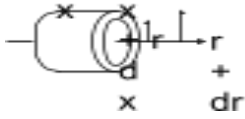


Pierre MADROLLE

BCPST2 - Lycée LaMartinière -LYON

Madrolle.P@wanadoo.frA1 **AA**On appelle $\tau(r)$ l'action du filet fluide r^+ sur le filet fluide r^-

L'équilibre de l'anneau (il avance à vitesse constante) s'écrit en projection sur l'axe des x

$$\tau(r+dr)2\pi(r+dr)dx - \tau(r)2\pi r dx - P(x+dx)2\pi r dr + P(x)2\pi r dr = 0 \quad \text{soit:}$$

$$\frac{d(\tau(r))}{dr} r dx - \frac{dP}{dx} r dx = 0 \quad \text{ou bien:} \quad \frac{dP}{dx} = \frac{1}{r} \frac{d(\tau(r))}{dr}$$

A2 **AA** Les filets les plus rapides sont au centre et les plus lents à la périphérie (vitesse nulle au contact du bord du tube). Ceci a deux conséquences: La contrainte tangentielle de r^+ sur r^- est dirigée vers les x négatifs: ($\tau < 0$)

$$\text{Le gradient des } v_x(r) \text{ est négatif: } \frac{dv_x}{dr} < 0$$

On peut donc écrire: $\tau = \eta \frac{dv_x}{dr}$, et donc: $\frac{dP}{dx} = \eta \frac{1}{r} \frac{d(r \frac{dv_x}{dr})}{dr}$

On reconnaît une fonction de x seul à gauche et de r seul à droite, ce qui confirme que dP/dx est bien une constante comme l'annonce l'énoncé.

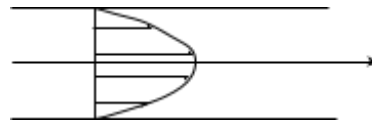
$$\frac{d(r \frac{dv_x}{dr})}{dr} = \frac{1}{\eta} \frac{dP}{dx} r \quad \text{d'où} \quad r \frac{dv_x}{dr} = \frac{1}{2\eta} \frac{dP}{dx} r^2 \quad (\text{constante d'intégration nulle ... } r=0)$$

On tire:

Et donc: $\frac{dv_x}{dr} = \frac{1}{2\eta} \frac{dP}{dx} r$ soit: $v_x = \frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dx} r^2 + C$ avec $C = -\frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dx} a^2$ car $v_x = 0$ en $x = a$.

Enfin: $v_x = \frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dx} (r^2 - a^2)$

Le profil de vitesse est donc parabolique.



Noter que $r < a$ et $v_x > 0$ impose que $dP/dx < 0$. La pression diminue vers les croissantes.

$$Q = \int_0^a 2\pi r v_x dr = \frac{\pi}{2\eta} \frac{dP}{dx} \left(\frac{a^4}{4} - a^2 \frac{a^2}{2} \right) \quad \text{soit:} \quad \boxed{Q = -\frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{dP}{dx}}$$

A3 **AA**

La vitesse moyenne est telle que: $Q = v_m \pi a^2$. On retrouve bien: $v_m = -\frac{a^2}{8\eta} \frac{dP}{dx}$

On peut noter que la vitesse maximale du fluide (obtenue au centre) est le double de la vitesse moyenne: $v_{max} = 2 v_m$

B1 **AA** $\Phi = \frac{3(\pi a^2 l)}{l^3}$ soit: $\Phi = 3\pi \frac{a^2}{l^2}$

La porosité est légèrement surévaluée par cette expression car on compte 3 fois au lieu d'une la partie commune des trois tubes. L'erreur est de l'ordre de $2a^3/l^3$ il s'agit d'un infiniment petit d'ordre supérieur qu'il est bien légitime de négliger.

