

1 Corrigé de Laurent BEAU

Professeur de Sciences Physiques en Math Spé MP*

Lycée Mohamed V. CASABLANCA

N'hésitez pas à me signaler des erreurs ou à me suggérer des commentaires ou des réponses plus "élégantes". Merci.

2 Propulseur électromagnétique

Première partie

Principe et ordres de grandeurs

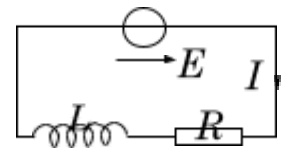
A-

A1. Le flux magnétique propre Φ à travers le circuit s'écrit : $\Phi(t) = LI(t)$ et, d'après la loi de Faraday, la force électromotrice d'induction :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{pour un circuit rigide (L constante).}$$

$$\text{A2.} \quad E = L \frac{dI}{dt} + RI \quad \text{soit} \quad \int_0^t EI(t')dt' = \int_0^t LIdI + \int_0^t RI^2(t')dt'$$

énergie délivrée par le générateur
énergie magnétique
énergie dissipée par effet Joule



On en déduit l'énergie magnétique : $E_m = \frac{1}{2} LI^2(t)$.

B-

B1. Le barreau est placé dans le champ magnétique créé par le reste du circuit. Il est donc

soumis à la résultante des forces de Laplace $\int I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$ qui met le barreau en mouvement.

B2. Le circuit de la figure 1 est équivalent au suivant :

On en déduit :

$$E + e = RI \quad \text{soit} \quad EI = RI^2 + LI \frac{dI}{dt} + I^2 \frac{dL}{dt}$$

Le premier membre de cette égalité représente la puissance délivrée par le générateur. Le premier terme du second membre est la puissance dissipée par effet Joule. La puissance fournie par le générateur en sus de celle dissipée par effet Joule est donc :

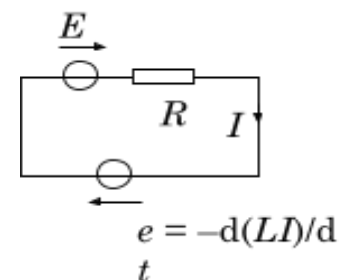
$$P_{\text{supp}} = LI \frac{dI}{dt} + I^2 \frac{dL}{dt}$$

B3. Cette puissance peut s'écrire sous la forme : $P_{\text{supp}} = \frac{dE_m}{dt} + P_{\text{méca}}$ avec

$$P_{\text{méca}} = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt}$$

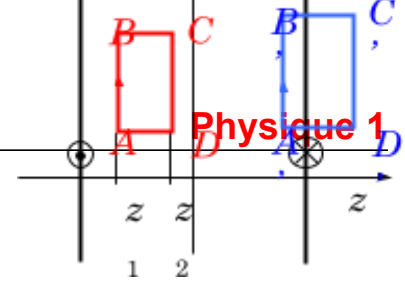
B4. Cette puissance mécanique donnée au barreau nous permet d'en déduire la force s'exerçant sur le barreau : $P_{\text{méca}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x \frac{dx}{dt}$. D'où :

$$F_x = F = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx}$$



C-

C1.



C.1.a) Tout plan $y = \text{cste}$ est un plan de symétrie laissant la distribution invariante. Donc en tout point, le champ magnétique (pseudo-vecteur) est orthogonal à ce plan ; il est donc dirigé selon (Oy) .

C.1.b) Les deux nappes de courants sont infinies dans les directions (xx') et (yy') . La norme de $\mathbf{B}$ est donc indépendante de x et y : $B = B(z)\mathbf{e}_y$.

En appliquant le théorème d'Ampère sur le contour orienté $ABCD$ (non traversé par des courants) : $B(z_1).AB + 0 - B(z_2).CD - 0 = 0$, on en déduit $B(z_1) = B(z_2)$ pour $|z_1|$ et $|z_2|$ inférieurs à $w/2$. Le champ magnétique est donc uniforme entre les plaques.

On montre de même que le champ magnétique est uniforme pour $|z| > \frac{w}{2}$. Or, à l'infini ($|z| \rightarrow +\infty$), le champ magnétique est nul car la distribution est alors « vue » comme non parcourue par des courants. En effet, dans cette situation, $w \ll |z|$ et les champs créés par

les deux distributions sont opposés. Le champ magnétique est donc nul pour $|z| > \frac{w}{2}$. Une dernière utilisation du théorème d'Ampère sur le contour orienté $A'B'C'D'$ donne :

$$B(z < w/2).A'B' = \mu_0 j_s A'B'$$

Conclusion : pour $|z| > \frac{w}{2}$: $\mathbf{B} = \vec{0}$

pour $|z| < \frac{w}{2}$: $\mathbf{B} = \mu_0 j_s \mathbf{e}_y$

C2.

