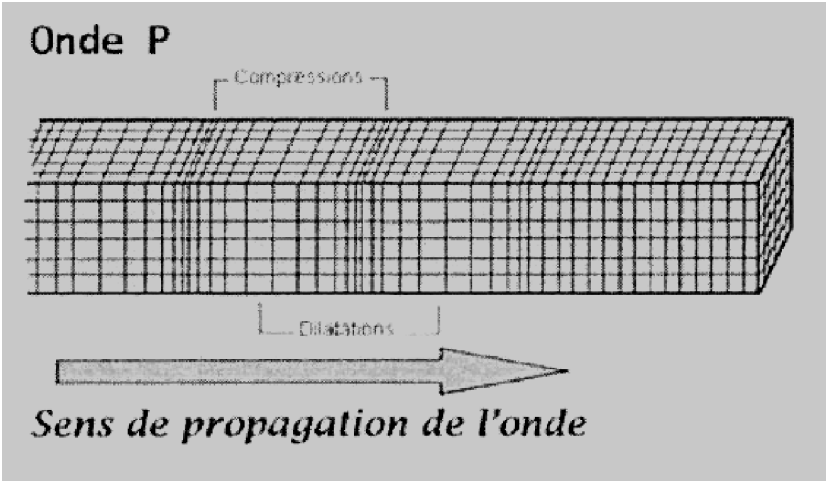
12) Etude de la réflexion sismique
On choisit pour origine des temps l'instant de la détonation des charges explosives. Soient t_1 et t_2 les instants au bout desquels on capte l'onde P_d puis l'onde P_m en S. Soient D la distance séparant l'épicentre de la station et H l'épaisseur de la croûte terrestre. On suppose que les ondes sismiques obéissent aux lois de la réflexion de Snell-Descartes de l'optique.
12.a) En déduire l'expression littérale des instants t_1 et t_2 en fonction de la célérité c_1 de l'onde P dans la croûte terrestre, de son épaisseur H ainsi que de D.
En déduire l'expression littérale de H en fonction de t_1 et t_2.

12.b) Quel est l'ordre de grandeur mesuré de H ?

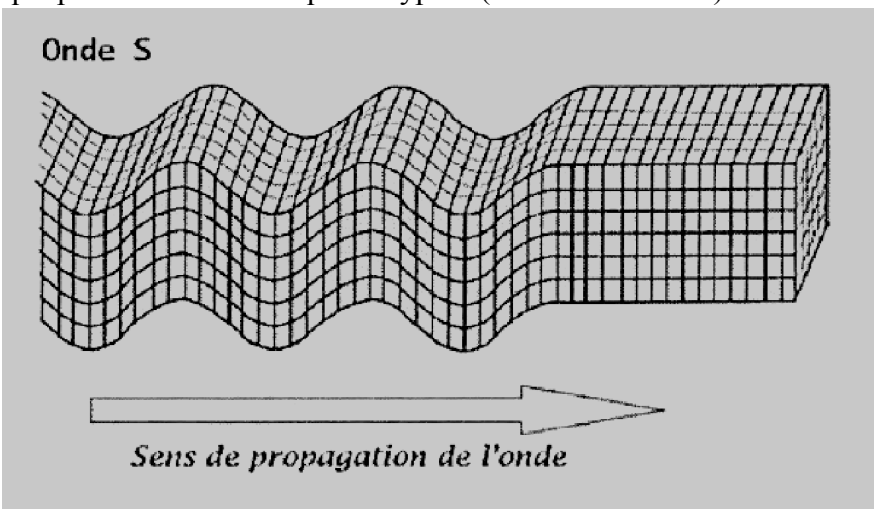
Document 1: Généralités autour de l'onde sismique

Le passage d'une onde sismique à l'intérieur d'un milieu solide peut y induire localement deux types de déformations :

- une compression ou un étirement (déformation du milieu qui se fait parallèlement au sens de propagation de l'onde) provoqué par une onde sismique qualifiée d'onde P (onde longitudinale) ;



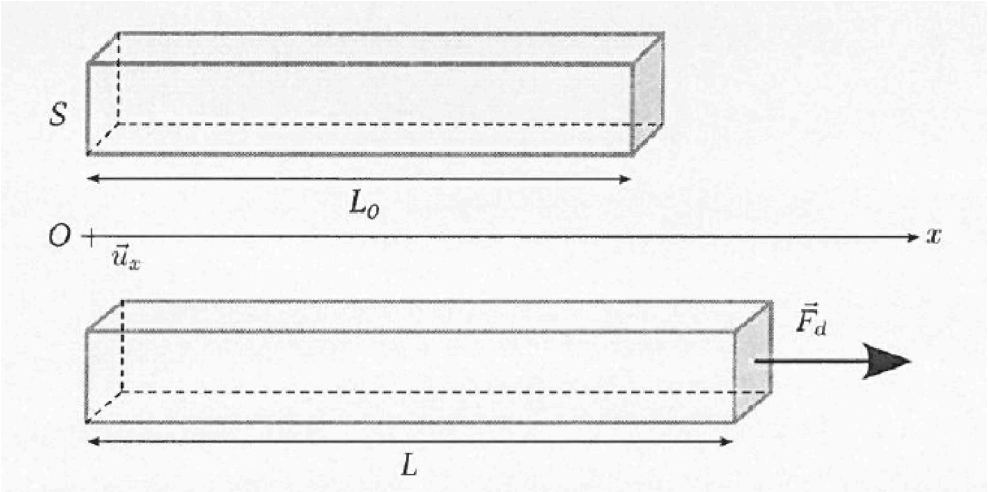
- un cisaillement (déformation du milieu se faisant perpendiculaire au sens de propagation de l'onde) provoqué par une onde sismique de type S (onde transversale).



Remarque. - Dans un milieu liquide, on ne peut constater que la propagation de l'onde P.
En effet, un liquide ne présente aucune résistance au cisaillement, contrairement à la compression et de ce fait ne permet pas la propagation de l'onde sismique S.

Document 2 : Propriété élastique d'un solide soumis à de petites déformations longitudinales

Soit une poutre, de longueur au repos L_0, fixée en son extrémité gauche. On décide de comprimer ou d'étirer la poutre (figure ci-dessous) en l'amenant jusqu'à une longueur *L :*



L'expérience montre alors que, pour de petites déformations, il faut appliquer sur la section S située à droite une force $\vec{F}_d$ telle que : $\vec{F}_d = ES\frac{L-L_0}{L_0}\vec{u}_x$ (R)

où $\frac{L-L_0}{L_0}$ est J'allongement relatif de la poutre et *E* est une constante positive appelée le module d'Young. La relation (R) est connue sous le nom de loi de Hooke.