

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Одеська політехніка»
Інститут комп'ютерних систем
Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни «**ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА**»
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю
F3 Комп'ютерні науки
освітня програма «Інтелектуальний аналіз даних»

Одеса – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Одеська політехніка»
Інститут комп'ютерних систем
Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни «**ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА**»
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю
F3 Комп'ютерні науки
освітня програма «Інтелектуальний аналіз даних»

Затверджено на засіданні
кафедри ПМІТ
Протокол № 1 від 29.08.2025 р.

Одеса – 2025

Конспект лекцій по курсу з дисципліни «Дискретна математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю F3 Комп'ютерні науки освітня програма «Інтелектуальний аналіз даних» / Укладачі: Н.А.Гуляєва. - Одеса: Національний університет «Одеська політехніка», 2025. – 77 с.

Укладач: Гуляєва Н.А., ст.викладач

Пропонований конспект лекцій призначений для студентів технічних спеціальностей. Його мета в доступній та стислій формі ознайомити студентів з основними положеннями по даній дисципліні. Викладений матеріал ілюструється прикладами розв'язання задач. Наведено список рекомендованої літератури.

Призначається для студентів денної форми навчання.

Вступ

Курс «Дискретна математика» викладається студентам спеціальності F3 Комп'ютерні науки освітня програма «Інтелектуальний аналіз даних» у другому навчальному семестрі. Робоча навчальна програма з дисципліни передбачає наприкінці семестру складання екзамену.

Конспект лекцій призначений для підготовки студентів до занять з дисципліни «Дискретна математика», поглиблення теоретичних та практичних навичок.

Загальні положення

Відповідно до навчальної програми з дисципліни «Дискретна математика» передбачається п'ятнадцять лекційних занять. Кожне лекційне заняття - перелік основних понять та категорій, якими має володіти студент після роботи на відповідному занятті.

Мета лекційних занять – придбання студентами навиків самостійної роботи при розгляді задач. Проведення кожного лекційного заняття починається з короткого опитування з теорії, що привчає до систематичного вивчення матеріалу курсу за конспектами лекцій або навальними посібниками.

Зміст

ЛЕКЦІЯ 1. Визначення, способи завдання множин. Операції над множинами та їх властивості. Діаграми Ейлера-Венна.	6
ЛЕКЦІЯ 2. Декартовий добуток множин. Відношення. Відображення.	13
ЛЕКЦІЯ 3. Перетворення множини. Композиція відношень	15
ЛЕКЦІЯ 4. Розміщення, сполучення, перестановки без повторень та с повтореннями.	20
ЛЕКЦІЯ 5. Логіка висловлювань. Булева алгебра	25
ЛЕКЦІЯ 6. Нормальні форми представлення логічних функцій.	32
Закони алгебри Буля.	32
ЛЕКЦІЯ 7. Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ). Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ).	35
ЛЕКЦІЯ 8. Теорія графів. Неорієнтовані графи	37
ЛЕКЦІЯ 9. Теорія графів. Орієнтовані графи	41
ЛЕКЦІЯ 10. Шляхи і зв'язність в неорієнтованих графах	47
ЛЕКЦІЯ 11. Досяжність в орграфі. Типи зв'язності орграфів. Критерії зв'язності орграфів	51
ЛЕКЦІЯ 12. Ейлерові графи. Гамільтонів цикл. Деревя	54
ЛЕКЦІЯ 13. Деревя. Дводольні та планарні графи.	59
ЛЕКЦІЯ 14. Використання матриць для дослідження орграфів. Ацикличні графи. Топологічне сортування	66
ЛЕКЦІЯ 15. Розфарбування графів. Гіпотеза 4-х фарб	74
Список літератури	76

ЛЕКЦІЯ 1. Визначення, способи завдання множин. Операції над множинами та їх властивості. Діаграми Ейлера-Венна.

Дискретна математика та логіка лежать в основі будь-якого сучасного вивчення інформатики. Слово «дискретний» означає «складений з окремих частин», а дискретна математика має справу з сукупностями об'єктів, названих множинами, і визначеними на них структурами

Основні поняття теорії множин. Операції над множинами

Виділення об'єктів і їх сукупностей - природний спосіб організації нашого мислення, тому не дивно, що він лежить в основі головного інструменту опису точного знання - математики.

Творцем теорії множин був Георг Кантор. Основою цієї теорії є поняття множини.

Визначення. (за Кантором) Множина S є будь-яке зібрання визначених і таких, що розрізняються між собою, об'єктів нашої інтуїції або інтелекту, мислиме як єдине ціле. Ці об'єкти називаються елементами множини.

Визначення Кантора не є точним математичним визначенням, це інтуїтивне визначення поняття множини. Розглянемо більш точне математичне визначення множини.

Множина — це сукупність об'єктів, званих елементами множини, тобто множина повністю визначається своїми елементами .

Про елементи говорять, що вони належать множині, і записують це так: $x \in A$ (читається: « x належить множині A », або « x є елементом множини A »). Допускається запис: $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, якщо всі ці елементи належать множині A . Запис $x \notin A$ означає, що x не належить множині A .

Множини позначаються великими латинськими літерами. Вам вже відомі стандартні позначення числових множин: N - множина натуральних чисел; Z - множина цілих чисел; Q - множина раціональних чисел; R - множина дійсних чисел; C - множина комплексних чисел.

Елементи множини записуються у фігурних дужках: $A = \{a, b, c\}$.

Якщо множина X кінцева, то кількість елементів у множині позначається $|X|$. Наприклад, якщо $X = \{a, b, c\}$, то $|X| = 3$.

Порядок слідування елементів в множині не має значення. Наприклад, $\{a, b, c\}$ і $\{c, a, b\}$ – це одна і та ж множина.

Елементи якої-небудь множини самі можуть бути множинами.

Наприклад, множина $A = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$ є множина з трьох елементів ($|A| = 3$), а саме: $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$ і $\{5, 6\}$. Множини $B = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ і $C = \{1, 2, 3\}$ – різні множини, оскільки елементами першого є $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, і $|B| = 2$, а елементами другої є 1, 2 і 3 – $|C| = 3$. Множини $D = \{\{1, 2\}\}$ і $G = \{1, 2\}$ також різні, оскільки перша — одноелементна множина, що має єдиним своїм елементом $\{1, 2\}$, а друга двоелементна має своїми елементами 1 і 2.

Способи опису множин

1. Вербальний (словесний) за допомогою опису характеристичних властивостей, які повинні мати елементи множин.

2. Список (перелік) усіх елементів у фігурних дужках.

- $\{1, 2, 3, \dots\}$;
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- $\{0, 1\}$;
- $\{2, 4, \dots\}$.

3. Предикатний (висловлювальний, породжувальний) за допомогою предиката, тобто множина задається у вигляді $\{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ набуває значення «істина» для елементів множини. Приклади предикатів:

- $\{1, 2, 3, 4, \dots\} = \{x \mid x \text{ — натуральне число}\}$;
- $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 9\} = \{x \mid x \text{ — цифра десяткової системи}\}$;
- $\{0, 1\} = \{x \mid x \text{ — цифра двійкової системи}\}$;
- $\{2, 4, 6, \dots\} = \{x \mid x \text{ — парне число}\} = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N}(x = 2n)\}$

4. Аналітичний. (За допомогою формули)

Введемо поняття відношення між множинами.

Визначення. Нехай A і B є множини, то говорять, що A включене в B , якщо кожен елемент множини A є також елементом множини B (символічний запис: $A \subseteq B$ або $B \supseteq A$). В цьому випадку говорять, що множина A є підмножиною множини B . Множина A строго включена в B , або B строго включає A , або A є власна підмножина B , якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$ (символічно: $A \subset B$). Дві множини вважаються рівними якщо кожна з них міститься в іншій (символічно: $A=B$)

Наприклад, множина парних чисел строго включена в множину $\mathbb{Z}$ цілих чисел, а множина $\mathbb{Q}$ раціональних чисел строго включає $\mathbb{Z}$.

Може бути тільки одна множина, що не має елементів. Цю множину називають порожньою і позначають її символом $\emptyset$. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Якщо ми розглядаємо підмножини якоїсь великої множини U , то ми називаємо U універсальною множиною для даної задачі.

Розглянемо операції над множинами

Об'єднанням множин A і B називається множина, що складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать хоча б одній з множин A або B . Позначається $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$ (називається сумою або об'єднанням). Таким чином, за наведеним означенням $x \in A \cup B$ тоді і лише тоді, коли x є елементом хоча б однієї з множин A або B .

Наприклад: $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Перетин множин A і B (позначається через $A \cap B$ і читається як «перетин A і B ») є множина всіх предметів, які є елементами обох множин A і B , тобто $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$. Таким чином, за визначенням, $x \in A \cap B$ тоді і тільки тоді, коли x є одночасно елементом множини A і елементом множини B .

Наприклад: $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$.

Запереченням множини A називають множину $\bar{A}$ (не A), елементами якої є всі елементи простору, за виключенням елементів множини A . Таким чином, за визначенням $\bar{A} = \{x: x \notin A\}$

Різницею множин A і B або відносним доповненням множини B до A називається множина, що складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать A і не належать B . Визначається лише для двох множин.

Різниця множин A і B позначається як $A \setminus B$, або $A - B$, що відповідає умові $\{a, a \in A \text{ і } a \notin B\}$, яка визначає ті елементи множини A , що не є елементами множини B . Саму операцію знаходження різниці двох множин називають відніманням множин.

Нехай $A = \{1, 3, 4, 5\}$, а $B = \{1, 2, 3\}$. Тоді $A - B = \{4, 5\}$

Симетричною різницею множин A і B називається множина $A \oplus B$, яка складається з елементів множини A або множини B , за виключенням елементів, які належать A і B одночасно

$$A \oplus B = \{x: x \in A \text{ або } x \in B \text{ та } x \notin A \cap B\}.$$

Властивості операцій

1. Комутативність $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

2. Асоціативність

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Дистрибутивність:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

5. $A \cup \bar{A} = U$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$

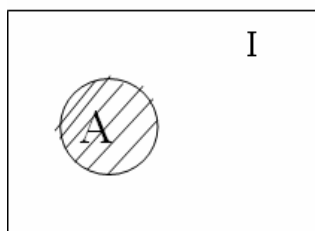
6. $A \cup I = I$; $A \cap I = A$.

7. $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$.

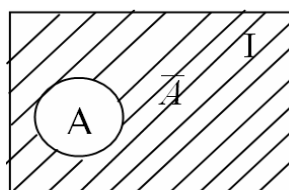
Діаграми Ейлера

Для наочного зображення операцій над множинами досить часто використовують діаграми (круги) Ейлера.

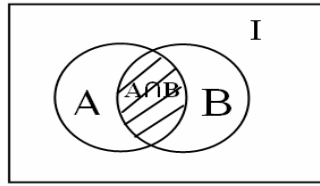
Множина, яка об'єднує всі однотипні множини, має назву *універсальної множини*, або *універсума*. Позначається U або I . Універсум зображають у вигляді області прямокутника, а його підмножини – у вигляді кругів, еліпсів тощо.



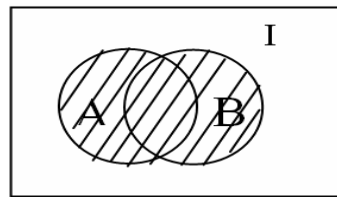
Заперечення (доповнення) множини $\bar{A}$



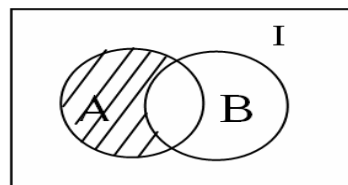
Перетин множин $A \cap B$



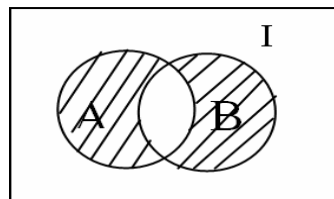
Об'єднання множин $A \cup B$



Різниця множин $A \setminus B$



Симетричною різницею $A \oplus B$



При побудови діаграми Ейлера існує пріоритет виконання операцій.

Пріоритет виконання операцій встановлюється наступний: заперечення – найвищий, перетин та об'єднання – наступний, однаковий один до одного.

Операції різниці та симетричної різниці – не є алгебраїчними, пріоритет не встановлюється.

Задача 1: Замість знака «?» поставити знаки $\in, \notin, \supset, =, \subset$:

$(-2, 7) ? [-2, 8)$, $\{1, 2, 3\} ? \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$, $8 ? \{1, 8, 14\}$, $(5, 7] ? [1, 7)$, $5 ? \{4, 21, 28\}$

Розв'язання.

А) $(-2,7) \subset [-2,8)$. Множина $(-2,7)$ є підмножиною $[-2,8)$. Тому $(-2,7) \subset [-2,8)$.

Б) $\{1,2,3\} \in \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$. Множина $\{1,2,3\}$ є елементом множини $\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$, тому $\{1,2,3\} \in \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$.

В) $8 \in \{1,8,14\}$. Число 8 належить до елементів множини $\{1,8,14\}$, тому $8 \in \{1,8,14\}$.

Г) $(5,7] \not\subset [1,7)$. Множина $(5,7]$ не є підмножиною $[1,7)$, тому $(5,7] \not\subset [1,7)$.

Д) $5 \notin \{4,21,28\}$. Число 5 не належить до елементів множини $\{4,21,28\}$. Тому $5 \notin \{4,21,28\}$.

Задача 2. Видаливши з множини A елементи $\{1, 2\}$, $B = \{9, 10\}$, $C = \{11, 13\}$ і $D = \{14, 16\}$, записати множини, одержані після виконання вказаних операцій $A \cap D$, $A \setminus (B \cap D)$, $B \cup D$.

Вважаємо, що:

$$U = A \cup B \cup C \cup D,$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\},$$

$$C = \{11, 12, 13, 14, 15, 16\},$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 14, 15, 16\}.$$

Розв'язання. Видаляємо вказані елементи з цих множин.

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13\},$$

$$C = \{12, 14, 15, 16\},$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 15\}.$$

Виконуємо вказані у завданні операції:

а) $A \cap D$ – це операція перетину. Перетином множин A та D називають множину $A \cap D$, яка складається з усіх елементів, що

належать A та D одночасно.

$$A \cap D = \{3, 4\}.$$

б) Спочатку виконуємо операцію в дужках. $(B \cap D) = \{4\}$.

$A \setminus (B \cap D)$ – це різниця множин. Різницею множин A і $(B \cap D)$ називається множина $A \setminus (B \cap D)$, що складається з усіх елементів A , які не належать $(B \cap D)$.

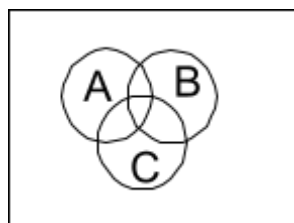
$$A \setminus (B \cap D) = \{3, 5, 6, 7, 8\}.$$

в) $B \cup D$ – це операція об'єднання. Об'єднанням множин B та D називається множина $B \cup D$, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин, тому

$$B \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15\}.$$

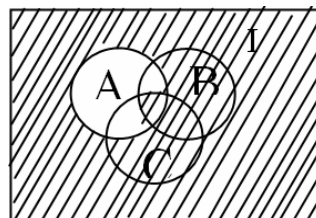
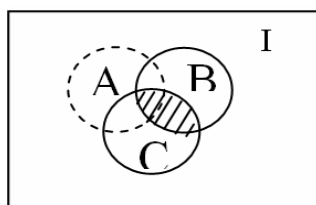
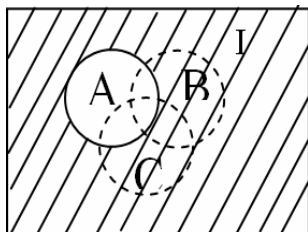
Задача 3. Виконати операції над трьома множинами та закреслити результат на діаграмі Ейлера – Венна.