C.2.a) L'intensité du courant est liée au vecteur densité de courant par la relation :

$$I = \int_0^h \mathbf{j}_s \cdot d\mathbf{y} \mathbf{e}_y \quad . \text{Donc : } j_s = \frac{I}{h}$$

Entre les rails, $\mathbf{B} = \mu_0 j_s \mathbf{e}_y = \mu_0 \frac{I}{h} \mathbf{e}_y$.

Le flux magnétique pour une longueur dx de rails vaut donc : $d\Phi = B w dx$ soit un flux magnétique linéique égal à $\frac{d\Phi}{dx} = \mu_0 \frac{w}{h} I = L' I$.

L'inductance par unité de longueur s'écrit donc : $L' = \mu_0 \frac{w}{h}$

C.2.b) A.N : $L' = 4,1.10^{-2} \text{ H.m}^{-1}$.

D- En supposant la force F constante, le théorème de l'énergie cinétique appliqué au projectile donne :

$$\frac{1}{2}mv^2 = Fd = \frac{1}{2}I^2 L' d$$

où d est la distance parcourue par le projectile quand il atteint la vitesse v . On en déduit :

$$I = \sqrt{\frac{mv^2}{L' d}}$$

A.N. : $I = 300 \text{ kA}$.

Deuxième partie
Accélération du projectile par un plasma

A-

A1. La force d'origine magnétique qui s'exerce sur cette tranche est la force de Laplace :

$$d\mathbf{F} = J d\tau \wedge \mathbf{B} = -J(x_p)B(x_p)S dx_p \mathbf{e}_x \quad \text{où } S = hw$$

A2. La résultante des forces de pression s'exerçant sur la tranche d'épaisseur dx_p située en x_p est :

$$\mathbf{F}_{\text{pression}} = [P(x_p) - P(x_p + dx_p)]S \mathbf{e}_x = -\frac{dP}{dx_p} S dx_p \mathbf{e}_x \quad \text{où } S = hw$$

A3. En tenant compte des deux forces calculées précédemment, le théorème de la résultante cinétique appliqué à la tranche étudiée de masse $dm = \rho(x_p)S dx_p$ donne :

$$\rho(x_p)S dx_p \cdot a = -\left[J(x_p)B(x_p) + \frac{dP}{dx_p} \right] S dx_p$$

$$\rho(x_p)a = -\left[J(x_p)B(x_p) + \frac{dP}{dx_p} \right]$$

soit :

A4.

A4.a) De l'expression précédente, il vient : $dP = -J(x_p)B(x_p)dx_p - \rho(x_p)adx_p$. En intégrant entre $x_p = 0$ et $x_p = l$, on obtient :

$$P(l) = P_0 - \int_0^l J(x_p)B(x_p)dx_p - \frac{M_p}{S}a$$

A4.b) Le théorème de la résultante cinétique appliqué au projectile donne : $M_0 a = (P(l) - P_0)S$. On obtient ainsi la relation demandée :

$$(M_0 + M_p)a = -S \int_0^l J(x_p)B(x_p)dx_p$$

B-

B1. Dans l'ARQP, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit : $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. Or, $\mathbf{B} = B(x_p)\mathbf{e}_y$. Il vient donc :

$$\frac{dB}{dx_p} = \mu_0 J(x_p)$$

B2. En utilisant le résultat de la question A.4.b), la force résultante exercée sur le système

$$-S \int_0^l J(x_p)B(x_p)dx_p = -\frac{S}{\mu_0} \int_{x_p=0}^{x_p=l} B(x_p)dB(x_p)$$

plasma-projectile est : , ce qui donne après intégration et en prenant $B(l) = 0$:

$$F = S \frac{B(0)^2}{2\mu_0}$$

B3. Dans la section C de la première partie, nous avons calculé $B(0) = \mu_0 \frac{I}{h}$. En remplaçant dans l'expression précédente, on trouve une force s'exerçant sur l'ensemble plasma-projectile égale à

$$\mu_0 \frac{1}{2} I^2 \frac{S}{h^2}$$

Compte tenu de $S = wh$ et $\mu_0 \frac{w}{h} = \frac{dL}{dx}$, on obtient bien $F = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx}$.

