CCP PC 1 2004 Problème II

TRANSFERTS THERMIQUES DANS UN TUBE ECHANGEUR

I Transfert thermique dans un milieu homogène.

I.1 Le flux thermique se fait des zones chaudes vers les zones froides

I.2 $d\Phi = \vec{j}\ \vec{n}\, dS$

I.3 Isothermes dT = 0 donc $\vec{j}.d\vec{l} = -\lambda\ \vec{grad}\ T\ d\vec{l} = -\lambda\ dT = 0$

Les isothermes sont donc telles que jdl= 0 => j orthogonal à dl

Alors que les lignes de flux sont tangentes à dl

I.4 $\iiint \rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} dV$ = puissance stockée dans V

$\oiint \vec{j}\ \vec{n}\, dS$ = puissance échangée à travers S

$\iiint p_{th}\ dV$ = puissance produite dans V

et $\oiint \vec{j}\ \vec{n}\, dS = \iiint div\ \vec{j}\, dV$

la forme locale de l'équation précédente est donc

$$\rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} + div\vec{j} = p_{th}$$

Avec la loi de Fourier, et div(**λ**grad)=λ Δ pour un solide homogène et isotrope

ceci s'écrit : $\rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\, \Delta T = p_{th}$

I.5 $a = \frac{\lambda}{\rho\, c}$ diffusivité thermique . en $m^2 s^{-1}$

II Transfert thermique dans un tube

II.1 Régime stationnaire : T indépendant de t

Symétrie cylindrique et invariance selon Oz : T ne dépend que de r

Pas de terme de source : p_{th}=0 :

L'équation de la chaleur se réduit alors à ΔT = 0

$$\frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} = 0 \quad <=> \quad \frac{1}{r}\frac{d(r\frac{dT}{dr})}{dr} = 0 \quad => \quad r\frac{dT}{dr} = A$$

donc $\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r} => dT = A\frac{dr}{r}$ soit $T(r) - T_1 = A \ln\frac{r}{r_1}$

avec $T_2 - T_1 = A \ln\frac{r_2}{r_1}$ $\quad T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2 / r_1)} \ln\frac{r}{r_1}$

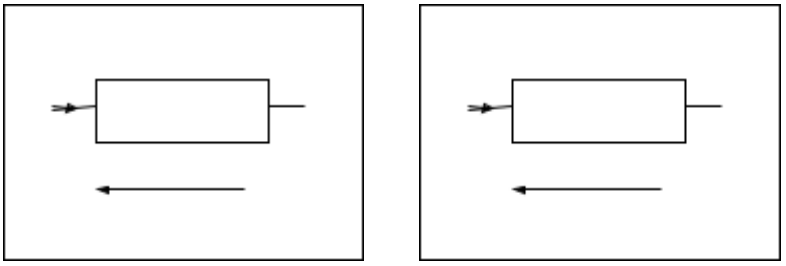
le flux thermique est $\phi = \iint \vec{j}\ \vec{n}\, ds = -\lambda \frac{dT}{dr}(2\pi r L) = -\lambda \frac{A}{r}(2\pi r L) = -2\lambda\pi A L$

$$\phi = -2\pi\lambda L \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2 / r_1)}$$

Ce flux est constant car le régime est stationnaire

II.2

$R_{th} = \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi L \lambda}$ s'exprime en KW^{-1}.



II.3

$$\Delta T = -\frac{p_{th}}{\lambda} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} = \frac{1}{r}\frac{d(r\frac{dT}{dr})}{dr} = -\frac{p_{th}}{\lambda}$$

$$\frac{d(r\frac{dT}{dr})}{dr} = -\frac{p_{th}}{\lambda} r \Rightarrow \quad r\frac{dT}{dr} = -\frac{p_{th}}{\lambda}\frac{r^2}{2} + B$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{p_{th}}{\lambda}\frac{r}{2} + \frac{B}{r} \quad \Rightarrow \quad T(r) - T_1 = \frac{p_{th}}{4\lambda}(r^2 - r_1{}^2) + B\ln\frac{r}{r_1}$$

On détermine B à l'aide deTt($r=r_2$)=T_2

$$T(r) = T_1 + \frac{p_{th}}{4\lambda}(r^2 - r_1{}^2) + [(T_2 - T_1) + \frac{p_{th}}{4\lambda}(r_2{}^2 - r_1{}^2)]\frac{\ln(r / r_1)}{\ln(r_2 / r_1)}$$