а) $\overline{A \cup B \cap C}$

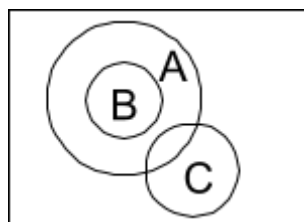


Розв'язання.

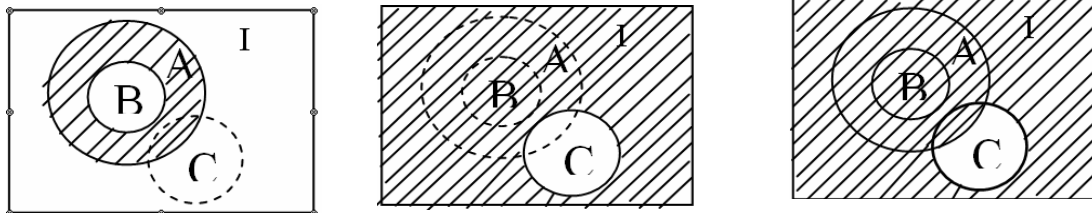
Спочатку знайдемо $\overline{A}$. Далі знайдемо $B \cap C$. Отримаємо



б) $(A \oplus B) \cup \overline{C}$



Спочатку знайдемо $A \oplus B$. Далі $\overline{C}$. Отримаємо



Запитання для самоконтролю:

1. Назвіть способи опису множин.
2. Назвіть та охарактеризуйте основні операції над множинами.
3. Для чого використовують діаграми Ейлера – Венна?

ЛЕКЦІЯ 2. Декартовий добуток множин. Відношення. Відображення.

Відповідності та відношення.

Прямий (декартовий) добуток множин

Нехай маємо дві множини: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ та $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.
Означення. Прямим (декартовим) добутком множин A та B (позначається $A \times B$) називається множина усіх упорядкованих пар $(a_i, b_j), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$

таких, що перший елемент належить множині A , а другий – множині B .

Відповідно декартовим добутком трьох множин A, B, C ($C = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$) називається множина усіх упорядкованих трійок $(a_i, b_j, c_k), i =$

$\overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, p}$ де $a_i \in A, b_j \in B, c_k \in C$, позначається $A \times B \times$

C тощо.

Відповідності. Відношення.

Відповідністю називається будь який зв'язок між елементами однієї множини або елементами різних множин. Поняття відповідності – найбільш загальне поняття, на якому базуються поняття функції, відображення тощо.

Для того щоб задати відповідність G між елементами множин X та Y необхідно вказати, які елементи $y \in Y$ відповідають елементам $x \in X$, тобто вказати пари (x, y) .

Відношення є частинним випадком відповідності, але заданої не на різних множинах, а на одній множині X . Між елементами цієї множини можуть існувати певні логічні зв'язки, тобто елементи знаходяться в певних відношеннях один з одним. Той факт, що елемент $x_i \in X$ знаходиться у відношенні R з елементом $x_j \in X$ записується так: $x_i R x_j$, або $(x_i, x_j) \in R$.

Таке відношення називається бінарним. Таким чином, бінарне відношення, яке задано на множині X , є підмножиною декартового добутку $X \times X$ $R \subseteq X \times X$.

Способи задання відношень

Відношення можна задавати або перерахуванням пар елементів, які йому належать, або таблицею (матрицею), або графом.

Приклад 1. Відношення R – "бути менше", яке задано на множині

$$A = \{1, 3, 4, 8, 9\}.$$

Його можна задати:

1. Перерахуванням пар:

$$R = \{(1, 3), (1, 4), (1, 8), (1, 9), (3, 4), (3, 8), (3, 9), (4, 8), (4, 9), (8, 9)\}$$

2. Таблицею: якщо пара $(a_i, a_j) \in R$, то на перетині i -го рядка та j -го стовпця стоїть одиниця, якщо $(a_i, a_j) \notin R$ – то 0.

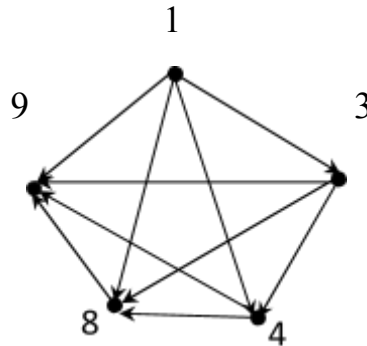
В нашому прикладі маємо:

R	1	3	4	8	9
1	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1
4	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0

$A \circ R =$

0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

3. Граф. Елементи позначаються точками (вершинами), а зв'язок між ними – дугами (ребрами), причому дуга має напрямок – від першого елемента пари до другого.



Задача . Дано дві множини: $M = \{a, \bar{b}, \bar{v}, \bar{z}\}$ та $N = \{1, 3, \pi, \sqrt{15}\}$
Записати $M \times N, N \times M, M \times M, N \times N$.

Розв'язання. Згідно з означенням прямого (декартового) добутку маємо

$$M \times N = \{ (a, 1), (a, 3), (a, \pi), (a, \sqrt{15}), (\bar{b}, 1), (\bar{b}, 3), (\bar{b}, \pi), (\bar{b}, \sqrt{15}), (\bar{v}, 1), (\bar{v}, 3),$$

$$(\bar{v}, \pi), (\bar{v}, \sqrt{15}), (\bar{z}, 1), (\bar{z}, 3), (\bar{z}, \pi), (\bar{z}, \sqrt{15}) \}$$

$$N \times M = \{ (1, a), (1, \bar{b}), (1, \bar{v}), (1, \bar{z}), (3, a), (3, \bar{b}), (3, \bar{v}), (3, \bar{z}), (\pi, a), (\pi, \bar{b}), (\pi, \bar{v}), (\pi, \bar{z}),$$

$$(\sqrt{15}, a), (\sqrt{15}, \bar{b}), (\sqrt{15}, \bar{v}), (\sqrt{15}, \bar{z}) \}$$

$$M \times M = \{ (a, a), (a, \bar{b}), (a, \bar{v}), (a, \bar{z}), (\bar{b}, a), (\bar{b}, \bar{b}), (\bar{b}, \bar{v}), (\bar{b}, \bar{z}), (\bar{v}, a), (\bar{v}, \bar{b}), (\bar{v}, \bar{v}), (\bar{v}, \bar{z}), (\bar{z}, a),$$

$$(\bar{z}, \bar{b}), (\bar{z}, \bar{v}), (\bar{z}, \bar{z}) \}$$

$$N \times N = \{ (1, 1), (1, 3), (1, \pi), (1, \sqrt{15}), (3, 1), (3, 3), (3, \pi), (3, \sqrt{15}), (\pi, 1), (\pi, 3), (\pi, \pi),$$

$$(\pi, \sqrt{15}), (\sqrt{15}, 1), (\sqrt{15}, 3), (\sqrt{15}, \pi), (\sqrt{15}, \sqrt{15}) \}$$

Запитання для самоконтролю:

1. Що називають декартовим добутком множин?
2. Надайте характеристику понять відношення та відповідність.
3. Назвіть способи опису відношень.

ЛЕКЦІЯ 3. Перетворення множини. Композиція відношень

Оскільки відношення є множиною, то над відношеннями виконуються всі ті операції, що й над множинами: об'єднання, перетин, різниця, симетрична різниця, доповнення (до $X \times X$). Крім того, існують операції інверсії та композиції.

1. *Інверсія* – будується на основі поняття *інверсії пари*, тобто інверсія пари $(x_i, x_j) \in R$ є пара (x_j, x_i) . Інверсія відношення R є відношення R^{-1} , яке утворене інверсією пар. R^{-1} ще називають *оберненим* відношенням до R . Для відношення R (приклад 1) R^{-1} є:

$$R^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (8, 1), (9, 1), (4, 3), (8, 3), (9, 3), (8, 4), (9, 4), (9, 8)\}.$$

2. Нехай на множині X задано відношення R та P . Нехай $(a_i, a_j) \in R$, а $(a_j, a_k) \in P$.

Композицією цих двох пар є пара (a_i, a_k) . Композицією відношень R та P називається відношення $Q = R \circ P$, яке утворено композицією пар.

Наприклад, нехай на множині $A = \{1, 3, 4, 8, 9\}$ задано відношення R – «бути менше» (приклад 1) та P – «ділитись без залишку», тобто

$$P = \{(9, 1), (8, 1), (4, 1), (3, 1), (9, 3), (8, 4), (1, 1), (3, 3), (4, 4), (8, 8), (9, 9)\}.$$

Тоді $R \circ P = Q = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (1, 8), (1, 9), (3, 1), (3, 4), (3, 8), (3, 3), (3, 9), (4, 1), (4, 4), (4, 8), (4, 3), (4, 9), (8, 1), (8, 3), (8, 9)\}.$

Властивості відношень

1. Рефлексивність.

Означення. Відношення R називається рефлексивним, якщо кожен елемент множини A , на якому задано відношення, знаходиться в цьому відношенні сам з собою, тобто $\forall a_i \in A; (a_i, a_i) \in R$. Граф рефлексивного відношення при кожній вершині має петлю.

2. Анtireфлексивність.

Означення. Відношення R називається анtireфлексивним, якщо жоден з елементів множини A , на якому задано відношення, не знаходиться в цьому відношенні сам з собою, тобто $\forall a_i \in A; (a_i, a_i) \notin R$. У графа анtireфлексивного відношення ніяка вершина не має петель.

3. Симетричність.

Означення. Відношення R називається симетричним, якщо для будь-якої пари $(a_i, a_j) \in R$, $a_i, a_j \in A$ одночасно виконується умова $(a_j, a_i) \in R$. Граф симетричного відношення має тільки подвійні ребра різного напрямку, а петлі можуть бути або не бути.

4. Антисиметричність.

Означення. Відношення R називається антисиметричним, якщо для жодної пари різних елементів $a_i, a_j \in A$, таких, що $(a_i, a_j) \in R$, одночасно не виконується умова $(a_j, a_i) \in R$. Граф антисиметричного відношення містить тільки одинарні ребра, а петлі можуть бути або не бути.

5. Транзитивність.

Означення. Відношення R називається транзитивним, якщо з того, що одночасно виконуються умови $(a_i, a_j) \in R$ та $(a_j, a_k) \in R$ випливає умова $(a_i, a_k) \in R$. На графі транзитивного відношення, якщо є два послідовних ребра одного напрямку, то обов'язково повинно бути ребро, яке йде з початку першого ребра до кінця другого.

Види відношень

1. Еквівалентність.

Означення. Еквівалентністю називається відношення R , яке задовольняє властивостям рефлексивності, симетричності та транзитивності.

2. Відношення порядку.

Означення. Якщо елементи x і y множини X можна порівняти, тобто $x < y$ або $x = y$, або $x > y$, то множина називається Упорядкованою, і кажуть, що на множині введено відношення порядку.

Розрізняють відношення нестрогого порядку ($\leq$) і відношення суворого порядку ($<$). Відношення нестрогого порядку має такі властивості: рефлексивності, антисиметричності, транзитивності. Відношення суворого порядку має такі властивості: антірефлексивності, антисиметричності, транзитивності

3. Відношення домінування

Якщо з двох елементів x і y множини X елемент x у якомусь сенсі перевершує елемент y , то будемо говорити, що x домінує над y . Відношення домінування має такі властивості: антірефлексивності, антісиметричності, не транзитивності

Задача. На множині $A = \{2, 5, 7, 8\}$ задано відношення R_1 – «бути порівняними за модулем 2» та R_2 – «бути більше». Записати R_1 та R_2 перерахуванням пар, графами. Визначити: які мають властивості R_1 та R_2 і до яких видів належать. Виконати операції $R_1 \oplus R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_1 \circ R_2$ та подати у вигляді графів та перерахування пар.

Розв'язання.

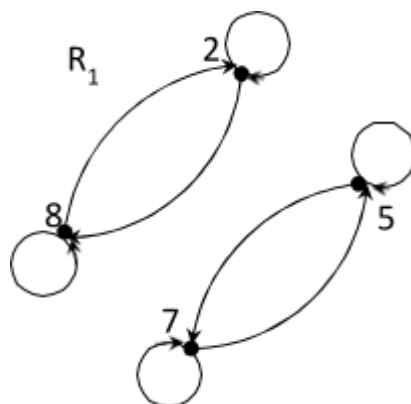
Довідка. Числа a і b порівнянні за модулем $m > 0$, якщо різниця $a - b$ ділиться на m без залишку.

Запишемо R_1 :

$$R_1 = \{(2, 8), (2, 2), (8, 2), (8, 8), (5, 7), (7, 5), (5, 5), (7, 7)\}$$

$R_1 =$

1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1



Властивості: рефлексивність, симетричність, транзитивність .

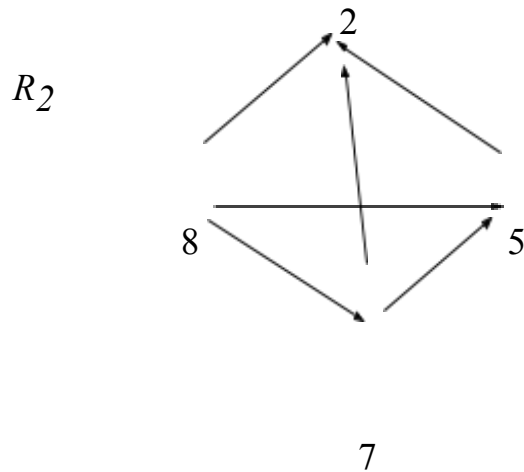
Вид - екви валентність

Запишемо R_2

$$R_2 = \{(5,2), (7,2), (8,2), (7,5), (8,5), (8,7)\}$$

$R_2 =$

0	0	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0
1	1	1	0



Властивості: антирефлексивність, антисиметричність, транзитивність.

Вид– строгий порядок.

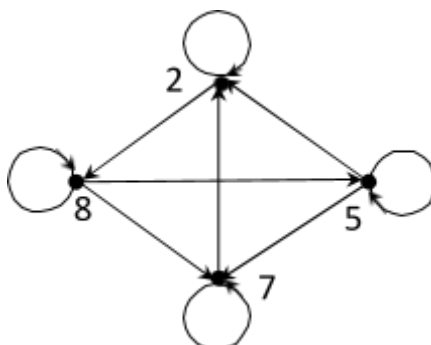
Виконаєм операції

$$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cup R_2) \setminus (R_1 \cap R_2) = \{(2,8), (2,2), (8,8), (5,7), (5,5), (7,7), (5,2), (7,2), (8,5), (8,7)\}$$

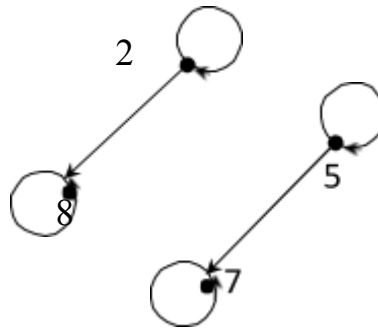
Так як

$$R_1 \cup R_2 = \{(2,8), (2,2), (8,2), (8,8), (5,7), (7,5), (5,5), (7,7), (5,2), (7,2), (8,5), (8,7)\}$$

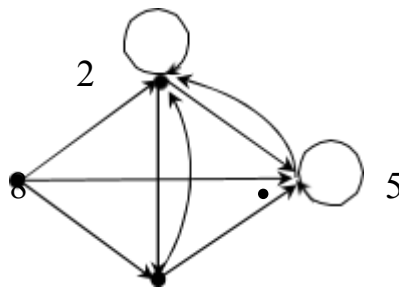
$$R_1 \cap R_2 = \{(8,2), (7,5)\}$$



$$R_1 \setminus R_2 = \{(2,8), (2,2), (8,8), (5,7), (5,5), (7,7)\}$$



$$R_1 \circ R_2 = \{(2,2), (2,5), (2,7), (8,2), (8,7), (8,5), (5,2), (5,5), (7,2), (7,5)\}$$



7

Запитання для самоконтролю:

1. Назвіть характеристики операції інверсії та композиції.
2. Які ви знаєте властивості відношень?
3. Які ви знаєте види відношень?