C- A.N. : Le plasma étant traversant dans le sens transversal (selon Oz) par le courant électrique,

sa résistance s'écrit : $R_p = \frac{1}{\sigma_p} \frac{w}{lh}$. On en déduit :

$$l = \frac{w}{R_p \sigma_p h} = 59 \text{ mm}$$

La masse volumique moyenne du plasma est donc :

$$\bar{\rho} = \frac{M_p}{w l h} = 3,3 \text{ kg.m}^{-3}$$

Le nombre moyen d'ions cuivre (I) par unité de volume est alors :

$$\bar{n}_{\text{Cu}} = \frac{\bar{\rho}}{M_{\text{Cu}}} N_A = 3,1 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Le nombre moyen de particules par unité de volume est alors le double (1 électron libéré par atome de cuivre) :

$$\bar{n} = 6,2 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

En supposant que le gaz ionisé se comporte localement comme un gaz parfait, sa température est :

$T = \frac{PN_A}{nR}$. En prenant comme pression, le rapport : $P = \frac{\frac{1}{2} L' I^2}{wh}$, on trouve $P = 3,5 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ et donc une température de $41 \cdot 10^3 \text{ K}$.

Troisième partie Modèle électromécanique du propulseur

A-

A1.

A.1.a) L_0 est appelée impédance de stockage car, quand l'interrupteur C est fermé, une partie de l'énergie fournie par le générateur est emmagasinée (=stockée) dans la partie inductive L_0 du circuit (le reste étant dissipé par effet Joule dans la partie résistive).

A.1.b) Une capacité n'assurerait pas la continuité du courant. Or, ici on désire atteindre à $t = 0$, le courant I_0 . Seule une inductance permet, en assurant la continuité du courant dans la branche où elle est placée, de choisir l'intensité initiale désirée.

A.1.c) Rôle de la diode : quand c est fermé, la diode joue le rôle d'un interrupteur ouvert et empêche le courant de circuler dans la partie mobile du circuit. Quand C est ouvert, l'énergie emmagasinée dans L_0 est délivrée au circuit mobile.

A2.

A.2.a) Le flux magnétique propre du circuit est : $\Phi = (L_0 + xL')I$ soit une f.é.m induite :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -(L_0 + xL')\frac{dI}{dt} - L'I\frac{dx}{dt}$$

L'équation électrique du circuit $(R_0 + R_p + xR')I - e = 0$ devient donc :

$$(R_0 + R_p + xR')I + (L_0 + xL')\frac{dI}{dt} + L'I\frac{dx}{dt} = 0 \quad (\mathcal{E})$$

A.2.b) L'équation mécanique du mouvement du projectile est simplement le théorème de la résultante cinétique appliqué au système plasma-projectile soumis à la force F déterminée en B4 de la première partie :

$$M\ddot{x} = \frac{1}{2} L' I^2 \quad (\mathcal{M})$$

A.2.c) Les conditions initiales pour ces deux équations sont : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} I(0) = I_0 \\ L_0 \dot{I}(0) + (R_0 + R_p)I_0 = 0 \end{cases}$.

Il n'existe alors pas de solution stationnaire à ces équations puisque $I(0) \neq 0$ et $\dot{I}(0) < 0$. L'intensité du courant décroît et le barreau se met en mouvement. Le barreau n'étant pas freiné, il ne s'arrêtera pas.

B-

B1. Une inductance s'oppose à des variations brutales du courant I la traversant. Plus l'inductance est grande, plus la variation de I est lente. A la limite $L_0 \rightarrow +\infty$, $I = \text{cste}$. Donc, si L_0 est « très grande », on peut prendre $I(t) \approx I_0$ pendant la durée d'éjection du projectile.

B2. Avec l'approximation précédente, l'accélération du projectile s'écrit : $\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{L'}{M} I_0^2 = a_0 = \text{cste}$.

Sa vitesse est alors : $\dot{x}(t) = a_0 t$ et sa position : $x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$.

B3. A.N. : $\tau_0 = \sqrt{\frac{2X}{a_0}} = 1 \text{ ms}$ et $\dot{x}(\tau_0) = a_0 \tau_0 = \sqrt{2a_0 X} = 6,0 \text{ km.s}^{-1}$

C-

C1. Entre $t = 0$ et l'instant t , l'inductance de stockage a délivré au reste du circuit et au projectile l'énergie :

$$\Delta E(t) = -\frac{1}{2} L_0 (I^2(t) - I_0^2)$$

C2. En multipliant $(\mathcal{E})$ par I et en intégrant entre 0 et t , on obtient :

$$\Delta E(t) = \int_0^t (R_0 + R_p + x(t')R') I^2(t') dt' + \int_0^t x(t') L' I'(t') I(t') dt' + \int_0^t L' I'^2(t') dx$$

En multipliant $(\mathcal{M})$ par $\dot{x}$ et en intégrant entre 0 et t , il vient :

$$\int_0^t M \dot{x}(t') \ddot{x}(t') dt' - \frac{1}{2} \int_0^t L' \dot{x}(t') I^2(t') dt' = 0$$

