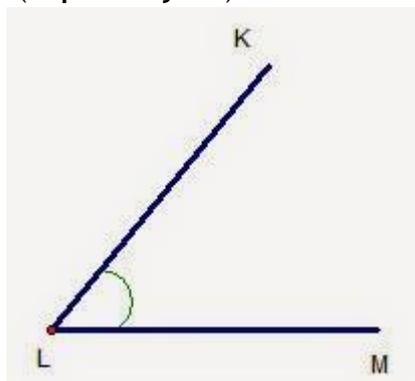


## 22. Углы и прямые

### МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**Угол** - это геометрическая фигура, образованная двумя лучами LK и LM (стороны угла), исходящими из одной точки L (вершина угла).



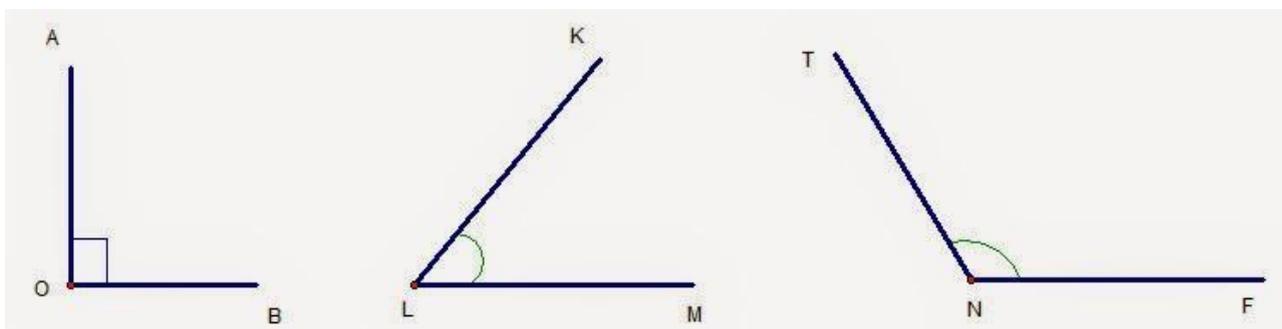
---

### Градусная мера измерения углов

Единицей измерения углов является градус. Его обозначение  $^{\circ}$ .

Угол в  $90^{\circ}$  называется **прямым** ( $\angle AOB$ ); угол, меньший, чем  $90^{\circ}$ , называется **острым** ( $\angle KLM$ ); угол, больший, чем  $90^{\circ}$ , называется **тупым** ( $\angle TNF$ ).

**Развернутый угол** равен  $180^{\circ}$ .



### Радианная мера измерения углов

Радианная мера угла - это величина угла, выраженная в радианах.

Радианная мера угла в  $1^{\circ}$  равна  $\pi:180^{\circ}$ .

**Для перевода градусов в радианы, следует число градусов умножить на пи и разделить на  $180^{\circ}$ .**

*Пример:*  $45^{\circ} = 45^{\circ} * \pi : 180^{\circ} = \pi/4 \text{ рад}$ .

Градусная мера угла в 1 радиан равна  $180^{\circ} : \pi$ .

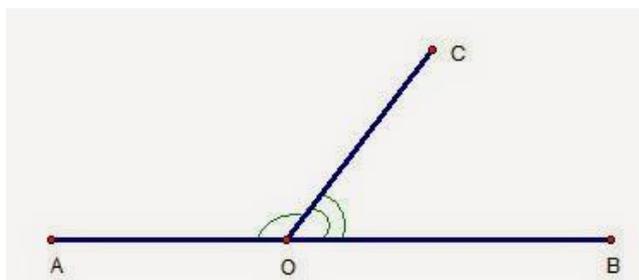
**Для перевода радиан в градусы, следует число радиан умножить на  $180^{\circ}$  и разделить на пи.**

*Пример:*  $\pi/3 \text{ рад} = \pi/3 * 180 : \pi = 60^{\circ}$ .