ЛЕКЦІЯ 4. Розміщення, сполучення, перестановки без повторень та с повтореннями.

Комбінаторика як наука вивчає кількості комбінацій, підпорядкованих певним умовам, які можна скласти з елементів заданої кінцевої множини. Природа елементів у разі немає значення.

Підмножина з m елементів на множині X , що складається з n елементів, називається (n, m) -вибіркою, де m - обсяг цієї вибірки.

Якщо (n, m) -вибірка розглядається з урахуванням порядку елементів в ній, то вона називається (n, m) -розміщенням і позначається A_n^m

Якщо $m = n$, то таке (n, n) -розміщення називається P_n -перестановкою.

Якщо порядок елементів у вибірці (n, m) не має значення, то вона називається (n, m) -сполученням і позначається C_n^m

І перестановки, і сполучення і розміщення можуть бути з повтореннями і без повторень.

Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$. Тоді всі упорядковані і неупорядковані вибірки обсягом два виглядають наступним чином:

- розміщення з повтореннями $\{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$, $A_n^m=9$
- розміщення без повторень $\{ab, ac, ba, bc, ca, cb\}$, $A_n^m=6$
- сполучення із повтореннями $\{aa, ab, ac, bb, bc, cc\}$, $C_n^m=6$
- сполучення без повторень $\{ab, ac, bc\}$, $C_n^m=3$

Розглянемо формули обчислення перестановок, розміщень та сполучень

За визначенням *перестановками* називають комбінації, що складаються з одних і тих же n різних елементів і відрізняються лише порядком їхнього розташування. Число всіх можливих перестановок

$$P_n = n!, \text{ де } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Зауважимо, що за визначенням $0! = 1$.

Розміщенням називають комбінації, складені з n різних елементів по m елементів, що лежать у проміжку від 1 до n , які відрізняються або складом елементів, або їх порядком. Число впорядкованих m -елементних підмножин множини X , яка містить n елементів, дорівнює

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сполученням з n елементів по m - це невпорядкований набір (множина) з m різних чисел, що належать множині X . Таким чином, сполученням називають комбінації, складені з n різних елементів по m елементів, які відрізняються хоч би одним елементом.

Число невпорядкованих m -елементних підмножин множини X , яка містить n елементів, дорівнює

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Кількість перестановок із повтореннями. Кількість перестановок елементів n , з яких n_1 відноситься до типу 1, n_2 відноситься до типу 2 і т.д., аж до n_r елементів типу r , дорівнює

$$P_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$$

Приклад 1. У слові МІФІ змінюють місцями літери. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів?

Рішення.

Дві літери в слові збігаються, отже, число всіх різних перестановок у $2!$ менше можливих, тобто дорівнює

$$P_4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = 12$$

Приклад 2. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів, складених із трьох різних літер множини $\{A, B, C, D, E\}$?

Рішення.

Всі літери в слові не збігаються, отже, число всіх різних розміщень

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Приклад 3. У слові НІЯУ обирають дві літери. Скільки способами це можна зробити?

Рішення.

Так як порядок букв у даному випадку не має значення, то результат визначається за формулою для числа сполучень

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$$

Приклад 4. Визначити, скільки існує різних способів вибору (порядок не має значення) 3 томів із 5-томних зборів творів

Рішення.

Результат визначається за формулою для числа сполучень

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

Правила суми та добутку

Розглянемо кінцеву множину X , що складається з n елементів. Тоді кажуть, що об'єкт x із X може бути обраний $|X| = n$ способами. Нехай $X_1, X_2, \dots, X_k$ - попарно не перетинаючі множини, тобто $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тоді виконується рівність

$$\left| \bigcup_{i=1}^k X_i \right| = \sum_{i=1}^k |X_i|$$

Такий вибір об'єктів називається несумісними подіями

Теорема 1. Правило суми

Якщо деякий об'єкт x може бути обраний із сукупності об'єктів m способами, а інший об'єкт y може бути обраний n способами, то вибрати або x , або y можна $m + n$ способами.

Якщо об'єкт x із X може бути вибраний n способами, а об'єкт y може бути обраний m способами, то впорядкована пара $\langle x, y \rangle$ (коли вибирається як об'єкт x , і об'єкт y) може бути обрана nm способами.

Узагальнюючи на k об'єктів, отримуємо, що вибір упорядкованої за послідовністю $\langle X_1, X_2, \dots, X_k \rangle$ може бути здійснений $n_1 n_2 \dots n_k$ способами.

Теорема 2. Правило добутку

Якщо об'єкт x можна вибрати із сукупності об'єктів m способами і після кожного такого вибору об'єкт y можна вибрати n способами, то пара об'єктів (x, y) у зазначеному порядку може бути обрана mn способами.

Розглянемо кілька задач.

Приклад 5. Скільки способами можна в групі з 20 студентів вибрати старосту та його заступника?

Рішення.

У разі ми вибираємо пару $\langle x, y \rangle$ без повторень. Старосту можна вибрати 20 способами, а його заступника $20 - 1 = 19$ способами. За правилом добутку $20 \cdot 19 = 380$ способів.

Приклад 6. В урні знаходиться 12 куль. Три з них червоні, п'ять білі, решта – сині. Ми вибираємо з урни дві різнокольорові кулі. Скільки способами це можна зробити?

Рішення.

У разі ми вибираємо пару $\langle x, y \rangle$ без повторень.

Якщо пара $\langle \text{червоний, синій} \rangle$, то за правилом добутку таких способів
 $3 \cdot 4 = 12$.

Якщо пара $\langle \text{червоний, білий} \rangle$, то за правилом добутку таких способів
 $3 \cdot 5 = 15$.

Якщо пара $\langle \text{білий, синій} \rangle$, то за правилом твору таких способів $5 \cdot 4 = 20$.

У нас виходить три види несумісних подій: або пара
 $\langle \text{червоний, синій} \rangle$, або $\langle \text{червоний, білий} \rangle$, або $\langle \text{білий, синій} \rangle$.

За правилом суми отримуємо $12 + 15 + 20 = 47$ різних способів вибору.

Приклад 7. Скільки існує чотирицифрових чисел, які діляться на 5?

Рішення.

У даному випадку ми вибираємо четвірку $\langle x, y, z, w \rangle$ з повтореннями, причому останній елемент w — або 0, або 5 за правилом ділимості, а перший x не може бути 0, інакше число не чотиризначне.

За правилом добутку отримуємо $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$.

Приклад 8. У слові НІЯУ МІФІ обирають по дві літери (усі літери не обов'язково різні) і становлять із них слова. Скільки способами це можна зробити?

Рішення. Ми вибираємо пару різних літер, або пару однакових.

За правилом суми отримуємо

$$N = N_1 + N_2,$$

де N_1 — кількість слів із різних літер, а N_2 — кількість слів з однакових літер.

Кількість різних букв дорівнює 6, $n = 6$, з них і здійснюється вибір пари. Результат вибору пари букв $\langle x, y \rangle$ визначається за формулою для числа сполучень:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

Після того як вибір зроблено, з пари букв $\langle x, y \rangle$ складають слова. Кількість таких слів обчислюємо за формулою для перестановок:

$$P_2 = 2! = 2$$

Ми здійснюємо дві події послідовно: вибираємо букви і складаємо слова, отже, за правилом добутку отримуємо рішення

$$N_1 = C_6^2 \cdot P_2 = 15 \cdot 2 = 30$$

У разі вибору однакових літер слів стільки, скільки різних літер, тобто
п: $N_2 = n = 6$

Таким чином, загальна кількість слів

$$N = N_1 + N_2 = 30 + 6 = 36$$

Приклад 9. Скільки чотирьохзначних чисел, що не перевищують 2000, можна скласти з непарних цифр?

Рішення.

Перший розряд числа може бути лише 1, решта — содержат будь-яку з цифр 1,3,5,7,9. Отримуємо, використовуючи правило добутку:

$$A = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

Приклад 10. Розв'язати рівняння $C_x^1 + 6 \cdot C_x^2 + 6 \cdot C_x^3 = 9x^2 - 14x$

Рішення. Згідно з визначенням кількості сполучень запишемо:

$$\begin{aligned} x + 6 \cdot \frac{x!}{2!(x-2)!} + 6 \cdot \frac{x!}{3!(x-3)!} &= 9x^2 - 14x \\ x + \frac{6(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (x-2)(x-1) \cdot x)}{1 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (x-2))} + \frac{6 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (x-3)(x-2)(x-1)x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (x-3))} \\ &= 9x^2 - 14x \end{aligned}$$

$$x + 3 \cdot (x-1) \cdot x + (x-2)(x-1) \cdot x = 9x^2 - 14x$$

після скорочень $x \cdot (x^2 - 9x + 14) = 0$

Розв'язав отримаємо $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 7$

Корені $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ не можуть бути розв'язками рівняння, тому розв'язок $x_3 = 7$.

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке вибірка?
2. Охарактеризуйте та укажіть формули обчислення перестановок, розміщень та сполучень.
3. В яких випадках використовують правило суми та добутку?

ЛЕКЦІЯ 5. Логіка висловлювань. Булева алгебра

Логіка висловлювань.

Логіку як науку, створену Арістотелем (384-322 до н.с.), упродовж століть використовували для розвитку багатьох галузей знань, зокрема філософії та математики. По суті, логіка – це наука про міркування, яка дає змогу визначити істинність або хибність математичного твердження, виходячи з первинних припущень, які називають аксіомами. Логіку також застосовують в інформатиці для побудови комп'ютерних програм і доведення їх коректності. Поняття, методи й засоби логіки покладено в основу сучасних інформаційних технологій.

Висловлюванням називають розповідне речення, про яке можна сказати, що воно чи істинне, чи хибне, але не одне й інше водночас. Розділ логіки, який вивчає висловлювання та їхні властивості, називають пропозиційною логікою або логікою висловлювань.

Приклад 1. Наведемо приклади речень.

1. Сніг білий.
2. Київ — столиця України.
3. $x + 1 = 3$.
4. Котра година?
5. Читай уважно!

Два перші речення – висловлювання, решта три – ні, бо третє речення набуває істинного чи хибного значення залежно від значення змінної x , четверте та п'яте речення – не розповідні.

Значення “істина” чи “хибність”, яких набуває висловлювання, називають його значенням істинності. Значення “істина” позначають буквою T (від англ. “truth”), а “хибність” – буквою F (від “false”). Для позначення висловлювань використовують малі латинські букви з індексами чи без них. Символи, використовувані для позначення висловлювань, називають атомарними формулами чи атомами.

Приклад 2. Наведемо приклади висловлювань.

1. p : “Сніг білий”.
2. q : “Київ – столиця України”.

Тут символи p , q – атомарні формули.

Багато речень утворюють об'єднанням одного чи декількох висловлювань. Отримане висловлювання називають складним. Побудову складних висловлювань вперше розглянуто 1845 р. в книзі англійського

математика Дж. Буля (G. Boole) “The Laws of Truth”. Складне висловлювання утворюють із наявних висловлювань за допомогою логічних операцій.

У логіці висловлювань використовують п'ять логічних операцій:

- заперечення (читають “не” та позначають знаком “ $\neg$ ”),
- кон’юнкцію (читають “і (та)” й позначають знаком “ $\wedge$ ”),
- диз’юнкцію (читають “або (чи)” та позначають знаком “ $\vee$ ”),
- імплікацію (читають “якщо..., то” та позначають знаком “ $\rightarrow$ ”),
- еквівалентність (читають “тоді й лише тоді” та позначають знаком “ $\sim$ ”).
- Сложение (читають “або..., або...” та позначають знаком “ $\oplus$ ”)

Приклад 3. Наведемо приклади складних висловлювань.

1. Сніг білий, і небо теж біле.

2. Якщо погода хороша, то ми їдемо відпочивати.

У наведених прикладах логічні операції — це “і” та “якщо..., то”.

Приклад 4. Розглянемо такі висловлювання:

p: “Вологість велика”,

q: “Температура висока”,

r: “Ми відчуваємо себе добре”.

Тоді речення “Якщо вологість велика та температура висока, то ми не відчуваємо себе добре” можна записати складним висловлюванням $((p \wedge q) \rightarrow (\neg r))$.

У логіці висловлювань атом р чи складне висловлювання називають правильно побудованою формулою або формулою. Вивчаючи формули, розглядають два аспекти – синтаксис і семантику.

Синтаксис – це сукупність правил, які дають змогу будувати формули та розпізнавати правильні формули серед послідовностей символів. Формули в логіці висловлювань означають за такими правилами:

- атом – це формула;
- якщо p – формула, то $(\neg p)$ – також формула;
- якщо p та q – формули, то $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \sim q)$ – формули;
- формули можуть бути породжені тільки скінченною кількістю застосувань указаних правил.

Формули, як і атоми, позначають малими латинськими буквами з індексами чи без них.

Приклад 5. Вирази $(p \rightarrow)$, $(p \wedge)$, $(p \neg)$, $(\vee q)$ – не формули.

Часто заперечення висловлювання p позначають також $\bar{p}$. Такий спосіб запису заперечення не потребує дужок. Якщо не виникає непорозумінь, то зовнішні дужки у формулах можна випускати.

Приклад 6. Формули $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ та $((p \wedge q) \rightarrow (\neg r))$ можна записати відповідно у вигляді $p \vee q$, $p \rightarrow q$ та $(p \wedge q) \rightarrow \bar{r}$.

Семантика – це сукупність правил, за якими формулам надають значення істинності. Нехай p та q – формули. Тоді значення істинності формул $(\neg p)$, $(p \vee q)$, $(p \wedge q)$, $p \rightarrow q$ та $(p \sim q)$ так пов'язані зі значеннями істинності формул p та q :

1. Формула $(\neg p)$ істинна, коли p хибна, і хибна, коли формула p істинна. Формулу $(\neg p)$ читають “не p ” чи “це не так, що p ” та називають запереченням формули p .
2. Формула $(p \wedge q)$ істинна, якщо p та q водночас істинні. У всіх інших випадках формула $(p \wedge q)$ хибна. Формулу $(p \wedge q)$ читають “ p і q ” та називають кон’юнкцією формул p та q .
3. Формула $(p \vee q)$ хибна, якщо p та q водночас хибні. У всіх інших випадках $(p \vee q)$ істинна. Формулу $(p \vee q)$ читають “ p або q ” й називають диз’юнкцією формул p та q .
4. Формула $(p \rightarrow q)$ хибна, якщо формула p істинна, а q – хибна. У всіх інших випадках вона істинна. Формулу $(p \rightarrow q)$ називають імплікацією, атом p – припущенням імплікації, а q – її висновком. Оскільки імплікацію використовують у багатьох математичних міркуваннях, то існує багато термінологічних варіантів для формули $(p \rightarrow q)$. Ось деякі з них: “якщо p , то q ”, “з p випливає q ”, “ p лише тоді, коли q ”, “ p достатнє для q ”, “ q , якщо p ”, “ q необхідне для p ”.
5. Формула $(p \sim q)$ істинна, якщо p та q мають однакові значення істинності. У всіх інших випадках формула $(p \sim q)$ хибна. Формулу $(p \sim q)$ читають “ p тоді й лише тоді, коли q ” чи “ p еквівалентне q ” та називають еквівалентністю формул p та q .
6. Формула $(p \oplus q)$ істинна тоді і лише тоді, коли значення змінних різні. Запис читається як “ p або q ”, “або p , або q ”

Семантику логічних операцій зручно задавати за допомогою таблиць, які містять значення істинності формул залежно від значень істинності їх атомів. Такі таблиці називають таблицями істинності. Семантику введених операцій у формі таблиць істинності наведено в таблиці

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \sim q$	$p \oplus q$
T	T	F	T	T	T	T	F

T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	T
F	F	T	F	F	T	T	F

При формалізації висловлювань мови можна дати кілька рекомендацій:

- виділити зі складеного висловлювання прості висловлювання та позначити їх латинськими літерами;
- визначити, які конструкції мови відповідають операціям алгебри висловлювань та їх старшинство;
- записати логічну формулу шляхом використання позначень простих висловлювань, операцій та дужкових структур для правильного порядку застосування операцій.