Φ n'est plus proportionnel à (T_2-T_1) : la notion de résistance thermique n'a plus de sens

II.4

$$\iint \vec{j}\vec{n}dS = 2\pi r L j = 2\pi r L h_c (T_p - T_f) = \frac{T_p - T_f}{R_c} \quad \text{avec} \quad R_C = \frac{1}{2\pi r L h_c}$$

Si h_C -> infini Tp-> T_f car j demeure fini

II.5

$j = \varepsilon\sigma(Tp^4 - Ta^4)$ s'écrit avec $Tp = T_m + \frac{Tp - Ta}{2} = T_m + \theta$ et $Ta = T_m - \theta$

$$j = \varepsilon\sigma(Tp^4 - Ta^4) = \varepsilon\sigma((T_m + \theta)^4 - (T_m - \theta)^4) = \varepsilon\sigma T_m{}^4[(1 + \frac{\theta}{T_m})^4 - (1 - \frac{\theta}{T_m})^4]$$

$$j \approx \varepsilon\sigma T_m{}^4[8\frac{\theta}{T_m}] \approx \varepsilon\sigma T_m{}^3\, 8\frac{Tp - Ta}{2} = 4\varepsilon\sigma T_m{}^3(Tp - Ta) \quad \text{donc } h_{ray} = 4\varepsilon\sigma T_m{}^3$$

A.N h_{ray} = 0.59 j_r= 167 Wm^{-2} j_c = 200 Wm^{-2}

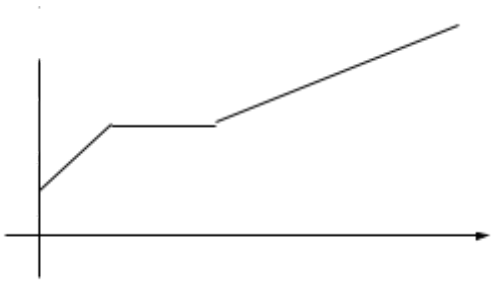
Les deux termes sont du même ordre .

J= jray+jc= (h_{ray}+h_c)(T_p-T_f) équivalent aux deux résistances en parallèle

-	**II.6**	Le flux est le même à travers les trois couches : équivalent a trois résistances en série. $T_1 - T_2 = R_1 \Phi$ $T_2 - T_e = R_e \Phi$ $T_f - T_e = R_c \Phi$ avec $R_1 = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_2}{r_1}$ $R_e = \frac{1}{2\pi\lambda_e L} \ln \frac{r_2 + e}{r_2}$ $R_c = \frac{1}{2\pi (r_2 + e) L h}$
	II.7	$\Phi = \frac{T_1 - T_f}{R_1 + R_{e_c} + R_c}$ soit $\Phi = \frac{2\pi L (T_1 - T_f)}{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_e} \ln \frac{r_2 + e}{r_2} + \frac{1}{h_c (r_2 + e)}}$ la couche d'isolant augmente la résistance de conduction Re mais diminue la résistance de convection Rc Il y a donc une valeur optimale de e qui correspond à $\frac{d(Re + Rc)}{de} = 0$ Soit en posant $x = r_2 + e$ $\frac{d}{dx}(\frac{1}{\lambda e} \ln x + \frac{1}{h_c x}) = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda_e}{h}$ $e = \frac{\lambda_e}{h_c} - r_2$

III Ebullition de l'eau en convection forcée

	III.1	$P = R I^2$ R = Résistance électrique = ξ_{elec} $L/\pi(r_2^2 - r_1^2)$ Pour un tube de longueur unité $p_j = \xi_{elec} \frac{I^2}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}$
	III.2	Pendant dt ,l'eau qui passe de x en x+dx (soit le volume S qdt) se réchauffe de dT en recevant une quantité de chaleur $\delta Q = p_j S dx$ pendant dt $\delta Q = \rho_{eau} c_{eau} q d S dT = p_j S dx dt$ soit $\rho_{eau} c_{eau} q \frac{dT}{dx} = p_j = \xi_{elec} \frac{I^2}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}$ On a négligé le transfert par conduction dans l'eau, beaucoup plus lent que le transfert par convection. A.N x_c = 1 m Pour $x > x_c$ il y a ébullition

	III.3	$q\, L\rho_{eau} = \xi_{elec} \dfrac{I^2}{\pi(r_2^{\,2} - r_1^{\,2})} d$ d = 6.7 m Il y a un palier de de changement d'état  le tube n'est pas parfaitement isolé : $d_{réel} > d_{théorique}$