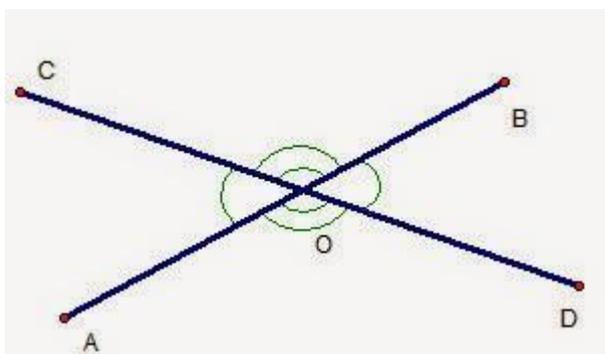
---

### Смежные и вертикальные углы

**Смежные углы** - это два угла с общей вершиной, одна из сторон которых — общая, а оставшиеся стороны лежат на одной прямой (не совпадая). Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .



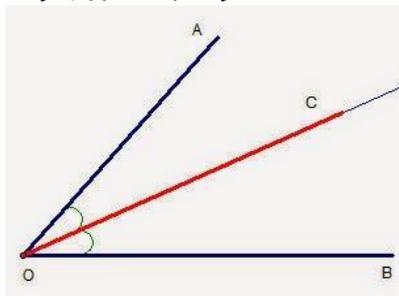
**Вертикальные углы** - это два угла с общей вершиной, у которых стороны одного являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны.



---

### Биссектриса угла

**Биссектрисой угла** называется луч, делящий угол пополам.



Биссектрисы вертикальных углов являются продолжениями одна другой.

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

**Свойство биссектрисы угла:** каждая точка биссектрисы угла находится на одинаковом расстоянии от сторон этого угла.

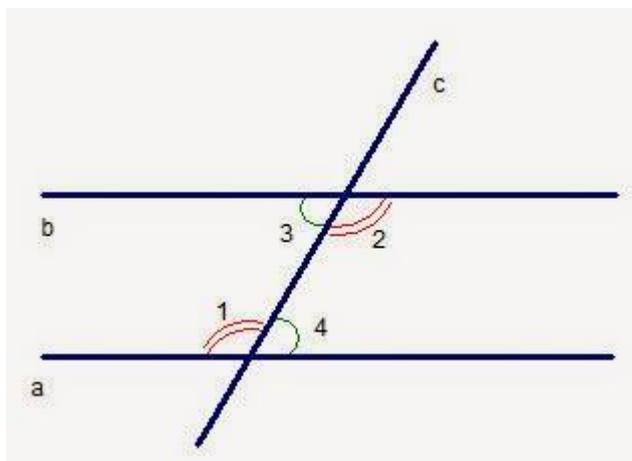
---

### Углы при параллельных прямых

Прямая, пересекающая две заданные прямые, называется секущей этих прямых.

Углы, лежащие между прямыми и по одну сторону секущей, называются **внутренними односторонними углами**.

Сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых равна  $180^\circ$ :  $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ ,  $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ .

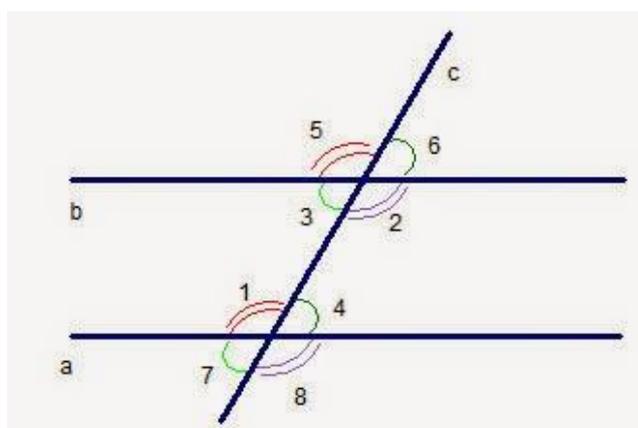


Углы, лежащие между прямыми и по разные стороны от секущей, называются **внутренними накрест лежащими углами**.

Внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых равны:  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 3 = \angle 4$ .

Углы, лежащие по одну сторону секущей, но один из них лежит между заданными прямыми, а другой не лежит между ними, называются **соответствующими**.

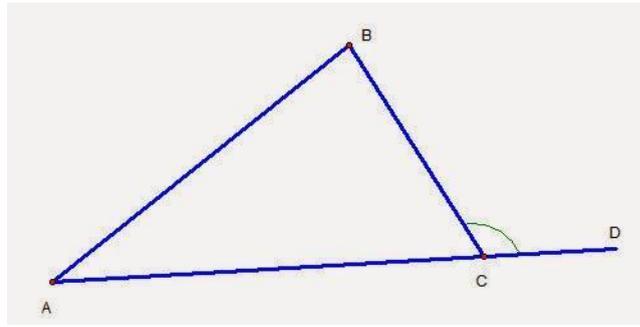
Соответствующие углы при параллельных прямых равны:  $\angle 1 = \angle 5$ ,  $\angle 4 = \angle 6$ ,  $\angle 7 = \angle 3$ ,  $\angle 8 = \angle 2$ .



---

### Внешний угол треугольника

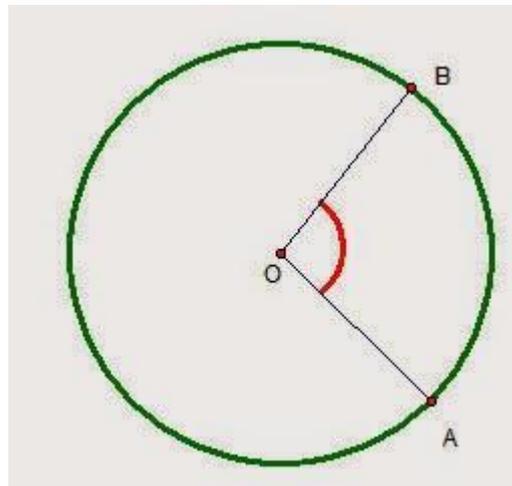
**Внешний угол треугольника** при данной вершине — это угол, смежный с внутренним углом треугольника при этой вершине.  $\angle BCD$  - внешний угол треугольника  $ABC$ .



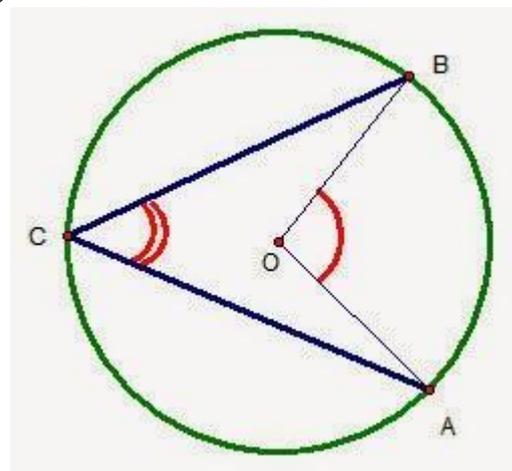
**Внешний угол треугольника** равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.  
 $\angle BCD = \angle ABC + \angle BAC$ .

### Центральный и вписанный углы

**Центральный угол** — угол с вершиной в центре окружности. Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую опирается.  $\angle BOA = \text{дуге } BA$ .



**Вписанный угол** — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.  $\angle BCA = 0,5 \angle BOA$ .



Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую опирается.

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

---

## УПРАЖНЕНИЯ

---

1. а) Дан острый угол. Каким углом будет смежный с ним угол?  
б) Дан тупой угол. Каким будет смежный с ним угол?