Розглянемо задачу

Задача 1. Ми позначаємо через p твердження "Логіка – забава", а через q - "Сьогодні п'ятниця". Потрібно висловити кожен з наступних компонент в символічній формі.

- Логіка – не забава, а сьогодні п'ятниця.
- Сьогодні не п'ятниця, а логіка - не забава
- Логіка - це забава, або сьогодні п'ятниця.

Рішення.

- $(\neg p) \wedge q$.
- $(\neg p) \wedge (\neg q)$,
- $p \vee q$.

Задача 2. Формалізувати такий вислів: «Відсутність дощу є необхідна умова для безвітряної чи холодної погоди».

Рішення.

Виділяємо прості висловлювання і замінюємо їх латинськими літерами:

«Відсутність дощу» - a ; «Безвітряна погода» - b ; «Холодна погода» - c .

Наше висловлювання набуває вигляду: « a достатня умова для b чи c ».

Найстаршою операцією буде «достатня умова», тобто імплікація з a до « b або c ». Таким чином, правильно побудована формула для цього завдання має вигляд $a \rightarrow (b \vee c)$.

Перейдемо до розглядання логічних функцій.

Булева алгебра

Логічними (булевими) змінними називають змінні, які набувають значення 0 або 1.

Логічною називають функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, задану на множині логічних змінних $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ і яка набуває значення 0 або 1. Логічні

функції можна задати формулами або таблицями, які мають назву таблиць істинності. Область визначення логічної функції – це множина наборів, на яких вона є визначеною.

Приклад.

Область визначеності –
набори (0, 0, 0), (0, 0, 1),
(1, 0, 0), (0, 1, 1),
(1, 1, 1)

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	-
1	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	-
1	1	0	-
1	1	1	1

Основні елементарні логічні функції

1. *Інверсія* (ні, заперечення, $\neg$, доповнення). Інверсія $f(x) = \bar{x}$ –

логічна функція

однієї змінної, яка

задається таблицею істинності:

Легко

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

побачити, що $\bar{\bar{x}} = x$

2. *Кон'юнкція*

Кон'юнкція – це виразом:

(I , логічний добуток).

бінарна логічна функція, яка задається

$$f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2 = \min\{x_1, x_2\}$$

Таблиця істинності кон'юнкції має вигляд

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1 та x_2 – логічні

співмножники

3. *Диз'юнкція*

(АБО, математичне додавання).

Диз'юнкція – це бінарна логічна функція, яка задається виразом:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\}$$

Таблиця істинності має вигляд:

x_1 та x_2 – логічні

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

доданки

Інверсія, кон'юнкція, диз'юнкція – основні функції (операції) математичної логіки, тому що через них можуть бути визначені інші логічні функції (операції), наприклад, імплікація, еквіваленція, сума за mod2.

а) імплікація (логічне слідування)

$$f(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

Таблиця істинності має вигляд:

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

б) еквіваленція (функція рівнозначності)

$$f(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} \vee x_1 \wedge x_2$$

Таблиця істинності

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

в) сума за mod2 (відокремлюване АБО, строга диз'юнкція, не еквіваленція).

$$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \sim x_2} = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_1 x_2$$

Таблиця істинності

Задача. Для заданої таблиці істинності

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

логічної функції побудувати

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2} \wedge ((x_1 \vee x_3) \wedge (\overline{\overline{x_2} \wedge \overline{x_3}}))$$

Розв'язання Позначимо кожен дію окремою функцією

$$f_1 = x_1 \vee x_3, f_2 = \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}, f_3 = \overline{\overline{x_2} \wedge \overline{x_3}} = \overline{f_2}, f_4 = f_1 \wedge f_3, f_5 = \overline{x_2} \wedge f_4$$

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1	0

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке висловлювання та як вони формуються?
2. Що називається логічною функцією та як визначити область її визначеності?
3. Назвіть основні елементи логічних функцій.
4. За якими правилами будується таблиця істинності?

**ЛЕКЦІЯ 6. Нормальні форми представлення логічних функцій.
Закони алгебри Буля.**

Для представлення логічних функцій крім табличного способу використовують і представлення їх у вигляді формул, тобто аналітичного представлення. Слід зазначити, що та сама функція може мати різні аналітичні представлення. Серед різних формул для зручності порівняння їх між собою та однозначного представлення виділяють спеціальні форми:

- диз'юнктивну нормальну форму (ДНФ);
- кон'юнктивну нормальну форму (КНФ).

Для того, щоб побудувати ці форми, нам потрібно буде використовувати наступні закони алгебри Буля:

1) ідемпотентність або закон поглинання:

$$(X \wedge X) = X \quad (X \vee X) = X \quad X \wedge (X \vee Y) = X \quad X \vee (X \wedge Y) = X$$

2) комутативність:

$$(X \wedge Y) = (Y \wedge X) \quad (X \vee Y) = (Y \vee X)$$

3) асоціативність:

$$(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z) \quad (X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$$

4) дистрибутивність:

$$(X \wedge Y) \vee Z = (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \quad (X \vee Y) \wedge Z = (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$$

5) доповнювальність:

$$(X \vee \neg X) = 1 \quad (X \wedge \neg X) = 0 \quad \neg(\neg X) = X$$

6) виключення імплікації та еквівалентності:

$$X \leftrightarrow Y = (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \quad (X \rightarrow Y) = (\neg X \vee Y)$$

7) закони де Моргана:

$$\neg(X \wedge Y) = (\neg X \vee \neg Y) \quad \neg(X \vee Y) = (\neg X \wedge \neg Y)$$

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) — це диз'юнкція кон'юнкцій, утворених зі змінних та їх заперечень. ДНФ не містить дужок.

Наприклад, форми $\bar{a}\bar{b}c$, $abc\bar{b}\bar{c}$, a , $\bar{b}$ — диз'юнктивні нормальні форми, а $d(b\bar{c})$ — ні.

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) — це кон'юнкція диз'юнкцій, утворених з змінних та їх заперечень.

Наприклад, форми $(\bar{a}\bar{b})\wedge c$, $ab(c\bar{b})$, $\bar{c}$, a , $c\bar{b}$ — кон'юнктивні нормальні форми, а $a(b\bar{c})$ — ні.

Теорема 1. Теорема про ДНФ: Будь-яка логічна функція, відмінна від константи 0, може бути зведена до ДНФ.

Для отримання ДНФ необхідно:

- 1) записати булеву функцію через функції $\{V, \wedge, \neg\}$;
- 2) за допомогою законів де Моргана звільнитися від загальних заперечень та за законом подвійного заперечення зняти подвійні рисочки;
- 3) за допомогою закону дистрибутивності розкрити все дужки та провести поглинання.

Отримана форма задовольняє визначенню ДНФ.

Теорема 2. Теорема про КНФ. Будь-яка логічна функція, відмінна від константи 1, може бути зведена до КНФ.

Для того, щоб зробити це, необхідно:

- 1) записати булеву функцію у вигляді $\{V, \wedge, \neg\}$;
- 2) за допомогою законів де Моргана спустити риску заперечення до окремих літер та за законом подвійного заперечення знищити подвійні рисочки;
- 3) за допомогою закону дистрибутивності знищити все диз'юнкції кон'юнкцій та провести поглинання.

Отримана форма задовольняє визначення КНФ.

Приклад 1: Побудувати ДНФ та КНФ формули

$$F = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (y \rightarrow x)$$

Рішення:

Спочатку за допомогою властивості 6 виключимо еквівалентність

$$((x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x)) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow y))$$

далі, за допомогою цієї ж властивості, замінимо імплікацію диз'юнкцією і запереченням

$$(\neg(\neg x \vee y) \vee (\neg y \vee x)) \wedge (\neg(\neg y \vee x) \vee (\neg x \vee y))$$

а потім використовуючи закони де Моргана внесемо $\neg$ в дужки так, щоб знак заперечення стояв перед простими висловлюваннями

$$((\neg\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg y \vee x)) \wedge ((\neg\neg y \wedge \neg x) \vee (\neg x \vee y))$$

Враховуючи еквівалентність $\neg(\neg X) = X$ і закони дистрибутивності, можемо написати такий ланцюг еквівалентностей

$$((x \wedge \neg y) \vee (\neg y \vee x)) \wedge ((y \wedge \neg x) \vee (\neg x \vee y)) = ((x \vee (\neg y \vee x)) \wedge (\neg y \vee (\neg y \vee x))) \wedge (y \vee (\neg x \vee y)) \wedge (\neg x \vee (\neg x \vee y)) = (\neg y \vee (x \vee x)) \vee (\neg y \vee \neg y) \vee x)) \wedge ((\neg x \vee (y \vee y)) \wedge (\neg x \vee \neg x) \vee y)) = (\neg y \vee x) \wedge (\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee y)$$

Використовуючи закони поглинання, отримаємо

$$(\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee y)$$

Ми побудували КНФ початкової формули. Щоб отримати ДНФ, використаємо ще раз закони дистрибутивності і поглинання:

$$(\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee y) = (\neg y \wedge (\neg x \vee y)) \vee (x \wedge (\neg x \vee y)) = ((\neg y \wedge \neg x) \vee (\neg y \wedge y)) \vee ((x \wedge \neg x) \vee (x \wedge y)) = ((\neg y \wedge \neg x) \vee (x \wedge y))$$

Остання формула є ДНФ формули F

Запитання для самоконтролю:

1. Що називається диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) та по яким правилам вона будується?
2. Що називається кон'юнктивною нормальною формою (КНФ) та по яким правилам вона будується?

ЛЕКЦІЯ 7. Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ). Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ).

Якщо ДНФ функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n змінних у кожній своїй кон'юнкції містить всі n змінних чи їх заперечення, то це *досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)*. Кожна функція має одну-єдину ДДНФ, і вона може бути отримана з таблиці істинності цієї функції шляхом запису через знак логічного складання всіх наборів змінних, на яких ця функція визначена як істинна. Кожен такий набір змінних відповідає кон'юнкції, причому якщо змінна $x_i = 1$, то x_i входить до неї без заперечення, якщо $x_i = 0$, то x_i входить до неї із запереченням $\overline{x_i}$

Побудувати для функції досконали диз'юнктивну нормальну форму можна двома шляхами: за таблицею істинності і за допомогою аналітичного висновку. Аналітичний побудова для ДДНФ складається з чотирьох кроків:

- 1) привести функцію до виду ДНФ;
- 2) кожен кон'юнкцію, що містить менш ніж n змінних, логічно помножити на $1 = x_i \vee \overline{x_i}$
- 3) розкрити дужки з допомогою закону дистрибутивності;
- 4) згідно із законом ідемпотентності прибрати зайве.

Зверніть увагу: для константи 0 немає ДДНФ, так як немає жодного набору змінних, на якому вона була б визначена як істинна.

Якщо КНФ функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n змінних у кожній своїй диз'юнкції містить все n змінних чи його заперечення, то це *досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)*.

Кожна функція має одну єдину ДКНФ, і вона може бути отримана з таблиці істинності цієї функції шляхом запису через знак логічного множення всіх наборів змінних, на яких ця функція визначена як хибна. Кожен такий набір змінних відповідає диз'юнкції, причому якщо змінна $x_i = 1$, то x_i входить до неї із запереченням $\bar{x}_i$, якщо $x_i = 0$, то x_i входить до неї без заперечення x_i .

Аналітичний вивод для ДКНФ складається з чотирьох кроків:

- 1) привести функцію до виду ДНФ;
- 2) усі кон'юнкції через закон дистрибутивності перетворити до виду КНФ
- 3) до кожної диз'юнкції, де менше ніж n змінних, додати

$$x_i \wedge \bar{x}_i = 0$$

- 4) перетворити дужки за допомогою закону дистрибутивності;
- 5) згідно із законом ідемпотентності прибрати зайве.

Зверніть увагу: для константи 1 не існує ДКНФ, так як немає жодного набору змінних, на якому вона була б визначена як помилкова!

Приклад 2. Побудуємо ДДНФ і ДКНФ формули $F = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (y \rightarrow x)$.

Рішення: Спочатку побудуємо таблицю істинності цієї формули

x	y	f1=x $\rightarrow$ y	f2=y $\rightarrow$ x	f1 $\leftrightarrow$ f2
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0

Для побудови ДДНФ випишемо рядки, для яких $F = 1$ і відповідні їм елементарні кон'юнкції. Рядку (0, 0) буде відповідати елементарна кон'юнкція $(\neg x \wedge \neg y)$, а рядку (1, 1) — $(x \wedge y)$. Отже ДДНФ формули буде

$$(\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y).$$

Для побудови ДКНФ випишемо рядки, для яких $F = 0$, і для кожного такого рядка побудуємо елементарну диз'юнкцію. Потім з'єднаємо отримані одночлени через кон'юнкції і отримаємо потрібну формулу у вигляді КНФ. Отже, формула F набуває значення 0 на векторах (1, 0) і (0, 1), відповідні

елементарні диз'юнкції — $(\neg x \vee y)$ і $(x \vee \neg y)$. Таким чином ДКНФ формули F буде

$$(\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$$

Приклад 3. Побудувати ДДНФ за допомогою аналітичного вивода для функції $F(x, y, z) = (x \rightarrow y) \rightarrow \bar{z}$

Рішення.

Спочатку приведемо функцію до ДНФ

$$(x \rightarrow y) \rightarrow \bar{z} = (\text{п.6}) = \overline{(x \rightarrow y)} \vee \bar{z} = \overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{z} = (\text{п.7}) = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{z} = (x \wedge \bar{y}) \vee \bar{z}$$

Отримали ДНФ. Зараз кожен кон'юнкцію, що містить менше ніж n змінних, помножимо (кон'юнкція) на $1 = x_i \vee \bar{x}_i$

$$\begin{aligned} (x \wedge \bar{y}) \vee \bar{z} &= x \wedge \bar{y} \wedge (z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x}) \wedge (y \vee \bar{y}) \wedge \bar{z} = (\text{п.4}) = \\ &= (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) = (\text{для 2 та 5} \\ &\text{множника застосуємо п.1}) = (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee \end{aligned}$$

$$(\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}). \text{ Отримали ДДНФ}$$

Приклад 4. Побудувати ДКНФ за допомогою аналітичного вивода для функції $F(x, y, z) = (x \rightarrow y) \rightarrow \bar{z}$

Рішення.