B2 **AA** La surface S de matériau poreux correspond à $N = S/l^2$ cubes élémentaires, et donc à N tubes de section πa^2 dans

lesquels le débit est Q calculé précédemment. D'où $V_x S = NQ = SQ/l^2$, et donc $V_x = Q/l^2 = -\frac{\pi a^4}{8\eta l^2} \frac{dP}{dx}$

Or $a^4 = l^4 \frac{\Phi^2}{9\pi^2}$ On a bien: $V_x = -\frac{\Phi^2 l^2}{72\pi\eta} \frac{dP}{dx}$

$$\text{B3AA} \quad V = -\frac{k}{\eta} \text{grad}P$$

V en ms^{-1} τ en Nm^{-2} et donc η en Nsm^{-2} d'après l'expression de A2AA $\text{grad}P$ en Nm^{-3} k est en m^2

Loi B3AA projetée sur l'axe des x : $V_x = -\frac{k}{\eta} \frac{dP}{dx}$ et avec B2AA $k = \frac{\Phi^2 l^2}{72\pi}$ (ce qui confirme l'unité en m^2)

B4AA On ne s'intéresse qu'à la circulation sur l'axe des x et on néglige l'incidence de la présence des deux autres pores sur la conductance de la matrice.

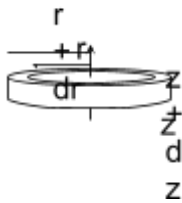
On a à faire à deux conducteurs en parallèle dont les conductances s'ajoutent:

$$G = G_m + G_f = \sigma_m \frac{l^2}{l} + \sigma_f \frac{\pi a^2}{l} = \sigma_m l + \sigma_f \frac{\pi a^2}{l}$$

Or pour un matériau de section l^2 longueur l conductivité σ , la conductance vaut: $G = \sigma \frac{l^2}{l} = \sigma l$

On tire: $\sigma = \sigma_m + \sigma_f \frac{\pi a^2}{l^2} \approx \sigma_f \frac{\pi a^2}{l^2}$ car $\sigma_f \gg \sigma_m$ et avec B1AA : $\Phi = 3 \frac{\sigma}{\sigma_f}$

C1AA On peut reprendre la démonstration faite en A1AA pour un anneau disposé verticalement entre z et $z+dz$ (sens ascendant)



Au bilan des forces vues plus haut il faut ajouter le poids de l'anneau dirigé vers le bas. Si le mouvement du fluide est tel que l'accélération est négligeable, la projection des forces sur l'axe vertical est nulle:

$$\left[\eta \frac{dv_z}{dr} \right]_{r+dr} 2\pi(r+dr)dz - \left[\eta \frac{dv_z}{dr} \right]_r 2\pi r dz - P(z+dz)2\pi r dr + P(z)2\pi r dr - \rho_e g 2\pi r dr dz = 0$$

soit: $\frac{dP}{dz} + \rho_e g = \eta \frac{1}{r} \frac{d\left(r \frac{dv_z}{dr}\right)}{dr}$

On retrouve l'expression vue en A2AA où la constante dP/dz est remplacée par la constante $dP/dz + \rho_e g$. On attend donc le

résultat trouvé en B3AA où $dP/dz + \rho_e g$ remplace dP/dz . On obtient bien: $V_z = -\frac{k}{\eta} \left(\frac{dP}{dz} + \rho_e g \right)$

C2AA Cas $h(t) > 0$:

Au sein du fluide surnageant (au repos): $P(0) = P_{\text{atm}} + h\rho_e g$

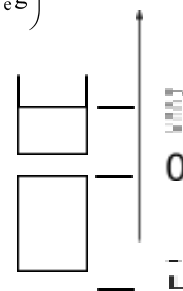
A la base du sable d'où l'eau coule goutte à goutte: $P(-L) = P_{\text{atm}}$

Puisque dP/dz est constant (énoncé) on tire: $dP/dz = h\rho_e g/L$

Cas $h(t) < 0$:

La surface de l'eau (dans les pores) est à la pression atmosphérique ainsi que la base du sable où l'eau s'écoule goutte à goutte.