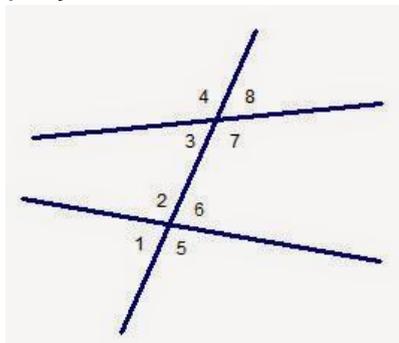
Решение:

а) угол будет тупым, т.к. острый угол меньше  $90^\circ$ , следовательно если из  $180^\circ$  вычесть угол меньший  $90$ , получим угол, градусная мера которого больше  $90^\circ$ .  
Ответ: тупой

---

2. Запишите:

- а) внутренние односторонние углы;  
б) внутренние накрест лежащие углы.



Решение:

а) Внутренними односторонними углами при двух прямых и секущей являются  $\angle 2$  и  $\angle 3$ ,  $\angle 6$  и  $\angle 7$ .

Ответ:  $\angle 2$  и  $\angle 3$ ,  $\angle 6$  и  $\angle 7$ .

---

3. а) На какой угол повернется минутная стрелка в течении 20 минут?  
б) На какой угол повернется часовая стрелка в течении 40 минут?

Решение:

а) при повороте минутной стрелки на 20 минут она повернется на угол  $360:60*20=120^\circ$ , а это тупой угол.

Ответ:  $120^\circ$ , на тупой гол.

---

4. а) Найдите величины смежных углов, если один из них на  $30^\circ$  больше другого.  
б) Найдите величины смежных углов, если их разность  $10^\circ$ .

Решение:

а) Сумма смежных углов  $180^\circ$ .

1)  $180-30=150^\circ$  - если углы равны

2)  $150:2=75^\circ$  - меньший угол

3)  $75+30=105^\circ$  - больший угол

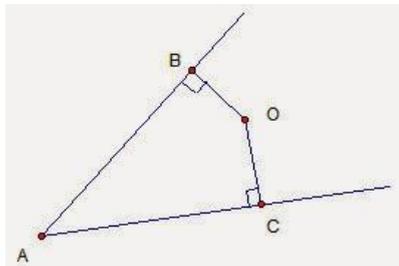
Ответ:  $75^\circ$ ,  $105^\circ$ .

---

5. а) Из точки, расположенной внутри угла, равного  $36^\circ$ , проведены перпендикуляры к сторонам угла. Найдите угол между перпендикулярами.

б) Из точки, расположенной вне угла, равного  $48^\circ$ , проведены перпендикуляры к сторонам угла. Найдите угол между перпендикулярами.

а)



Дано:  $\angle BAC = 36^\circ$

$OB \perp AB$ ,  $OC \perp AC$

Найти:  $\angle BOC$

Решение:

1)  $ABOC$  - четырехугольник. Сумма углов четырехугольника  $360^\circ$ .

2)  $\angle ABO = 90^\circ$ , т.к.  $OB$  перпендикулярен  $AB$ ;  $\angle ACO = 90^\circ$ , т.к.  $OC$  перпендикулярен  $AC$ .

3)  $\angle BOC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 36^\circ = 144^\circ$

Ответ:  $144^\circ$

6. Найдите  $x$ :

а)  $60^\circ = x$  рад;  $80^\circ = x$  рад;  $x^\circ = 2\pi$  рад;  $x^\circ = \pi:4$  рад.

б)  $30^\circ = x$  рад;  $110^\circ = x$  рад;  $x^\circ = 4\pi$  рад;  $x^\circ = \pi:3$  рад.

Решение:

а)  $60^\circ = \pi \cdot 60^\circ : 180^\circ = \pi/3$  радиан

$80^\circ = \pi \cdot 80^\circ : 180^\circ = 4\pi/9$  радиан

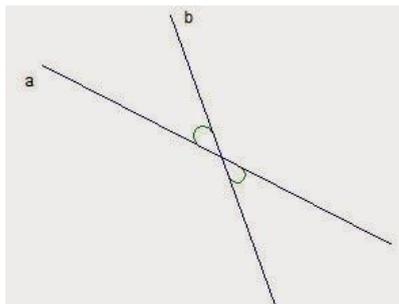
$2\pi$  радиан =  $2\pi \cdot 180^\circ : \pi = 360^\circ$

$\pi/4$  радиан =  $\pi/4 \cdot 180^\circ : \pi = 45^\circ$

7. а) При пересечении двух прямых образовались четыре угла. Сумма двух из них равна 80. Найдите величину каждого угла.