Спочатку приведемо функцію до ДНФ. По прикладу 3 отримаємо

$$(x \rightarrow y) \rightarrow \bar{z} = (\text{п.6}) = \overline{(x \rightarrow y)} \vee \bar{z} = \overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{z} = (\text{п.7}) = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{z} = x \bar{y} \vee \bar{z}$$

останні дві формули еквівалентні, кон'юнкцію можливо записувати як $(x \wedge \bar{y})$ так $(x \bar{y})$. За допомогою п.4 отримаємо КНФ

$$x \bar{y} \vee \bar{z} = (x \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z})$$

Зараз до кожної диз'юнкції, де менше ніж n змінних, додати $x_i \wedge \bar{x}_i = 0$

$$\begin{aligned} (x \vee y \bar{y} \vee \bar{z})(x \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) &= (\text{п.4}) = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = \\ &= (\text{для 2 та 3 множника застосуємо п.1}) = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \end{aligned}$$

Отримали ДКНФ

Запитання для самоконтролю:

1. Що називається ДДНФ та ДКНФ?
2. Які існують способи побудови ДДНФ та ДКНФ?

ЛЕКЦІЯ 8. Теорія графів. Неорієнтовані графи

З поняттям графа зазвичай зв'язується його графічне представлення, при якому він зображується як множина точок, деякі з яких з'єднані лініями. Однак граф відрізняється від геометричних конфігурацій (скажімо, фігур, які також складаються з точок-вершин і ліній-сторін) тим, що в графі несуттєві відстані між точками, форма з'єднання ліній і кути між ними. Важливо лише, з'єднана дана пара точок лінією, чи ні. Тому граф іноді називають топологічним об'єктом, тобто об'єктом, властивості якого не змінюються при розтягуванні, стисненні, викривленні. З цієї ж причини (важливо лише наявність або відсутності з'єднання) граф - об'єкт дискретний і може бути заданий двома дискретними множинами: множиною точок, які будемо називати *вершинами*, і множиною ліній, що з'єднують деякі вершини. Лінії будемо називати *ребрами* або *дугами*.

Існують два основних види графів - *орієнтовані*, в яких лінії мають напрямлення від однієї вершини до іншої, і *неорієнтовані*, в яких лінії не мають напрямку.

Визначення 1. Неорієнтованим графом $G = (V, E)$ називається об'єкт, заданий парою множин (V, E) , де V – множина вершин, $E \subseteq V \times V$ – множина ребер.

Визначення 2. Орієнтованим графом (орграфом) називається граф $D = (V, E)$, де V – множина вершин, $E \subseteq V \times V$ – множина орієнтованих ребер, або дуг.

Визначення 3. Граф називається *простим*, якщо кожна пара вершин з'єднується не більше ніж одним ребром. Граф називається *мультиграфом*, якщо хоч би одну пару вершин з'єднує більш ніж одне ребро. Ребра мультиграфа, що з'єднують одну і ту ж пару вершин, називаються *кратними*.

У простому графі ребро однозначно визначається парою вершин, які воно з'єднує. У неорієнтованому графі порядок вершин в парі не важливий, тому ребра простого неорієнтованого графа визначаються як множина неупорядкованих пар вершин $(v_i, v_j) \in V \times V$. У орієнтованому графі впорядкована пара $(v_i, v_j) \in V \times V$ указує напрям дуги: від вершини v_i до вершини v_j . Вона має початок (вершину v_i , з якої дуга виходить) і кінець (вершину v_j , в яку вона заходить). У мультиграфі кожне ребро повинне мати своє власне ім'я. Вершини, що з'єднуються ребром, не обов'язково різні.

Ребро, що з'єднує вершину v_i з самої собою, тобто пара (v_i, v_i) , називається петлею.

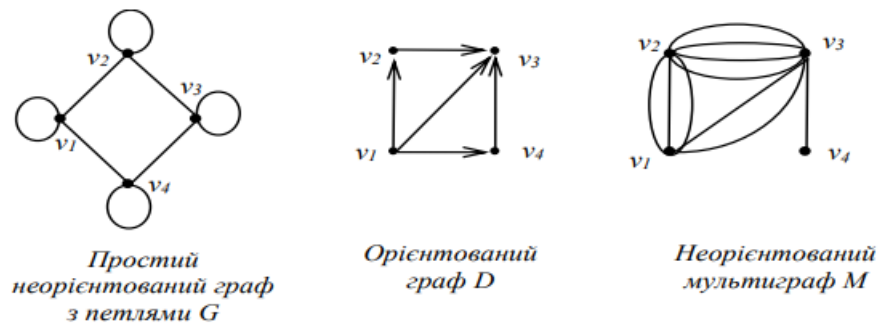


Рис.1 Приклади графів

Граф може зовсім не мати ребер: $E = \emptyset$. Такий граф називається порожнім (пустим), або 0-графом.

Для простого графа існує інший крайній випадок, коли всі вершини з'єднані між собою ребрами. Такий граф називається *повним*, причому розрізняють два види повних графів - з петлями і без петель. Повний граф з n вершинами має $(n^2 - n) / 2$ ребер (число поєднань з n по 2), якщо петлі не враховуються, і $(n^2 - n) / 2 + n = (n^2 + n) / 2$ ребер, якщо додати n петель. Повний граф з n вершинами без петель позначається K_n . Зрозуміло, що в мультиграфі обмежень на число ребер немає.

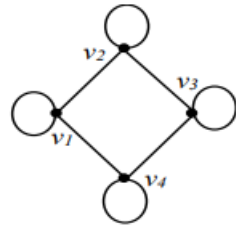
Неорієнтований граф задає два відношення між своїми елементами: відношення суміжності і відношення інцидентності.

Матриця суміжності. Суміжність - відношення між вершинами: дві вершини називаються суміжними, якщо вони з'єднані ребром. Це відношення - звичайне бінарне відношення на множині V , яке для простого графа може бути задано квадратної бінарною (тобто складається з нулів і одиниць) матрицею суміжності $A(G) = (a_{ij})$, яка визначається наступним чином:

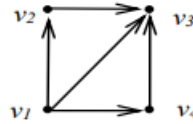
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

Відношення суміжності в неорієнтованому графі завжди симетрично, оскільки порядок вершин в парі (v_i, v_j) не важливий. Матриця суміжності порожнього графа заповнена тільки нулями, а матриця суміжності повного графа з петлями - тільки одиницями. Для мультиграфів матриця суміжності вже не є бінарною: в ній $a_{ij} = k$, де k - число кратних ребер, що з'єднують вершини v_i і v_j .

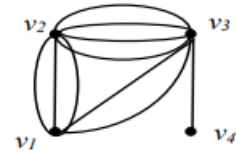
Приклад. Матриці суміжності для графів, наведених на рис.1:



Простий
неорієнтований граф
з петлями G



Орієнтований
граф D



Неорієнтований
мультиграф M

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A(M) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця інцидентності. Інцидентність - це відношення між вершинами і ребрами: ребро інцидентне кожній з вершин, яке воно з'єднує. Воно задається матрицею інцидентності C , в якій рядки позначаються іменами вершин, а стовпці - іменами ребер графа. Матриця інцидентності графа визначається як $(n \times m)$ матриця $C(G) = (c_{ij})$, у якій

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{вершина } v_i \text{ інцидентна ребру } e_j \\ 0, & \text{вершина } v_i \text{ не інцидентна ребру } e_j \end{cases}$$

Це прямокутна бінарна матриця, в якій число рядків дорівнює числу вершин графа n , а число стовпців - числу ребер m . Число ребер, інцидентних вершині v_i графа (орграфа, мультиграфа), називається степенем цієї вершини і позначається $\deg(v_i)$. Степінь вершини можна визначити за матрицями інцидентності і суміжності. Степінь вершини v_i дорівнює числу одиниць в i -му рядку матриці інцидентності або матриці суміжності.

Сума степенів усіх вершин дорівнює подвоєному числу ребер, оскільки кожне ребро бере участь в степенях двох вершин, тобто вважається в цій сумі два рази.

Вершина, степінь якої дорівнює 1, називається кінцевою, або висячою. Граф називається однорідним степені k , якщо степені всіх його вершин дорівнюють k .

Визначення 4. Граф $G' = (V', E')$ називається частиною графа $G = (V, E)$, якщо $V' \subseteq V$, а E' підмножина множини ребер G , обидва кінці яких належать V' .

Визначення 5. Граф $G' = (V', E')$ називається підграфом графа $G = (V, E)$, якщо $V' \subset V$, а E' - множина всіх ребер G , обидва кінці яких належать V' .

Множину вершин $V' \subset V$ називають такою, що породжує множину підграфа V' , а сам підграф - породженим вершинами V' .

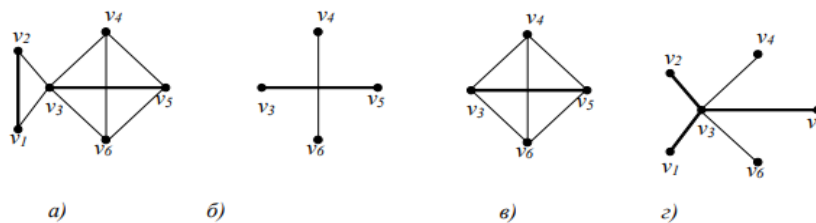
Всякий підграф графа G є частиною G , але не всяка частина - підграф (рис. 2). Підграф повністю визначається множиною V' своїх вершин і може бути побудований так: у вихідному графі G вибираємо множину вершин V' і видаляємо всі ребра такі, хоча б один кінець яких не належить V' . Частина графа - це підграф, з якого, можливо, видалити деякі ребра.

Наприклад, частина графа G на рис.2, б) містить вершини v_3, v_4, v_5, v_6 , але не містить ребер $(v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_3, v_6)$, в той час, як його підграф на рис.2, в) містить всі ребра, що з'єднують ці вершини.

Визначення 6. Частина графа, утворена вершиною v_i і всіма вершинами, суміжними з нею, називається зіркою вершини v_i .

Визначення 7. Повний підграф, породжений заданою множиною вершин, називається клікою

Приклад.



а) граф G ; б) частина графа G ;
в) підграф графа G , кліка; з) зірка вершини v_3 .

Рис.2

Визначення 8. Підграф G' графа G називається максимальним по деякій властивості, якщо G' володіє цією властивістю, а будь-який підграф графа G , що містить G' , не володіє ним. Підграф G' графа G називається мінімальним по деякій властивості, якщо G' володіє цією властивістю, а будь який підграф графа G , що міститься в G' , не володіє ним.

Наприклад, підграф на рис. 2, в) є максимальною клікою; підграф цього підграфа, породжений вершинами v_3, v_4, v_5 , також буде клікою, але не максимальної, а мінімальної клікою буде підграф, породжений двома вершинами, наприклад, v_3 і v_4 .

Запитання для самоконтролю:

1. Що називають неорієнтованим графом?
2. Назвіть два відношення якими задається неорієнтований граф та охарактеризуйте їх.
3. Що називається ступеню вершини графа?

4. Що називається підграфом, клікою та зіркою графа?

ЛЕКЦІЯ 9. Теорія графів. Орієнтовані графи

Визначення. Орієнтованим графом (орграфом) називається граф $D = (V, E)$, де V – множина вершин, $E \subseteq V \times V$ – множина орієнтованих ребер, або дуг.

У орієнтованих графах ряд понять співпадає з аналогічними для неорієнтованих графів.

Матриці суміжності та інцидентності. Для орграфа його бінарна матриця суміжності A в загальному випадку несиметрична: елемент $a_{ij} = 1$, якщо і тільки якщо є дуга $e = (v_i, v_j)$. Число одиниць в цій матриці дорівнює числу дуг графа. Якщо матриця суміжності орграфа D виявляється симетричною, то це означає, що для кожної дуги (v_i, v_j) в ньому є протилежно спрямована дуга (v_j, v_i) .

Поняття інцидентності для орграфів зберігається, проте в матриці інцидентності C розрізняють початок і кінець дуги. Матрицею інцидентності орграфа D називається $(n \times m)$ матриця $C(D) = (c_{ij})$, у якій

$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ є кінцем дуги } e_j \\ -1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ є початком дуги } e_j \end{cases}$

Приклад:

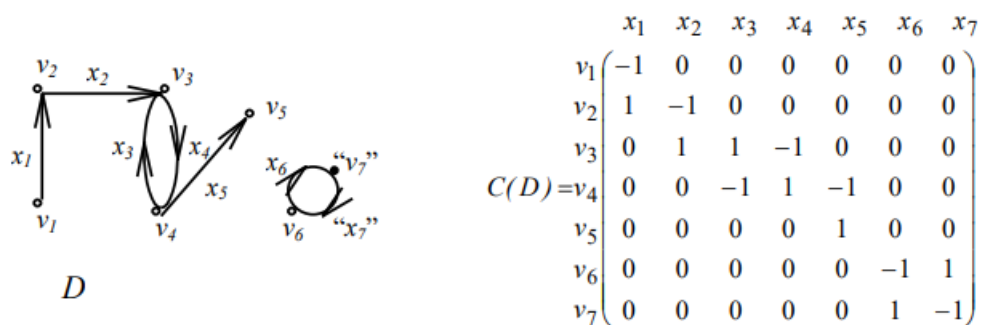


Рис.3

У кожному стовпці матриці інцидентності знаходиться рівно дві одиниці: 1 і -1. Вершина v_6 на рис. має петлю. Щоб відобразити її в матриці інцидентності, вводиться додаткова фіктивна вершина v_7 і петля ділиться на дві дуги: x_6 і x_7 .

Необхідність враховувати орієнтацію дуг в орграфі призводить до розщеплення поняття "ступінь вершини" на дві частини. *Напівстепені заходу*

$\deg^+(v_i)$ вершини v_i називається число дуг, що входять в v_i ; *напівстепені результату* $\deg^-(v_i)$ - число дуг, що виходять з неї. Напівстепені результату v_i дорівнює числу одиниць в i -му рядку матриці суміжності, напівстепені заходу v_i - числу одиниць в i -му стовпці матриці суміжності. Напівстепені заходу i результату легко визначаються і по матриці інцидентності: сума позитивних одиниць в i -му рядку визначає напівстепені заходу вершини v_i , а негативних - виходу. Загальна сума дає степінь вершини:

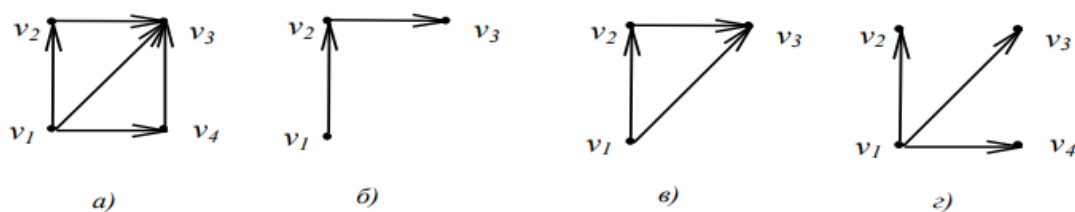
$$\deg(v_i) = \deg^+(v_i) + \deg^-(v_i)$$

Поняття підграфа для орграфа залишається тим же. Поняття зірки, як і степінь, розщеплюється на дві частини. Напівзірка заходу вершини v_i - це підграф, який визначається вершиною v_i і всіма вершинами, з яких дуги заходять в вершину v_i . Напівзірка виходу вершини v_i - це підграф, який визначається вершиною v_i і всіма вершинами, в які з v_i йдуть дуги.

Отже, графи і орграфи можуть бути задані трьома способами:

- безпосереднім завданням множин вершин V і дуг E (наприклад, списком);
- матрицею суміжності та матрицею інцидентності (правда, мультиграф матрицею суміжності не може бути заданий однозначно, оскільки ця матриця не містить імен ребер);
- малюнком.

Приклад.



а) - орієнтований граф D ; б) - частина графа D , в) - підграф графа D , породжений вершинами v_1, v_2, v_3 ; з) – напівзірка виходу вершини v_1 .

Рис. 4.

Коли два графа однакові? Для перших двох способів завдання відповідь проста: коли збігаються їх описи - списки вершин і ребер або матриці. Візуально, за малюнком, визначити, чи однакові графи, складніше. Один і той

же граф можна зобразити різними малюнками, по різному розташувавши вершини і надавши ребрам різну геометричну форму і довжину.