On a donc dans ce cas: $dP/dz = 0$



Avec $V_z = dh/dt$, on obtient les deux équations différentielles: $\frac{dh}{dt} = -\frac{k}{\eta} \rho_e g \left(\frac{h}{L} + 1 \right)$ (si $h > 0$), $\frac{dh}{dt} = -\frac{k}{\eta} \rho_e g$ (si $h < 0$)

C3AA Le modèle est satisfaisant mais il sous estime sans doute les effets de la viscosité car les capillaires sont supposés rectilignes. En négligeant la tortuosité du parcours entre les grains, il sous estime la longueur de ces parcours. Il n'est sans

doute pas bien adapté à des sables de trop forte granulométrie car ça devient trop grand pour considérer l'écoulement comme laminaire d'une part et pour négliger le volume des pores devant celui de la matrice d'autre part. De plus, le modèle néglige les phénomènes de capillarité qui jouent un rôle d'autant plus important que l'on approche de la fin du processus d'écoulement.

C4A Cas $h(t) > 0$:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{k}{\eta} \rho_e g \frac{h}{L} = -\frac{k}{\eta} \rho_e g \Rightarrow h = -L + A e^{-\frac{k \rho_e g}{\eta L} t} \quad \text{avec } z = h_0 \text{ pour } t = 0 \text{ d'où } A = h_0 + L$$

On obtient donc:
$$h = (h_0 + L) e^{-\frac{k \rho_e g}{\eta L} t} - L \quad \text{pour } 0 < h < h_0$$

La surface du sable s'assèche pour t_0 tel que :

$$\frac{h_0 + L}{L} = e^{\frac{k \rho_e g}{\eta L} t_0} \quad \text{soit: } t_0 = \frac{\eta L}{k \rho_e g} \ln \left(\frac{h_0 + L}{L} \right)$$

Cas $h(t) < 0$:

$$h = -\frac{k}{\eta} \rho_e g t + B \quad \text{avec } h = 0 \text{ pour } t = t_0 \quad \text{d'où} \quad h = -\frac{k}{\eta} \rho_e g (t - t_0)$$

L'eau écoulée à l'instant t est égale à l'eau présente à $t=0$ moins l'eau restant à l'instant t :

Si $h(t) > 0$ eau initiale = $h_0 S \rho_e$ + eau dans le sable

eau restante = $h S \rho_e$ + eau dans le sable $m(t) = (h_0 - h) \rho_e S$

$$m(t) = (h_0 + L) \rho_e S \left(1 - e^{-\frac{k \rho_e g}{\eta L} t} \right)$$

à $t = t_0$, la masse d'eau écoulée est $m_0 = h_0 \rho_e S$

Si $h(t) < 0$ l'eau écoulée depuis t_0 est celle qui était présente dans pores de 0 à $h(t)$.

Il s'est donc écoulé depuis l'instant initial: $m(t) = h_0 \rho_e S + \Phi S (-h(t)) \rho_e$

$$m(t) = \rho_e S \left(h_0 + \Phi \frac{k \rho_e g}{\eta} (t - t_0) \right)$$

Soit:

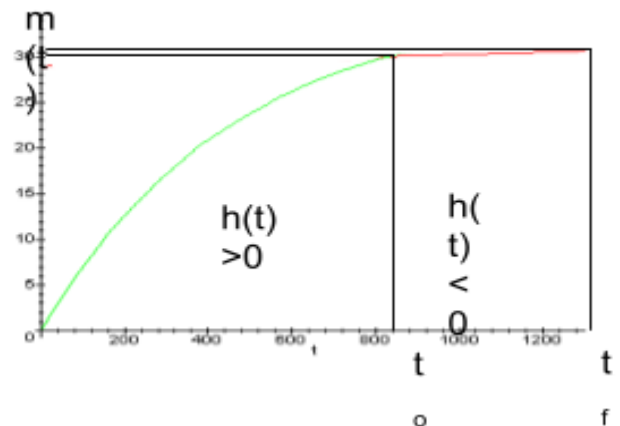
Le changement de régime se fait à $t_0 = 827$ s (l'eau affleure à la surface supérieure du sable).

La masse passée à cet instant est $m_0 = 30$ kg.

Tout est vide lorsque $h(t) = -L$.