б) При пересечении двух прямых образовались четыре угла. Разность двух из них равна 80. Найдите величину каждого угла.

а)



Дано:

$a, b$  - пересекающиеся прямые

$\angle 1 + \angle 2 = 80^\circ$  Найдите:  
 $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$

Решение:

Так как сумма двух углов равна  $80^\circ$ , то эти углы не могут быть смежными, а следовательно они вертикальные.

Вертикальные углы равны, значит  $\angle 1 = \angle 2 = 80^\circ : 2 = 40^\circ$ .

$\angle 1$  и  $\angle 3$  - смежные, сумма смежных углов  $180^\circ$  и  $\angle 3 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ .

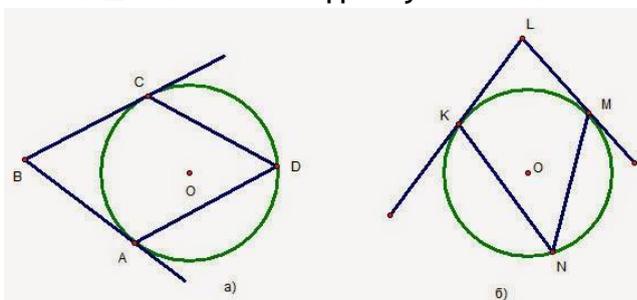
$\angle 2$  и  $\angle 4$  - смежные, сумма смежных углов  $180^\circ$  и  $\angle 4 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ .

Ответ:  $40^\circ, 40^\circ, 140^\circ, 140^\circ$ .

---

8. а) А и С - точки касания.  $\angle CDA = 40^\circ$ . Найдите угол ABC.

б) К и М - точки касания.  $\angle KLM = 50^\circ$ . Найдите угол KNM.



а)

Дано:

$w(O, OC)$

BC, AC - касательные

$\angle CDA = 40^\circ$

Найти:  $\angle ABC$

Решение:

1)  $OC \perp BC$  и  $OA \perp BA$  (радиусы, проведенные в точку касания). Следовательно,  $\angle BAO = 90^\circ$  и  $\angle BCO = 90^\circ$ .

2) Вписанный угол CDA и центральный угол COA опираются на одну дугу AC, следовательно  $\angle COA = 2 \angle CDA = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$ .

3) Сумма углов четырехугольника ABCO равна  $360^\circ$ .  $\angle ABC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ .

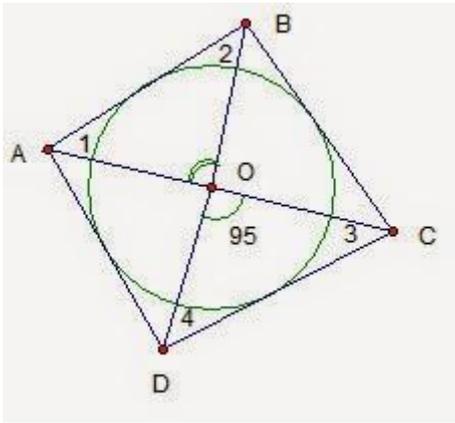
Ответ:  $100^\circ$ .

---

9. а) Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром в точке O. Найдите угол AOB, если угол COD равен  $95^\circ$ .

б) Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром в точке O. Найдите угол BOC, если угол AOD равен  $108^\circ$ .

а)



Решение:

1) Сумма углов четырехугольника  $ABCD$  равна  $360^\circ$ . Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, следовательно,  $OA, OB, OC, OD$  - биссектрисы и  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ : 2 = 180^\circ$ .