Наприклад, графи D_1 і D_2 на рис. 5 геометрично однакові. Однак вони відрізняються нумерацією вершин, через що матриці суміжності і списки дуг у них будуть різні. Наприклад, дуга (v_1, v_3) є в першому графі, але відсутня у другому: замість неї з'явилася дуга (v_4, v_2) . Тому множини дуг цих графів різні і, згідно з визначенням 2, різні самі графи

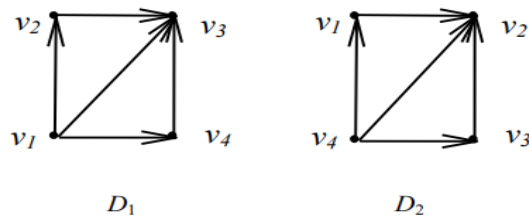


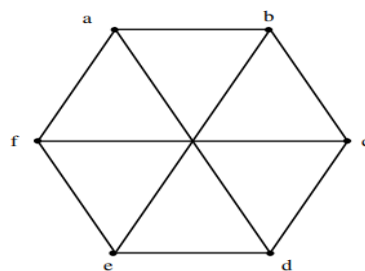
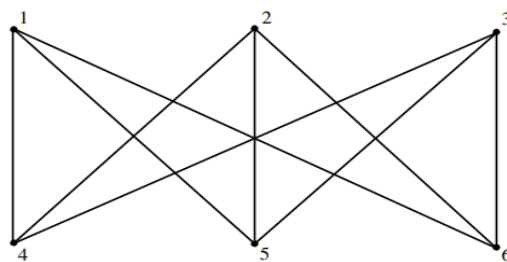
Рис.5

Графи, які відрізняються тільки нумерацією вершин (і які, отже, при деякій іншій нумерації можна зробити однаковими), називаються *ізоморфними*. Ізоморфізм графів з невеликим числом вершин іноді можна безпосередньо побачити на малюнку, однак, в загальному випадку проблема встановлення ізоморфізму графів виявляється складною в обчислювальному відношенні задачею.

Визначення. Два простих графа $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ називаються ізоморфними, якщо існує бієкція між множинами вершин:

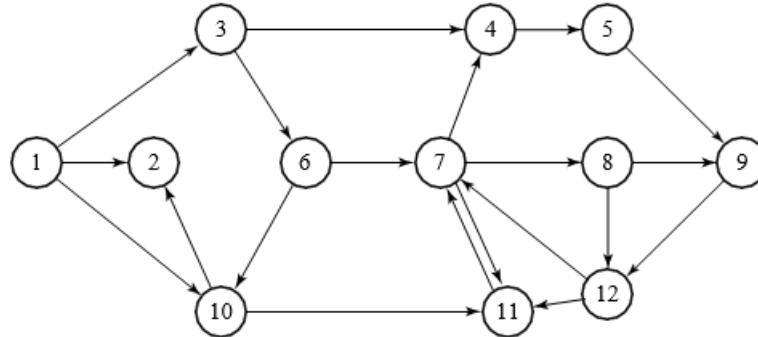
$\varphi : V_1 \leftrightarrow V_2$, така, що вершини $v, v_1 \in V_1$ суміжні $\Leftrightarrow$ вершини $\varphi(v), \varphi(v_1) \in V_2$ суміжні

Приклад: Розглянемо два графи G_1 і G_2 .



Обидва вони є графами степеня 3 і як бачимо картинки суттєво різняться, але насправді ці графи ізоморфні. Ізоморфізм визначає наступна бієкція $\varphi : 1 \rightarrow a, 2 \rightarrow c, 3 \rightarrow e, 4 \rightarrow f, 5 \rightarrow d, 6 \rightarrow b$.

Задача. Дано орієнтований граф, заданий графічним способом



Задати граф : а) за допомогою матриці суміжності

б) за допомогою матриці інцидентності.

Розв'язок. В графі 12 вершин.

А) Побудова матриці суміжності.

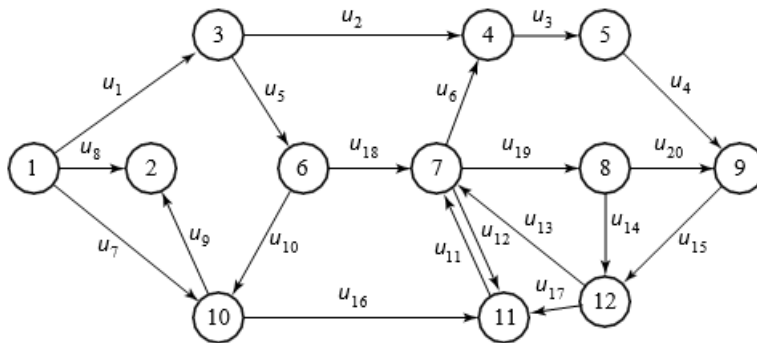
Спочатку збудуємо матрицю розмірності 12×12 , по вертикалі та горизонталі перерахувавши вершини v_i . Розглянемо вершину v_1 . Як видно з графічного представлення графа, з v_1 виходять дуги, що приходять у вершини v_2, v_3, v_{10} , тому у відповідних комірках рядка v_1 ставимо одиниці. Далі розглянемо вершину v_2 за тією ж схемою і т.д.

Продовжуючи цей алгоритм для всіх вершин, отримаємо матрицю суміжності

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
v_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
v_7	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
v_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
v_{11}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
v_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0

Б) Побудова матриці інцидентності.

Спочатку потрібно пронумерувати всі дуги вихідного графа.



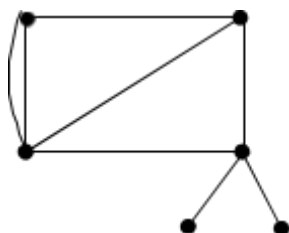
Можливу нумерацію ребер графа запропоновано на рис. Далі побудуємо матрицю розмірності 20×12 , рядками перерахувавши дуги u_i , а стовпцями — вершини v_j . Розглянемо вершину v_1 : вона є початком дуг u_1 , u_7 та u_8 , тому у відповідних рядках стовпця v_1 проставляємо одиниці. Вершина v_3 є початком дуг u_2 і u_5 і кінцем для дуги u_1 , тому у комірках матриці на перетині u_2 , u_5 та v_3 проставляємо одиниці, а на перетині u_2 та v_3 — мінус одиниці. Продовжуючи такий розбір стовпців для інших вершин графа, отримуємо матрицю інцидентності., подану в табл.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
u_1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
u_4	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0
u_5	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
u_6	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0
u_7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
u_8	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_9	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
u_{10}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
u_{11}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
u_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0
u_{13}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
u_{14}	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0

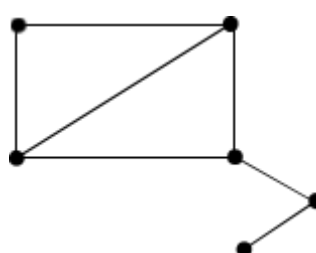
u_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1
u_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
u_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
u_{18}	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
u_{19}	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
u_{20}	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0

Задача. Які з наведених графів ізоморфні?

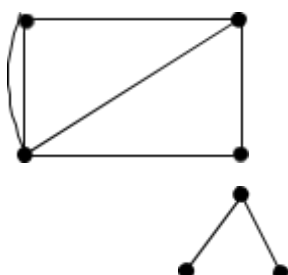
а)



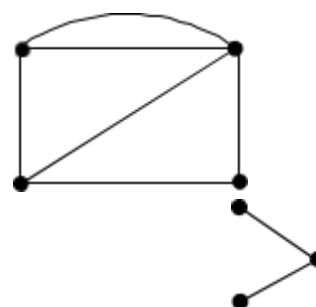
б)



в)



г)

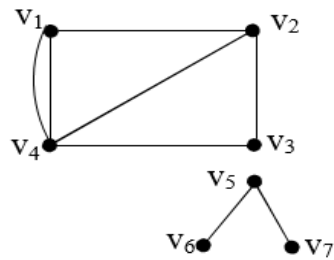


Розв'язок. Ізоморфні графи мають однакову кількість вершин. Тому треба порівнювати графи *а* та *б*, а також *в* та *г*. Але граф *а* має дві висячі вершини, а граф *б* – одну. Тому вони не можуть бути ізоморфними.

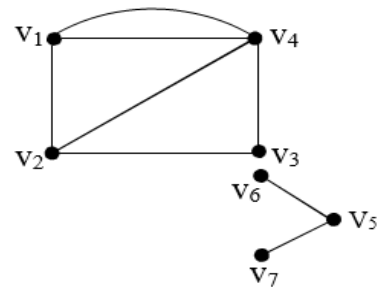
Розглянемо графи *в* і *г*. Кількість вершин і кількість ребер у них однакові. Обидва графи мають по дві висячі вершини. Позначимо вершини графів і знайдемо відповідні вершини, враховуючи степені вершин.

Матриці суміжності обох графів мають вигляд:

е)



з)



0	1	0	2	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0

Відповідь: ϵ і z є ізоморфними.

Запитання для самоконтролю:

1. Що називається орієнтованим графом?
2. Які є способи описання графів?
3. Охарактеризуйте поняття матриці суміжності та матриці інцидентності для орієнтованого графа.
4. Що називають ізоморфізмом графів?

ЛЕКЦІЯ 10. Шляхи і зв'язність в неорієнтованих графах

Визначення. Шлях P_i в неорієнтованому графі – це послідовність ребер $(v_{i0}, v_{i1}), (v_{i1}, v_{i2}), \dots, (v_{i,n-1}, v_{in})$, така, що будь-які два сусідні ребра різні і мають загальну інцидентну ним вершину. Вершина v_{i0} називається початком шляху, вершина v_{in} – кінцем шляху.

Шлях можна задати також послідовністю вершин, не указуючи ребер, наприклад: $v_{i0}, v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i,n-1}, v_{in}$. У мультиграфі при завданні шляху потрібно вказувати імена ребер. Число ребер у шляху P називається його *довжиною* і позначається $l(P)$.

Очевидно, що, якщо в неорієнтованому графі існує шлях з v_{i0} в v_{in} , то існує шлях з v_{in} в v_{i0} , – це той же шлях, пройдений у зворотному напрямі.

Шлях називається *циклічним*, або просто циклом, якщо $v_{i0} = v_{in}$. Цикл називається *простим*, якщо будь-яка вершина графа зустрічається в ньому не більше одного разу. Цикл називається *повним*, якщо в нього входять всі вершини графа.

Одне і те ж ребро може зустрічатися на шляху декілька разів. Шлях називається *ланцюгом*, якщо кожне ребро зустрічається в ньому не більше одного разу, і *простим ланцюгом* (або простим шляхом), якщо будь-яка вершина графа зустрічається в ньому не більше, ніж один раз. Простий ланцюг – це ланцюг, який не перетинає сам себе.

Визначення. Вершини v_i і v_j називаються зв'язаними, якщо існує шлях з початком в v_i і кінцем в v_j . В цьому випадку говорять також, що вершина v_j досяжна з вершини v_i . Кожна вершина за визначенням пов'язана сама з собою шляхом нульової довжини.

Визначення. Неорієнтований граф називається зв'язним, якщо всі його вершини зв'язані між собою.

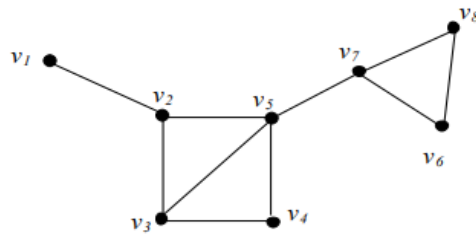
Зв'язаність - це бінарне відношення на множині вершин. Воно рефлексивно (кожна вершина пов'язана сама з собою за визначенням), симетрично (для кожного шляху є зворотний шлях) і транзитивне. Транзитивність означає, що якщо є шлях з v_i в v_j і шлях з v_j в v_k , тобто є шлях з v_i в v_k . Це очевидно: щоб отримати такий шлях, досить до послідовності ребер, що веде з v_i в v_j , приписати праворуч послідовність ребер, що веде з v_j в v_k .

Таким чином, відношення зв'язаності є відношенням еквівалентності на множині вершин графа G і розбиває цю множину на неперетинаючі підмножини - класи еквівалентності. Всі вершини одного класу пов'язані між собою, вершини з різних класів між собою не пов'язані. Максимальний зв'язний підграф графа G називається *компонентой зв'язності графа G* . Зв'язний граф складається з однієї компоненти зв'язності.

Теорема. Якщо дві вершини зв'язані між собою, то існує простий ланцюг, що зв'язує їх.

Визначення Вершина графа називається *точкою зчленування*, якщо її видалення збільшує число зв'язних компонент графа. Граф називається *роздільним*, якщо він містить хоч би одну точку зчленування, і *нероздільним*, якщо він не містить таких точок. Максимальні нероздільні підграфи графа називаються його блоками. Ребро між точками зчленування – міст або перешийок.

Наприклад, в графі G на рис. 1 вершини v_5, v_2, v_7 – точки зчленування, ребро (v_5, v_7) – перешийок.



Точки зчленування в неорієнтованому графі.

Рис.1

Теорема. Вершина v_i є точкою зчленування зв'язного графа G , тоді і тільки тоді, якщо існують такі вершини v_j і v_k , відмінні від v_i , що будь-який шлях між ними проходить через v_i .

Відстані. Діаметр, радіус, центр.

Визначення У неорієнтованому графі відстанню $d(v_i, v_j)$ між вершинами v_i і v_j називається мінімальна з довжин простих ланцюгів, що зв'язують ці вершини. Оскільки за визначенням кожна вершина пов'язана сама з собою, то $d(v_i, v_i)=0$.

Відстань $d(v_i, v_i)$ задовольняє аксіомам метрики:

$d(v_i, v_j) \geq 0$, причому $d(v_i, v_i) = 0$, якщо і тільки якщо $v_i = v_j$;

$d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$;

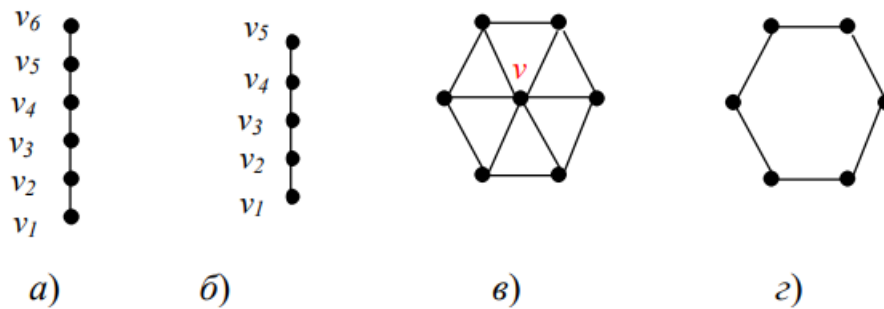
$d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k)$ (нерівність трикутника).

Визначення. Діаметром $d(G)$ графа G називається максимальна з відстаней між його вершинами:

$$d(G) = d(v_i, v_j)$$

Максимальним видаленням від вершини v_i називається величина $r(v_i) = d(v_i, v_j)$. Вершина v називається центром графа G , якщо $r(v)$ мінімально серед інших вершин графа: $r(v) = r(v_i)$. Максимальне видалення $r(v)$ від центру v називається радіусом графа G і позначається $r(G)$. Вершини з максимальним видаленням $r(v)$, що співпадає зі значенням діаметру, називаються периферіями.