C'est à dire pour $t_f = \frac{\eta L}{k \rho_e g} + t_0 = 1289$ s.

La masse totale passée est $m_1 = 30,6$ kg.



C5A La vitesse de Darcy ($V_z = \left| \frac{dh}{dt} \right|$) est maximale à l'instant initial. On obtient donc:
$$V_{z \max} = \frac{(h_0 + L) k \rho_e g}{\eta L} = 2,6 \text{ mm s}^{-1}$$

D'après A3A et B2A la vitesse maximale dans un pore (au centre du pore) est: $v_{\max i} = 2v_m = 2 \frac{Q}{\pi a^2} = 2 \frac{V_{z \max} l^2}{\pi a^2} = \frac{6}{\Phi} V_{z \max}$

Soit:
$$v_{\max i} = \frac{6}{\Phi} \frac{(h_0 + L) k \rho_e g}{\eta L}$$

$$v_{\max i} = 0,156 \text{ ms}^{-1}$$

Le nombre de Reynolds s'écrit: $R_e = \frac{v_{\max} a}{\nu}$ avec $\nu = \eta/\rho_e$ On trouve:

$$R_e = \frac{v_{\max} l \rho_e}{\eta} \sqrt{\frac{\Phi}{3\pi}} = 50$$

Pour un milieu confiné comme les pores, l'écoulement peut effectivement être considéré comme laminaire.

C6AA On a négligé les forces de capillarité. Moins il y a d'eau plus leur importance relative s'accroît. En particulier, en fin de processus, on ne parvient pas à "vider" complètement les capillaires par le seul effet de la gravité (effet "buvard").

C7AA Si le fluide est forcé à traverser les pores depuis le bas, la matrice est soumise à une action verticale ascendante de la part du fluide, du fait de sa viscosité.

Si on considère une tranche de sable gorgée d'eau comprise entre z et $z + dz$, elle est soumise à son poids $\rho_m S dz$. A l'entrée de chaque pore le fluide extérieur exerce la pression P sur le fluide intérieur (surface πa^2 par pore). La surface S de "boue" comprend $N = S/l^2$ pores sur chacun desquels s'exerce la force $P \pi a^2$.

La face située en z est donc soumise à $P(z) S \pi a^2/l^2 = P(z) S \Phi/3$ vers le haut. De même il s'exerce $P(z+dz) S \Phi/3$ vers le bas.

La résultante de ces forces, projetée sur l'axe ascendant s'écrit: $df_z = -\frac{dP}{dz} \frac{\Phi}{3} S dz - \rho_m g S dz$

Or, d'après C1AA, $-\frac{dP}{dz} = \frac{\eta}{k} V_z + \rho_e g$ d'où: $df_z = S dz \left(\frac{\eta}{k} \frac{\Phi}{3} V_z + \left(\frac{\Phi}{3} \rho_e - \rho_m \right) g \right)$

Le sable sera instable et aura tendance à se soulever (il y aura "liquéfaction" du sable) dès que df_z sera positif ou nul, c'est à

dire dès que: $V_z > V_z^c = \frac{k}{\eta} \left(\frac{3}{\Phi} \rho_m - \rho_e \right) g$ soit: $V_z^c = 3,2 \text{ cms}^{-1}$

Remarque:

On peut retrouver ce résultat en étudiant directement l'action, sur la matrice, de l'eau qui remonte:

Soit un grain de matrice traversé par un pore vertical. Ce grain de matrice est soumis à son poids: $\rho_m l^3 g$ et à la contrainte de viscosité verticale ascendante sur la paroi d'un pore:

$$-\eta \left. \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=a} 2\pi a = -\frac{\eta}{2\eta} \frac{dP}{dz} a 2\pi a = -\pi a^2 l \frac{dP}{dz} = \pi a^2 l \left(\frac{\eta}{k} V_z + \rho_e g \right)$$

La résultante ascendante s'écrit: $\pi a^2 l \left(\frac{\eta}{k} V_z + \rho_e g \right) - \rho_m l^3 g$. D'où la même expression de la vitesse critique.