En additionnant les deux équations précédentes et en tenant compte des conditions initiales, $\Delta E(t)$ s'écrit :

$$\Delta E(t) = \int_0^t (R_0 + R_p + x(t')R') I^2(t') dt' + \frac{1}{2} M \dot{x}^2(t) + \left[\int_0^t x(t') L' I'(t') I(t') dt' + \frac{1}{2} \int_0^t L' I'^2(t') \dot{x}(t') dt' \right]$$

Le terme entre crochets est égal à $\frac{1}{2} L' x(t) I^2(t)$. On obtient alors le résultat attendu :

$$\Delta E(t) = \underbrace{\int_0^t (R_0 + R_p + x(t')R') I^2(t') dt'}_{\text{énergie dissipée par effet Joule}} + \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{x}^2(t)}_{\text{énergie cinétique acquise par l'ensemble plasma-projectile}} + \underbrace{\frac{1}{2} L' x(t) I^2(t)}_{\text{énergie magnétique emmagasinée dans la partie inductive du reste du circuit}}$$

C3. Les deux termes d'énergie cinétique et d'énergie magnétique sont identiques et égaux à $\frac{1}{2} M a_0^2 t^2$. L'énergie dissipée par effet Joule devient dans le cadre de l'approximation des questions B1 et B2 :

$$\int_0^t \left(R_0 + R_p + \frac{1}{2} R' a_0 t'^2 \right) I_0^2 dt' = (R_0 + R_p) I_0^2 t + \frac{1}{6} R' a_0 I_0^2 t^3$$

Finalement :
$$\Delta E(t) = (R_0 + R_p) I_0^2 t + \frac{1}{6} R' a_0 I_0^2 t^3 + M a_0^2 t^2$$

C4.

C4.a) Les deux termes identiques sont égaux à $\frac{1}{2} M a_0^2 \tau_0^2 = 54 \text{ kJ}$. L'énergie dissipée par effet Joule est égale à 136 kJ.

C4.b) D'après le calcul précédent, $\Delta E(\tau_0) = 244 \text{ kJ}$. On en déduit l'intensité $I(\tau_0)$:

$$I(\tau_0) = \sqrt{I_0^2 - \frac{2\Delta E(\tau_0)}{L_0}} = 260 \text{ kA}$$

Pendant la durée de la propulsion, l'intensité du courant n'a chuté que de 13%. On peut donc considérer que les calculs des ordres de grandeurs avec l'approximation $I = \text{cste}$ sont légitimes.

C4.c) Le rendement électromagnétique η_{em} est le rapport entre l'énergie cinétique du projectile

$$\frac{1}{2} M_0 \dot{x}^2(\tau_0) \quad \text{à la date } \tau_0 \text{ et l'énergie initiale } E_0 = \frac{1}{2} L_0 I_0^2. \text{ On trouve}$$

$$\eta_{\text{em}} = 5,3\%$$

D-

D1. En posant $y(t) = \ln \frac{I_0}{I(t)}$, les équations ($\mathcal{E}$) et ($\mathcal{M}$) deviennent :

$$\dot{x}(t) = a_0 e^{-y(t)}$$

($\mathcal{M}$)

$$(R_0 + R_p + x(t)R') - (L_0 + xL')\dot{y}(t) + L'x\ddot{y}(t) = 0$$

($\mathcal{E}$)

D2. $XL' = 3 \times 0,4 \mu\text{H} = 1,2 \mu\text{H}$ ce qui est faible devant $L_0 = 22 \mu\text{H}$.

D3. Dans l'équation ($\mathcal{E}$) précédente, en négligeant xL' devant L_0 et en prenant $x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$ et $\dot{x}(t) = a_0 t$ (légitime si $y(t) \ll 1$), on obtient :

$$\ddot{y}(t) = \frac{R_0 + R_p}{L_0} + a_0 \frac{L'}{L_0} t + a_0 \frac{R'}{L_0} \frac{t^2}{2}$$

En intégrant entre 0 et t et compte tenu de $y(0) = 0$:

$$y(t) = \frac{R_0 + R_p}{L_0} t + a_0 \frac{L'}{L_0} \frac{t^2}{2} + a_0 \frac{R'}{L_0} \frac{t^3}{6}$$

D4. L'énergie cédée par l'inductance de stockage est :

$$\Delta E(t) = -\frac{1}{2} L_0 (I^2(t) - I_0^2) = \frac{1}{2} L_0 I_0^2 (1 - e^{-2y})$$

Dans l'approximation $y(t) \ll 1$:

$$\Delta E(t) = L_0 I_0^2 y(t)$$

En remplaçant $y(t)$ par l'expression trouvée dans la question précédente, on retrouve la même expression qu'à la question C.3 de cette partie car $L' I_0 = M a_0$:

$$\Delta E(t) = (R_0 + R_p) I_0^2 t + \frac{1}{6} R' a_0 I_0^2 t^3 + M a_0^2 t^2$$

* *
*