2) Сумма углов треугольника  $ABO = 180^\circ = \angle 1 + \angle 2 + \angle AOB$ . Сумма углов треугольника  $DOC = 180^\circ = \angle 4 + \angle 3 + 95^\circ$ .

Сумма углов двух треугольников  $ABO$  и  $DOC$  равна  $360^\circ$  и равна  $\angle 1 + \angle 2 + \angle AOB + \angle 3 + \angle 4 + 95^\circ$ .

$$360^\circ = (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4) + \angle AOB + 95^\circ.$$

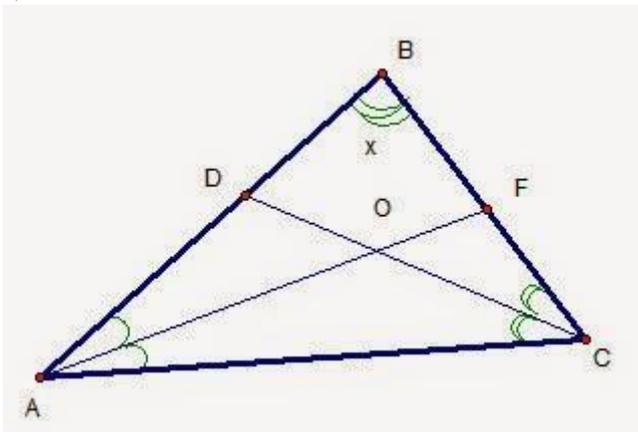
$$\angle AOB = 360^\circ - 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ.$$

Ответ:  $85^\circ$ .

10. а) В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $x$ . Найдите угол  $AOC$ , если биссектрисы  $AF$  и  $CD$  пересекаются в точке  $O$

б) Найдите угол  $B$  треугольника  $ABC$ , если угол  $AOC$  равен  $x$ , и биссектрисы углов  $A$  и  $C$  пересекаются в точке  $O$ .

а)



Решение:

1) Сумма углов треугольника  $180^\circ$ .  $\angle A + \angle C + \angle B = 180$ . Следовательно,  $\angle A + \angle C = 180^\circ - x$ .

2)  $AF$  и  $CD$  - биссектрисы углов  $A$  и  $C$ , следовательно,  $\angle BAF = \angle FAC$  и  $\angle BCD = \angle DCA$ .

Имеем:  $\angle FAC = \angle A : 2$  и  $\angle DCA = \angle C : 2$ .  $\angle FAC + \angle DCA = (\angle A + \angle C) : 2 = (180^\circ - x) : 2 = 90^\circ - x/2$ .

3)  $\angle AOC = 180^\circ - (\angle FAC + \angle DCA) = 180^\circ - 90^\circ + x/2 = 90^\circ + x/2$ .

Ответ:  $90^\circ + x/2$ .

11. а) Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника в  $x$  раз больше суммы углов выпуклого  $(n-3)$ - угольника. Найдите целое число  $x$ .

б) Сумма углов выпуклого  $2n$ -угольника в  $x$  раз больше суммы углов выпуклого

( $n-1$ ) - угольника. Найдите число  $x$ .

Решение:

а) 1) Сумма углов  $n$ -угольника:  $180(n-2)$ .

2) Сумма углов ( $n-1$ )-угольника:  $180(n-3-2)=180(n-5)$ .

3) Известно, что сумма углов  $n$ -угольника в  $x$  раз больше суммы углов ( $n-1$ )-угольника:

$$180(n-2)=180(n-5)*x,$$

$$n-2=(n-5)*x,$$

$$x=(n-2):(n-5),$$

$$x=((n-5)+3):(n-5)=1+3:(n-5).$$

$3:(n-5)$  - целое число, это возможно, если знаменатель будет равен 1:

$$n-5=1,$$

$$n=6.$$

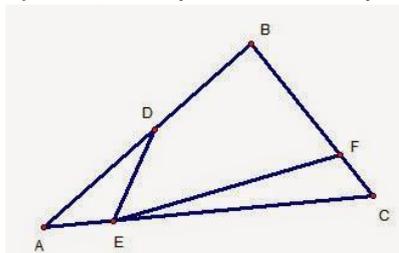
4) Найдем  $x$ :