D1AA Entre a et b ainsi que entre c et d où les effets de la viscosité peuvent être négligés, on peut appliquer le théorème de

Bernouilli: $\frac{1}{2} \rho_e V_a^2 + \rho_e g z_a + P_a = \frac{1}{2} \rho_e V_b^2 + \rho_e g z_b + P_b$ avec $V_a \approx 0 \Rightarrow P_b = \rho_e g h + P_o - \frac{1}{2} \rho_e V_b^2$

$\frac{1}{2} \rho_e V_d^2 + \rho_e g z_d + P_d = \frac{1}{2} \rho_e V_c^2 + \rho_e g z_c + P_c$ avec $V_d \approx 0 \Rightarrow P_c = \rho_e g e + P_o - \frac{1}{2} \rho_e V_c^2$

D2AA Les forces de viscosité ne peuvent plus être négligées au sein de l'aquifère et Bernoulli ne peut plus être appliqué.

Le gradient de pression moyen s'écrit: $\frac{P_c - P_b}{\pi R} = \frac{dP}{dl}$

On obtient, en remarquant que la conservation de la matière dans l'aquifère s'écrit: $V_b = V_c$ $\frac{dP}{dl} = \frac{\rho_e g(e-h)}{\pi R}$

D3AA L'équation d'Euler s'écrit en un point de la colonne (supposée verticale) de fluide libre (supposé parfait) à la sortie de

l'aquifère: $\frac{DV}{Dt} = -\text{grad}P + \rho g$

V et g sont verticales. La projection sur les axes horizontaux Ox et Oy , donne: $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

La pression est donc constante dans un plan horizontal et vaut donc P_o (Loi des pressions transverses)

On déduit de l'expression de Bernoulli dans la panache la vitesse de sortie de l'aquifère: (Torricelli)

$$V_c^2 = 2eg$$

$$v = -\frac{a^2}{8\eta} \frac{dP}{dl} = -\frac{S}{8\pi\eta} \frac{\rho_e g(e-h)}{\pi R}$$

D4AA Les résultats de **A4A** s'appliquent à l'aquifère:

$$v = \frac{S\rho_e g}{8\pi^2 \eta R} \left(h - \frac{v^2}{2g} \right)$$

V_c est assimilable à cette vitesse moyenne, d'où:

$$\text{Si } R \rightarrow \infty \quad v \rightarrow 0$$

$$v^2 + \frac{16\pi^2 \eta R}{S\rho_e} v - 2gh = 0$$

Ceci se réécrit:

$$\text{Si } R \rightarrow 0 \quad v \rightarrow \sqrt{2gh}$$

$$v = -\frac{8\pi^2 \eta R}{S\rho_e} + \sqrt{\left(\frac{8\pi^2 \eta R}{S\rho_e} \right)^2 + 2gh}$$

On tire:

$$\textbf{D5AA} \text{ On obtient pour } S = 1\text{m}^2 \text{ et } h = 50\text{m} \quad v = 29,8 \text{ ms}^{-1} \quad e = 45,2 \text{ m}$$

La perte de charge (5 m) dans la galerie est très faible. Ceci est dû à la forte dimension transversale. (conduite forcée EDF)

Le nombre de Reynolds vaut: $R_e = \frac{\rho_e v \sqrt{S}}{\eta} = 3 \cdot 10^7$. L'hypothèse laminaire dans ce type de conduite est erronée.

D6AA La pression de sortie est $P_c = P_o$ et cette fois la vitesse d'écoulement dans le milieu poreux est très faible. On peut donc écrire $P_b = h\rho_e g + P_o$.