Число центрів і співвідношення між радіусом і діаметром в графі можуть бути різними. У повному неорієнтованому графі діаметр і радіус рівні одиниці, і всі вершини – центри, і одночасно периферії. Якщо граф G - простий ланцюг з непарним числом $2n + 1$ вершин, то $n + 1$ -а від початку вершина - єдиний центр, $d(G) = 2n$, $r(G) = n$. Якщо ж граф G - простий ланцюг з парним числом $2n$ вершин, то n -а і $n + 1$ -а від початку вершини - два центри, $d(G) = 2n - 1$, $r(G) = n - 1$. Периферіями в обох випадках будуть перша і остання вершини.



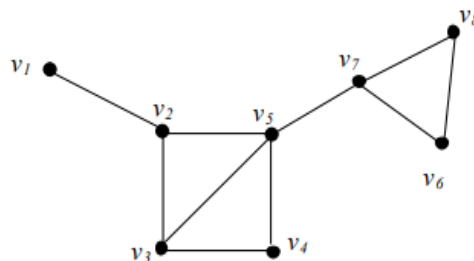
Приклади графів.

Рис. 2

Приклад.

Діаметр графа на рис.2 а) дорівнює 5, радіус - 3; в графі два центри: вершини v_3, v_4 . Діаметр графа на рис.2 б) дорівнює 4, радіус - 2; вершина v_3 - центр графа. У графі на рис. 2, в) топологічно еквівалентній окружності, діаметр $d(G) = 2$, радіус $r(G) = 1$, тобто діаметр, як і в колі, в два рази більше радіуса; вершина v - центр. У графі на рис.2 г) $d(G) = 3$, радіус $r(G) = 3$, і всі вершини - центри.

Приклад. Побудуємо матрицю відстаней для графа, що зображено на рисунку 1.



Точки зчленування в неорієнтованому графі.

Знаходимо максимальні віддалення та визначаємо діаметр $d=4$ та радіус графа $r=2$; відповідно центр - v_5 , а периферії - v_1, v_6, v_8 .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	$r(v_i)$
v_1	0	1	2	3	2	4	3	4	4
v_2	1	0	1	2	1	3	2	3	3

v_3	2	1	0	1	1	3	2	3	3
v_4	3	2	1	0	1	3	2	3	3
v_5	2	1	1	1	0	2	1	2	2
v_6	4	3	3	3	2	0	1	1	4
v_7	3	2	2	2	1	1	0	1	3
v_8	4	3	3	3	2	1	1	0	4

Запитання для самоконтролю.

1. Що називають шляхом та довжиною шляха у неорієнтованому графі?
2. Який граф називають зв'язним?
3. Охарактеризуйте поняття діаметра, центра та радіуса графа?

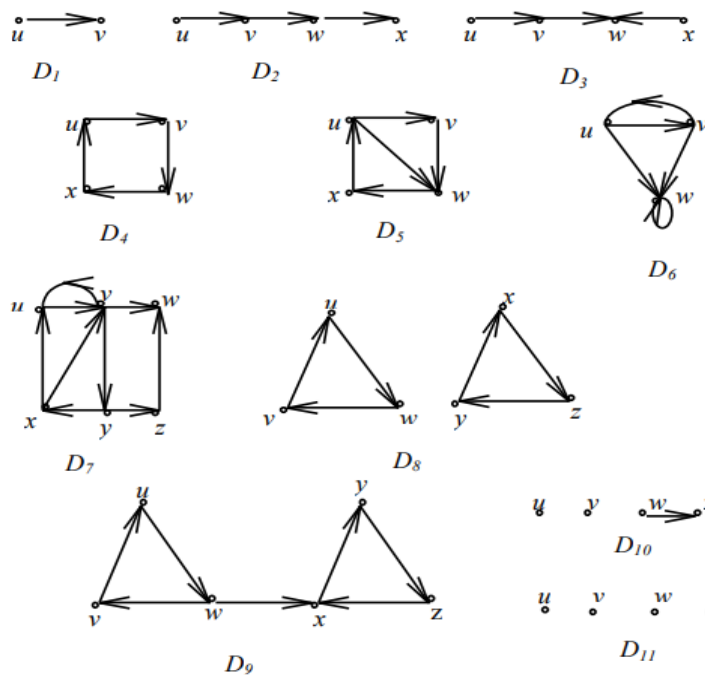
ЛЕКЦІЯ 11. Досяжність в оргграфі. Типи зв'язності оргграфів. Критерії зв'язності оргграфів

Визначення. Шлях P_i в орієнтованому графі - це послідовність дуг $(v_{i0}, v_{i1}), (v_{i1}, v_{i2}), \dots, (v_{i(n-1)}, v_{in})$, така, що кінець будь-якої дуги збігається з початком наступної. Вершина v_{i0} називається початком шляху, вершина v_{in} - кінцем шляху.

Інше позначення шляху - послідовність вершин $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$, які з'єднані дугами в напрямку стрілок. Надалі ми саме так і будемо позначати шлях в оргграфі. Поняття циклу, ланцюга, простого ланцюга, довжини шляху і циклу без зміни переносяться на оргграфи. (Цикл в оргграфі називають інакше контуром).

На рис. 3 зображено кілька оргграфов. У оргграфі D_7 u, v, w - простий ланцюг, а u, v, u, x, v, w - ланцюг, який не є простим, оскільки вершина v зустрічається в ній двічі. Шлях u, v, u, x, u є простим циклом, але не повним циклом. Шлях u, v, w, x, u в графі D_4 є циклом; він є також простим циклом. У графі D шлях u, v, u є циклом.

Інші поняття, і, перш за все, зв'язність і досяжність, істотно змінюються для оргграфів.



Приклади орграфів.

Рис.3

Визначення. Вершина v_j досяжна з вершини v_i , якщо існує шлях з початком в v_i і кінцем в v_j . За визначенням вважаємо, що будь-яка вершина досяжна з себе самої. Для орграфів вірне твердження.

Теорема. Якщо вершина v_j досяжна з вершини v_i , то існує простий шлях з v_i в v_j .

Визначення. *Напівшлях* в орієнтованому графі – це послідовність ребер, така, що будь-які два сусідні ребра різні і мають загальну інцидентну їм вершину. Інакше кажучи, напівшлях – це шлях, який проходить без урахування орієнтації ребер. Кажуть, що вершини u і v в орграфі *поєднані*, якщо v можна досягти з u , не обов'язково дотримуючись напрямку в дугах, тобто, якщо між ними існує напівшлях

Відношення досяжності між вершинами в орграфі несиметрично: якщо v_j досяжна з v_i , то v_i не обов'язково досяжна з v_j . Однак напівшлях з v_j в v_i в цьому випадку існує завжди. Можливий випадок, коли між вершинами немає шляху ні в одну, ні в іншу сторону, але є напівшлях. Наприклад, на рис. 3 в графі D_3 не існує шляху з вершини u в вершину x , однак існує напівшлях u, v, w, x .

У зв'язку з несиметричністю відношення досяжності, відстань між двома вершинами орграфа $d(u, v)$ не задовольняє всім аксіомам метрики. Зокрема, воно не обов'язково симетрично: в загальному випадку $d(u, v) \neq d(v, u)$. Як приклад розглянемо оргграф D_7 на рис. 3: $d(x, v) = 1$,

$d(v, x) = 2$. При відсутності шляху між двома вершинами відстань вважається або невизначеною, або нескінченною. Наприклад, в графі D_7 відстань $d(w, u)$ не визначена.

Нерівність трикутника має місце в тому випадку, якщо вершина v досяжна з u і w досяжна з v . Дійсно, нехай $d(u, v) = s$, $d(v, w) = t$ і $u, u_2, u_3, \dots, u_s, v$ - найкоротший шлях з u в v , $a, v, v_2, v_3, \dots, v_t, w$ - найкоротший шлях з v в w . Тоді $u, u_2, u_3, \dots, u_t, w$ - шлях довжини $s + t$ з u в w , і ми робимо висновок, що $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Види зв'язності орграфів

В оргграфа існують різні види зв'язності, які описуються наступним визначенням.

Визначення .

1. Оргграф $D = (V, E)$ називається *сильно зв'язним*, або *сильним*, якщо будь-які дві його вершини досяжні одна з одною (тобто якщо між ними існують шляхи в обидві сторони).

Приклад. Оргграфи D_4, D_5 на рис. 3 сильно зв'язні, тоді як інші оргграфи – ні. Наприклад, в оргграфі D_9 вершини x, y, z недосяжні з вершин u, v, w .

2. Оргграф називається *односторонньо зв'язаним*, або *одностороннім*, якщо для будь-якої пари вершин хоча б одна досяжна з іншою, тобто якщо існує шлях між ними хоча б в одну сторону.

Наприклад, оргграфи D_1, D_2, D_9 на рис. 3 односторонньо зв'язні. Оргграф D_3 не односторонній, так як вершини u і x недосяжні одна для одної.

3. Оргграф називається *слабо зв'язаним*, або *слабким*, якщо кожна пара вершин поєднувані, тобто, якщо між будь-якою парою вершин існує напівшлях.

Наприклад, оргграф D_3 на рис. 3 слабо зв'язний, тоді як оргграф D_8 – ні, так як вершини u і x не поєднувані.

4. Оргграф називається *незв'язним*, якщо між деякою парою вершин немає напівшляху (тобто якщо він не є слабо зв'язаним).

Приклади незв'язних графів на рис. 3: D_8, D_{10}, D_{11} .

Критерії зв'язності

Перевірка сильної, слабкої або односторонньої зв'язності шляхом безпосереднього використання визначень може виявитися дуже трудомісткою, оскільки в оргграфі з n вершинами є $(n(n-1))/2$ пар вершин. Наведемо критерії приналежності до кожного з трьох класів орграфів: сильних, односторонніх і слабких.

У сильно зв'язкового графі будь-яка вершина v_i входить принаймні в один цикл, утворений шляхами з v_i в деяку іншу вершину v_j і назад з v_j в v_i . Цикли, що проходять через v_i і інші вершини графа, необов'язково всі різні. Зокрема, сильно зв'язний граф, що містить n вершин, може являти собою один простий цикл, що проходить через всі вершини.

Теорема. Орграф сильно зв'язний тоді і тільки тоді, коли в ньому є повний цикл, тобто цикл, що проходить через всі вершини.

Теорема. Орграф D односторонньо зв'язний тоді і тільки тоді, коли в ньому є повний шлях.

В якості ілюстрації цієї теореми зауважимо, що оргграф D_7 на рис. 3 односторонньо зв'язний, тому що в ньому є повний шлях x, u, v, y, z, w . Граф D_2 також односторонньо зв'язний

Теорема. Орграф D слабо зв'язний тоді і тільки тоді, коли в ньому є повний напівшлях.

Для ілюстрації цієї теореми зауважимо, що оргграф D_3 на рис. 3 – слабо зв'язний, оскільки послідовність вершин u, v, w, x утворює повний напівшлях. При цьому він не є одностороннім, так як в ньому не існує повного шляху. Граф D_9 є слабо зв'язаним і одностороннім

Запитання для самоконтролю:

1. Що називають шляхом в оргграфі?
2. Охарактеризуйте поняття досяжності для оргграфа?
3. Що називають зв'язністю в оргграфі та які вона має види?
4. Назвіть критерії зв'язності оргграфа.

ЛЕКЦІЯ 12. Ейлерові графи. Гамільтонів цикл. Дерева

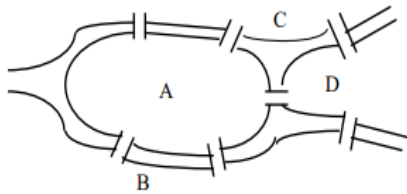
Ейлерові графи

Визначення. Ейлеровим обходом, або ейлеровим циклом, в неорієнтованому графі (мультиграфі) називається цикл, який містить всі ребра графа в точності по одному разу. Граф називається *ейлеровим*, якщо в ньому існує ейлерів обхід, тобто існує замкнутий ланцюг що містить всі ребра графа.

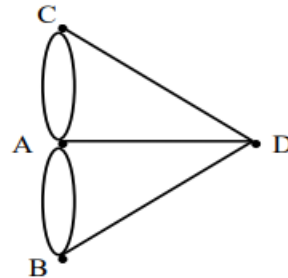
Визначення. Граф, що містить ланцюг, що проходить через усі ребра називається напівейлеровим.

Не будь-який граф – ейлерів. Це встановив математик Л.Ейлер, займаючись задачею про Кенігсберзькі мости. У місті Кенігсберзі за часів Ейлера було сім мостів (див. рис. 1). Задача полягає в тому, щоб пройти кожен

міст по одному разу і повернутися в початкову точку. Ейлер звів цю задачу до задачі знаходження обходу графа на рис. 2 і показав, що вона не має рішення. Необхідні і достатні умови існування ейлерова обходу він сформулював в наступній теоремі.



Кенігсбергські мости.



*Граф до задачі про
Кенігсбергські мости.*

Рис 1.

Рис 2.

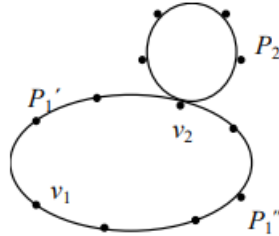
Теорема. (Л. Ейлер, 1736 р.). Неорієнтований граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли він зв'язний, і степені всіх його вершин – парні.

Доведення.

Необхідність. Нехай G - Ейлеров граф. Ейлеров обхід цього графа такий, що проходячи через кожную його вершину, входить в неї по одному ребру, а виходить по іншому. Це означає, що кожна вершина інцидентна парному числу ребер ейлерова циклу, а оскільки такий цикл містить всі ребра графа G , то це означає парність степенів усіх вершин.

Достатність. Припустимо тепер, що степені вершин графа G парні. Нехай ланцюг P_1 починається з довільної вершини v_1 . Будемо продовжувати ланцюг, наскільки можливо, вибираючи кожного разу нове ребро. Так як степені всіх вершин парні, то, потрапивши в чергову відмінну від v_1 вершину, ми завжди будемо мати в розпорядженні ще не пройдене ребро. Тому ланцюг P_1 можна продовжити шляхом додавання цього ребра. Таким чином, побудова ланцюга P_1 закінчиться в вершині v_1 , тобто P_1 неодмінно буде циклом. Якщо виявиться, що P_1 містить всі ребра графа G , то це буде необхідний Ейлеров цикл. В іншому випадку, видаливши з графа G всі ребра циклу P_1 , розглянемо граф G_1 , отриманий в результаті такої операції. Оскільки P_1 і G мали вершини тільки парних степенів, то, очевидно, і G_1 буде володіти тою же властивістю. Крім того, в силу зв'язності графа G , граfi P_1 і G_1 повинні мати хоча б одну загальну вершину v_2 . Тепер, починаючи з вершини v_2 , побудуємо цикл P_2 в графі G_1 подібно до того, як будували цикл P_1 . Позначимо через P_1' , P_1'' частини циклу P_1 від v_1 до v_2 і від v_2 до v_1 відповідно. Отримаємо новий цикл

$P_3 = P_1' \cup P_2 \cup P_1''$, який, починаючись в v_1 , проходить по ребрах ланцюга P_1' до v_2 , а потім обходить всі ребра циклу P_2 і, нарешті, повертається в v_1 по ребрах ланцюга P_1'' (рис.3). Якщо цикл P_3 ні Ейлеров, тобто містить ще не всі ребра графа, то, виконавши аналогічні побудови, отримаємо ще більший цикл, і т. п. Цей процес закінчиться побудовою ейлерова циклу.



Граф до доведення теореми Ейлера.

Рис.3.

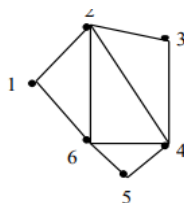
Теорема: Неорієнтований граф є напівейлеровим тоді і тільки тоді, коли він зв'язний, і коли він має точно дві вершини непарного степеня.