$$x=(6-2):(6-5)=4.$$

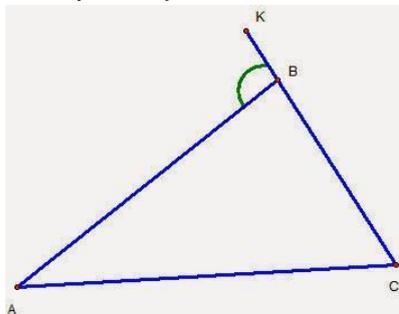
Ответ: 4.

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Запишите все пары смежных углов, изображенных на рисунке.



2. Сумме каких углов треугольника равен угол АВК?

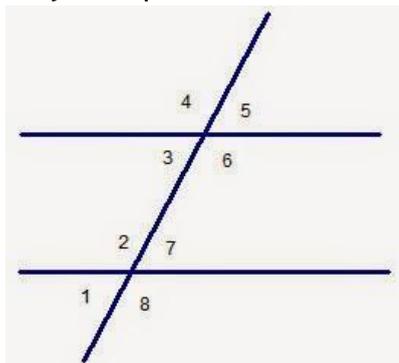


3. Один из смежных углов в 5 раз больше другого. Найдите эти углы.

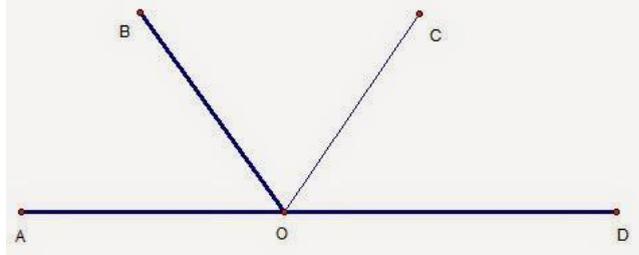
4. Даны две параллельные прямые и секущая. Найдите:

а) величину угла 2, если угол 6 равен  $110^\circ$ ;

б) найдите величину угла 8, если угол 5 равен  $70^\circ$ .



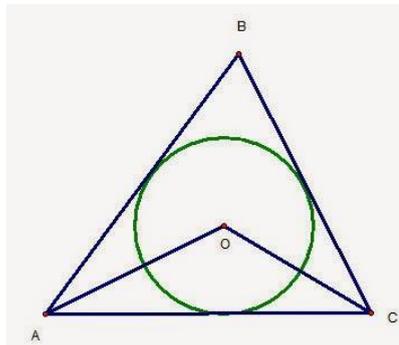
5. Сумма углов  $\text{AOC}$  и  $\text{BOD}$  равна  $242^\circ$ .  $\text{OC}$  - биссектриса угла  $\text{BOD}$ . Найдите угол  $\text{BOC}$ .



6. Найдите  $x$ :

а)  $10^\circ = x \text{ рад}$ ;  $25^\circ = x \text{ рад}$ ;  $x^\circ = 0,5\pi \text{ рад}$ ;  $x^\circ = 2,4\pi \text{ рад}$ .

7. Найдите угол  $\text{ABC}$ , если  $\text{O}$  - центр вписанной в треугольник  $\text{ABC}$  окружности и угол  $\text{AOC}$  равен  $108^\circ$ .



8. В выпуклом четырехугольнике  $\text{ABCD}$   $\angle \text{BCA} = \angle \text{BDA} = 40^\circ$ ,  $\angle \text{DAB} = 85^\circ$ . Найдите  $\angle \text{ACD}$ .

9. Какое наибольшее число внутренних острых углов может иметь выпуклый многоугольник.

10. В окружности, центром которой является точка  $\text{O}$ , дуга  $\text{PN}$  равна  $68^\circ$ , дуга  $\text{LP}$  равна  $52^\circ$ .  $\text{KM}$  - касательная к окружности. Найдите угол  $\text{LKM}$ .