L'expression de la vitesse de Darcy applicable à ce milieu poreux fournit alors ici:

$$v = -\frac{k}{\eta} \frac{dP}{dl} = \frac{k}{\eta} \frac{h\rho_e g}{\pi R}$$

On tire, avec le débit: $Q = vS$:

$$k = \frac{Q\eta\pi R}{h\rho_e gS}$$

$$k = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$$

D7AA Avec les résultats obtenus dans les parties précédentes:

$$k = \frac{\Phi^2 l^2}{72\pi}$$

et

$$\Phi = 3\pi \frac{a^2}{l^2}$$

on tire:

$$l = \frac{\sqrt{72\pi k}}{\Phi} = 7 \text{ mm} \quad \text{et} \quad a = l \sqrt{\frac{\Phi}{3\pi}} = 0,7 \text{ mm}$$

E1AA Soit $S(r)$ la surface de la sphère de rayon r . ($S(r) = 4\pi r^2$)

Il entre la puissance: $q(r)S(r)$. Il sort: $q(r+dr)S(r+dr)$

La puissance échangée par la couche sphérique par conduction thermique est donc:

$$q(r)S(r) - q(r+dr)S(r+dr) = -\frac{\partial(qS)}{\partial r} dr = -4\pi \frac{\partial(r^2 q)}{\partial r} dr$$



E2AA La puissance produite dans le volume $S(r)dr$ concerné s'écrit: $H\rho S(r)dr = 4\pi r^2 \rho H dr$

L'élévation de température dT nécessite l'énergie: $\rho S dr c_p dT$.

Cette variation de température est observée pour une durée dt , la puissance nécessaire est donc: $4\pi r^2 \rho dr c_p \frac{\partial T}{\partial t}$.

On déduit:
$$-4\pi \frac{\partial(r^2 q)}{\partial r} dr + 4\pi r^2 \rho H dr = 4\pi r^2 \rho dc_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{ou bien} \quad \rho c_p r^2 \frac{\partial T}{\partial t} = r^2 \rho H - \frac{\partial(r^2 q)}{\partial r}$$

E3 L'obtention du résultat demandé est immédiat

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho H + \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial(r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r}$$

Unités: ρ kg m^{-3}

c_p	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ soit:	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	ou	$\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$
H	$\text{J s}^{-1} \text{kg}^{-1}$ soit:	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{s}^{-1} \text{kg}^{-1}$	ou	$\text{m}^2 \text{s}^{-3}$
λ	$\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2} \text{K}^{-1}$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{s}^{-1} \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$	ou	$\text{kg m s}^{-3} \text{K}^{-1}$

E4 En régime permanent $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$:

A l'interface en $r = r_m$ il doit y avoir continuité de la température ainsi que du flux thermique, et donc de $\frac{\partial T}{\partial r}$ puisque la conductivité est la même de part et d'autre de l'interface.

Pour $0 \leq r \leq r_m$, l'équation de la chaleur s'écrit:

$$\frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial(r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} = 0 \Rightarrow r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = K$$

On tire: $T = \frac{K}{r} + K'$ En $r = 0$ la température ne pouvant prendre de valeur infinie, $K = 0$.
Il reste donc $T = K' = T_c = T_m$ (où T_c est la température au centre et T_m la température à l'interface en r_m)

La température est constante (mais inconnue à ce stade du raisonnement). On en déduit que $\frac{dT}{dr} = 0$ (y compris en $r = r_m$)

Pour $r \geq r_m$, l'équation de la chaleur devient:

$$\frac{\partial(r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} = -\frac{\rho H}{\lambda} r^2 \Rightarrow r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\rho H}{3\lambda} r^3 + K''$$

En $r = r_m$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ On tire $K'' = \frac{\rho H}{3\lambda} r_m^3$ d'où: $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\rho H}{3\lambda} r + \frac{\rho H r_m^3}{3\lambda r^2}$ et donc $T = -\frac{\rho H}{6\lambda} r^2 - \frac{\rho H r_m^3}{3\lambda r} + K'''$

En $r = R$, $T = T_o$ d'où $K''' = T_o + \frac{\rho H}{6\lambda} R^2 + \frac{\rho H r_m^3}{3\lambda R}$

On obtient enfin:

$$T = T_o + \frac{\rho H}{3\lambda} \left(\frac{R^2 - r^2}{2} + r_m^3 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right)$$

La température maximale est obtenue pour $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$, c'est à dire pour $q = 0$ et donc pour $r = r_m$. il s'agit donc de la température $T_c = T_m = T(r_m)$.

On obtient:

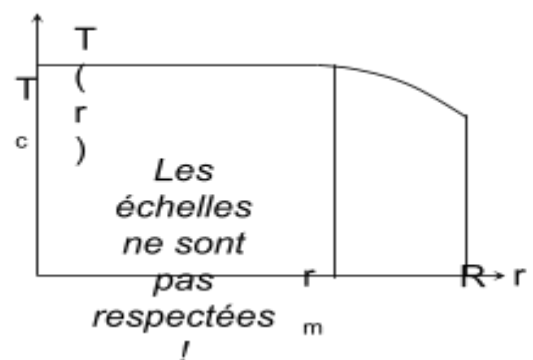
$$T_c = T_m = T_o + \frac{\rho H}{3\lambda} \left(\frac{R^2}{2} + \frac{r_m^3}{R} - \frac{3}{2} r_m^2 \right)$$

$T_c = 447 \text{K}$ (Valeur très nettement sous estimée!)

$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\rho H}{3\lambda} \left(\frac{r_m^3 - R^3}{R^2} \right)$ soit $-10,45 \text{ K km}^{-1}$

(cette fois l'ordre de grandeur est correct)

E5



D'où: $q(R) = \frac{\rho H}{3} \left(\frac{R^3 - r_m^3}{R^2} \right)$ le flux thermique total en surface s'écrit donc : $P_{\text{tot}} = 4\pi R^2 q(R) = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r_m^3) \rho H$

On reconnaît précisément la totalité de la puissance radioactive dissipée dans la croûte.

La flux thermique total évacué à la surface de la planète peut donc s'écrire en généralisant ce résultat:

$$P_{\text{tot}} = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) H(r) dr$$

F1AA En dérivant l'équation de la chaleur par rapport à z on obtient: $\rho c_p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lambda \frac{\partial^3 T}{\partial z^3}$ ou bien grâce au théorème de

Schwartz: $\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \frac{\partial^3 T}{\partial z^3}$

Il suffit ensuite de remplacer $\frac{\partial T}{\partial z}$ par $-\frac{q}{\lambda}$ (Fourier), pour obtenir l'équation: $\frac{\partial q}{\partial t} = D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$

F2AA A l'instant $t = 0$, T est uniforme (pour $z \neq 0$) et vaut T_0 , d'où: $q(0, z) = 0 \quad \forall z \neq 0$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, la planète s'est totalement refroidie pour prendre uniformément la température T_s , d'où: $q(\infty, z) = 0 \quad \forall z$

A l'instant $t = 0$, la température de la surface est T_s mais au voisinage immédiat la température est $T_0 \neq T_s$.

$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0}$ (et donc q) peut donc être considéré comme infini dans ce modèle. D'où: $q(t, 0) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow 0$

La fonction proposée satisfait aux conditions aux limites; En effet:

$t \rightarrow \infty \quad \exp(-z^2/4Dt) \rightarrow 1 \quad \text{et } q \rightarrow 0 \quad \forall z$

$t \rightarrow 0 \quad \text{si } z \neq 0 \quad \exp(-z^2/4Dt) \rightarrow 0 \quad \text{et } q \rightarrow 0 \quad \text{car l'exponentielle l'emporte sur la puissance}$

$\text{si } z = 0 \quad q(0, t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \quad \text{et } q \rightarrow -\infty$

La fonction proposée satisfait à l'équation différentielle proposée. En effet:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{A}{\sqrt{Dt^3}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} - \frac{A}{\sqrt{Dt}} \left(\frac{z^2}{4Dt^2} \right) e^{-\frac{z^2}{4Dt}} = \frac{1}{2} \frac{A}{\sqrt{Dt^3}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} \left(1 - \frac{z^2}{2Dt} \right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{A}{\sqrt{Dt}} \frac{z}{2Dt} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = \frac{A}{\sqrt{Dt}} \left(\frac{1}{2Dt} - \frac{z^2}{4D^2 t^2} \right) e^{-\frac{z^2}{4Dt}} = \frac{A}{2\sqrt{Dt^3}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} \left(1 - \frac{z^2}{2Dt} \right) \frac{1}{D}$$

On a bien: $\frac{\partial q}{\partial t} = D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$

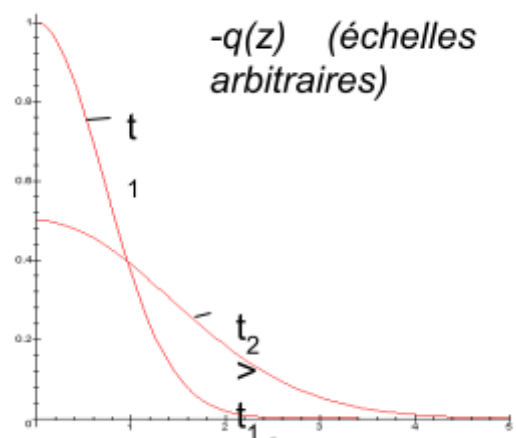
Quand t augmente, l'amplitude diminue, mais la largeur augmente.

F4AA On a vu en E3AA les dimensions de λ , ρ et c_p :

$$[\lambda] = [M][L][T]^{-3}[\Theta]^{-1}$$

$$[\rho] = [M][L]^{-3}$$

On en tire: $[D] = [L]^2[T]^{-1}$



$$[c_p] = [L]^2 [T]^{-2} [\Theta]^{-1}$$

$$[q] = [M][T]^{-3} \quad \text{a la dimension de } \frac{A}{\sqrt{Dt}} \quad \text{d'où: } [A] = [M][L][T]^{-3}$$

$$\text{La dimension proposée par l'expression de l'énoncé est: } [A] = [\Theta]^\alpha [M]^\beta [L]^\gamma [T]^{-3\beta} [\Theta]^{-\beta} [M]^\gamma [L]^{-3\gamma} [L]^{2\delta} [T]^{-2\delta} [\Theta]^{-\delta}$$

$$\text{On tire le système d'équations: } \alpha - \beta - \delta = 0 \quad \alpha = 1$$

$$\beta + \gamma = 1 \quad \gamma = 1 - \beta \quad \gamma = 0$$

$$\beta - 3\gamma + 2\delta = 1 \quad \beta - 3 + 3\beta - 3\beta + 3 = 1 \text{ et } \beta = 1$$

$$-3\beta - 2\delta = -3 \quad 2\delta = -3\beta + 3 \quad \delta = 0$$

$$\text{On tire l'expression de A: } A = a\lambda(T_o - T_s)$$

$$A = \frac{(T_o - T_s)\lambda}{\sqrt{\pi}}$$

F5AA L'énoncé donne:

$$\text{D'où: } q(0, t) = -\frac{(T_o - T_s)\lambda}{\sqrt{\pi Dt}} \quad \text{et avec la loi de Fourier: } \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{(T_o - T_s)}{\sqrt{\pi Dt}}$$

$$t = \frac{(T_o - T_s)^2}{\pi D \left(\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} \right)^2}$$

L'âge de la terre déduit par Lord Kelvin est alors:
compris entre 10 et 40 millions d'années.

soit avec les valeurs de Lord Kelvin, un âge

F6AA Kelvin se trompe d'un facteur de plus de 100 (âge de 4,5 milliards d'année)

Il a trouvé un refroidissement trop rapide en ne prenant pas en compte l'énergie volumique produite par radioactivité au sein de la terre (1^{ère} partie du problème)

Thomson (ou bien Lord Kelvin) 1824-1907 fait les calculs ci-dessus vers 1862. La radioactivité n'est découverte par Becquerel qu'en 1896 (puis confirmée par Marie Curie).

En définitive, aucun des deux résultats n'est satisfaisant:

E4AA En n'expliquant le flux sortant que par la radioactivité dans un cadre stationnaire. Le lent refroidissement de la terre est donc évacué.

F5AA En ne prenant pas en compte la production interne de chaleur par radioactivité qui retarde le refroidissement de la terre.

FIN