Доведення:

Достатність: Вершинами непарного степеня напівейлерового графа можуть бути лише початок та кінець напівейлерового ланцюга, а тому їх не більше двох.

Необхідність: Приєднаємо до графа додаткову вершину і сполучимо її двома ребрами з двома вершинами непарного степеня. Степінь кожної вершини отриманого графа є парною і за попередньою теоремою існує ейлеровий цикл. Прибравши введену вершину і два ребра отримаємо ланцюг, який проходить усі ребра.

Приклади. На рис. 4 показаний Ейлеров граф. Крім задачі про Кенігсбергські мости, відомий ряд інших старовинних цікавих задач і головоломок, вирішення яких зводиться до з'ясування питання, чи є граф ейлеровим. В одній з них потрібно окреслити фігуру, іменовану шаблями (знаком) Магомета (рис. 5), не відриваючи олівця від паперу і не повторюючи ліній.



Ейлеров граф.

Рис.4



Шаблі Магомета.

Рис.5

Гамільтонів цикл

Визначення. Цикл в неорієнтованому графі називається гамільтоновим, якщо він містить всі вершини графа в точності по одному разу. Граф називається гамільтоновим, якщо в ньому існує гамільтонів цикл. Граф, що містить простий ланцюг, що проходить через усі вершини називається напівгамільтоновим.

Задача знаходження гамільтонів циклу, поставлена англійським математиком Гамільтоном, при всій схожості її формулювання із задачею про ейлеров обход, виявляється набагато складнішою. Прості критерії існування гамільтонів циклу невідомі. В той же час інтерес до її рішення великий, оскільки вона має природну прикладну інтерпретацію. Якщо розглядати граф як транспортну мережу, вершини якої – міста, а ребра – шляхи між містами, то задача про гамільтонів цикл виявляється окремим випадком відомої “задачі про комівояжера”: об'їхати всі міста, побувавши в кожному рівно один раз і повернутися в початкове місто. Складніша постановка цього завдання пов'язана з випадком, коли різні шляхи мають різну ціну у вартості або тривалості; тоді потрібно знайти обхід всіх міст з мінімальною ціною.

Необхідні умови існування Гамільтонових графів поки не знайдені. Наступні теореми визначають достатні умови існування гамільтонових графів (це тільки дві з деякої множини теорем та умов, але всі вони - достатні).

Теорема Дірака. Якщо в графі $G(V, E)$ з $n \geq 3$ вершинами $\forall v \in V \deg(v) \geq n/2$, то граф G є гамільтоновим.

Теорема Оре. Якщо $n \geq 3$ і $\deg u + \deg v \geq n$ для будь-яких двох різних несуміжних вершин u і v неорієнтованого графа G , то G - гамільтонів граф.

Легко бачити, що повні графи - Гамільтонові, а однозв'язні графи не є Гамільтоновими. Будь-який граф, що містить точку зчленування - є однозв'язний, тобто графи з точками зчленування, перешийками - негамільтонові

Незважаючи на те, що існує критерій для визначення Ейлерова графа і такий відсутній для Гамільтонових графів, більшість графів – Гамільтонові.

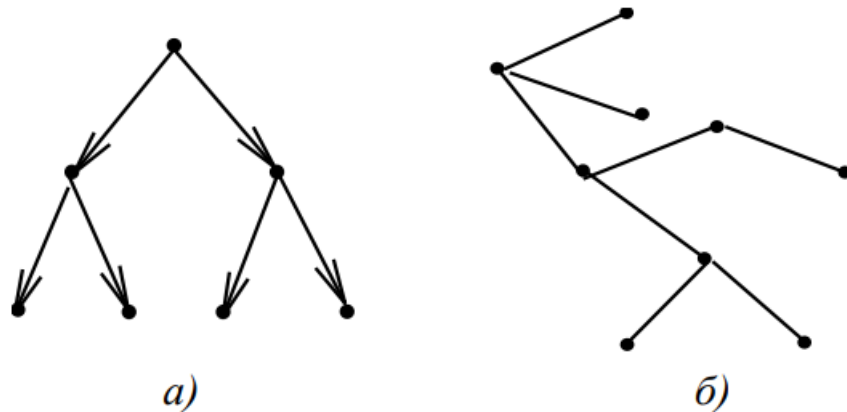
Дерева

Визначення. Зв'язний неорієнтований граф без циклів називається неорієнтованим деревом. Незв'язний граф, що складається з декількох дерев, називається лісом.

Визначення. Зв'язний оргграф, що не містить циклів, в якому тільки одна вершина не має вхідних дуг, а всі інші вершини мають по одній дузі, що входить, називається орієнтованим, або спрямованим деревом.

Визначення. Вершина, яка не має вхідних дуг, називається коренем дерева. Вершини, які не мають дуг, що виходять, називаються кінцевими, або термінальними, або листям. Проміжні вершини, що лежать між коренем і листям, називаються транзитними.

Орієнтовані дерева часто зображують без стрілок, попередньо обумовивши, що це зростаюче вниз (або вгору) дерево. На рис. 6 а) зображено зростаюче вниз дерево, на рис.6 б) – неорієнтоване дерево



Приклади дерев.

Рис.6

Наступна теорема описує основні властивості дерев.

Теорема

1. У будь-якому дереві є, принаймні, дві кінцеві вершини (вершини ступеня 1).
2. Між будь-якими двома вершинами дерева є рівно один шлях.
3. Число ребер у дереві з n вершинами дорівнює $n - 1$.

Доведення.

1) Оскільки в дереві всі шляхи - прості, то в ньому є принаймні один максимальний шлях, тобто шлях, який не можна продовжити. Кінці цього шляху і є кінцевими вершинами.

2) Наявність шляху між будь-якою парою вершин впливає зі зв'язності дерева, а єдиність цього шляху – з того, існування двох шляхів між парою вершин завжди створює цикл.

3) Третій пункт теореми найпростіше довести, ввівши процедуру перетворення неорієнтованого дерева в орієнтоване. Виберемо в дереві довільну вершину. Назвемо її коренем. Ребра, інцидентні кореню, орієнтуємо в напрямку від кореня. Для кожної вершини v_i , що є кінцем одного з цих

ребер, орієнтуємо інші інцидентні їй ребра в напрямку від v_i . Продовжуємо цю процедуру до тих пір, поки не будуть досягнуті кінцеві вершини. В силу єдиності шляху між вершинами жодна вершина не буде досягнута двічі (тобто не доведеться орієнтувати вже орієнтовані ребра), а в силу зв'язності дерева все вершини будуть досягнуті. З цієї процедури видно, що корінь не має вхідних ребер (його напівстепень заходу дорівнює 0), а кожна з інших $n-1$ вершин має одне вхідне ребро. Оскільки всі ребра є вхідними для якоїсь вершини, то звідси і випливає п.3 теореми.

З одного неорієнтованого дерева з n вершинами можна отримати рівно n різних орієнтованих дерев, так як вибір різних коренів завжди дає різні ордерова. Однак різні ордерова, отримані з одного і того ж дерева, можуть виявитися ізоморфними

Запитання для самоконтролю:

1. Який граф називається ейлеровим ?
2. Який граф називається гамільтованим ?
3. Охарактеризуйте поняття дерева.

ЛЕКЦІЯ 13. Дерева. Дводольні та планарні графи.

Дерево – це сукупність елементів, що називаються вузлами (один з яких корінь), та відношень („батьківських”), що утворюють ієрархічну структуру вузлів. Вузли можуть бути елементами будь-якого типу (літерами, рядками, числами).

Піддерево, корінь якого знаходиться в лівому (правому) нащадку вершини, називається лівим (правим) піддеревом цієї вершини.



Рис. 1 -Приклад дерева

Висота вузла дерева - це довжина самого довгого шляху з цього вузла до будь-якого листа. *Глибина вузла* – це довжина шляху від кореня до цього вузла. *Степінь вузла* – це кількість дуг, що з нього виходить. *Степінь дерева* дорівнює максимальному степеню вузла, що входить у дерево. *Листя в дереві* - це вузли, що мають степінь нуль. *Бінарне дерево* – це дерево степінь якого

дорівнює два. Древа, степінь яких більше двох, називаються *розгалуженими*. *Повне бінарне дерево* - це дерево для якого на всіх рівнях менше чим n вузли мають степінь 2, а на рівні n – степінь 0.

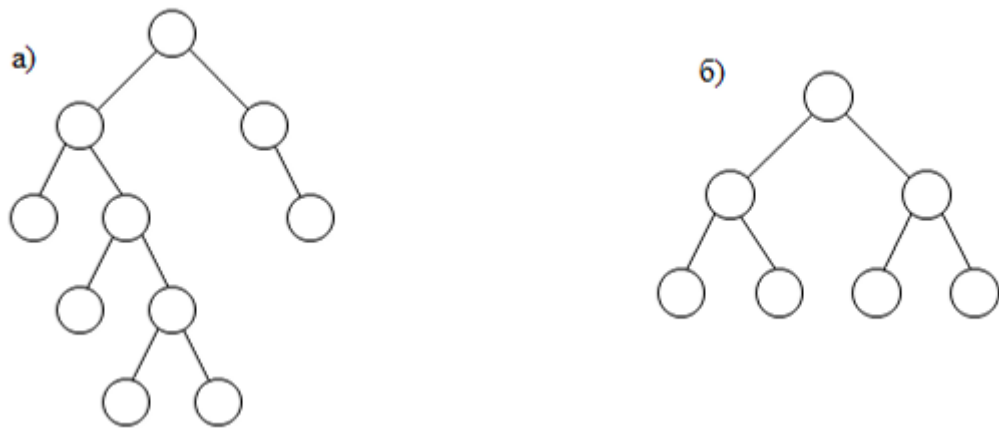


Рис.2 - Бінарні дерева. а) неповне бінарне дерево; б) повне бінарне дерево

Строго бінарне дерево складається тільки з вузлів, що мають степінь 2 або 0. *Нестрого бінарне дерево* містить вузли зі степенем 1.

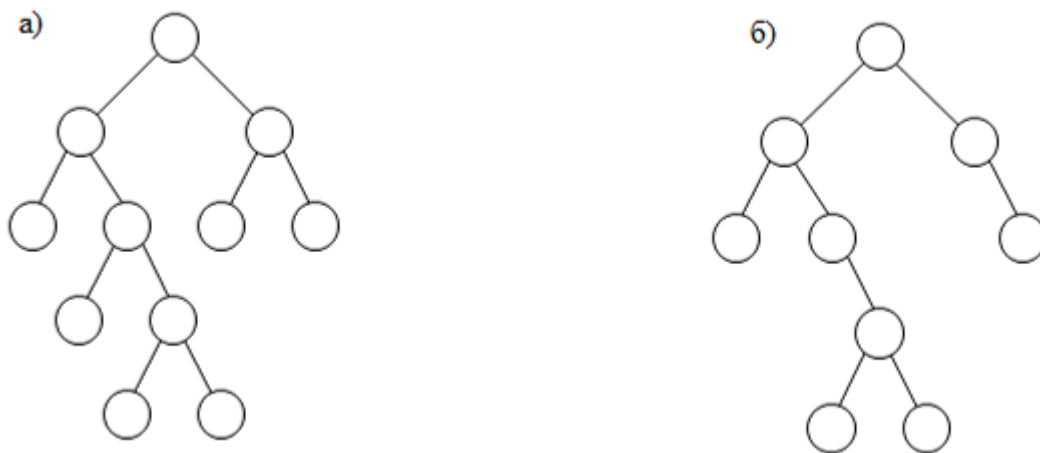


Рис. 3 - Бінарні дерева. а) строго бінарне дерево; б) нестрого бінарне дерево

Бінарне дерево пошуку – це бінарне дерево в якому:

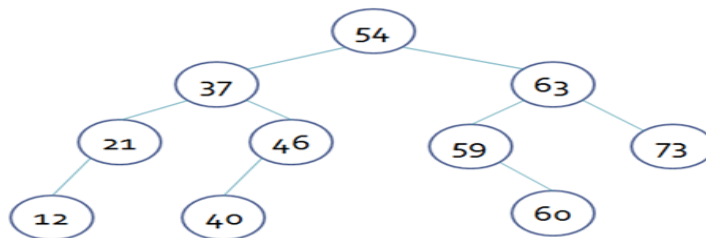
- Кожен вузол має не більше двох нащадків;
- Кожен вузол має ключ (key) і значення (value);
- Ключі всіх вузлів лівого піддерева менші значення ключа батьківського вузла;
- Ключі всіх вузлів правого піддерева більші значення ключа батьківського вузла.

Використовуються для реалізації словників та множин.

Алгоритм вставки елемента

1. Починаємо з кореня.
2. Якщо елемент $<$ об'єкта в вершині, переходимо до лівого сина.
3. Якщо елемент $>$ об'єкта в вершині, переходимо до правого сина.
4. Повторюємо кроки 2 і 3, доки не досягнемо вершини, яка не визначена.
5. Якщо досягнута вершина не визначена, то визначаємо вершину і вставляємо елемент.

Приклад. Побудувати дерево пошуку: 54, 37, 63, 21, 46, 73, 59, 12, 40, 60.



Алгоритм пошуку елемента

1. Починаємо з кореня.
2. Якщо елемент $<$ об'єкта в вершині, переходимо до лівого сина.
3. Якщо елемент $>$ об'єкта в вершині, переходимо до правого сина.
4. Якщо елемент $=$ об'єкту в вершині, то елемент знайдено; виконуємо відповідні дії і виходимо.
5. Повторюємо кроки 2, 3 і 4 доки не досягнемо вершини, яка не визначена.
6. Якщо досягнута вершина не визначена і в дереві немає шуканого елемента, то виконуємо відповідні дії і виходимо.

Алгоритм видалення елемента

1. Якщо вершина v_0 не має синів, просто видаляємо її.
2. Якщо вершина v_0 має одного сина, видаляємо v_0 і заміняємо її сином.
3. Якщо v_0 має двох синів, знаходимо правого сина v_1 вершини v_0 , а потім знаходимо лівого сина вершини v_1 (якщо він існує). Продовжуємо вибирати лівих синів кожної знайденої вершини, доки не знайдеться така вершина v , у якої не буде лівого сина. Замінімо v_0 на v і зробимо правого сина вершини v лівим сином батька вершини v .

Приклад:

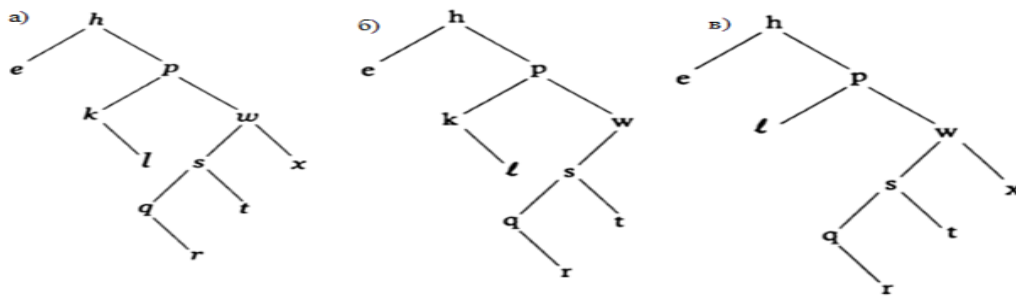


Рис. 4 - а) задане дерево; б) дерево після видалення вершини x; в) дерево, після видалення вершини k

Якщо v_0 має двох синів, знаходимо правого сина v_1 вершини v_0 , а потім знаходимо лівого сина вершини v_1 (якщо він існує). Продовжуємо вибирати лівих синів кожної знайденої вершини, доки не знайдеться така вершина v , у якої не буде лівого сина. Замінімо v_0 на v і зробимо правого сина вершини v лівим сином батька вершини v .

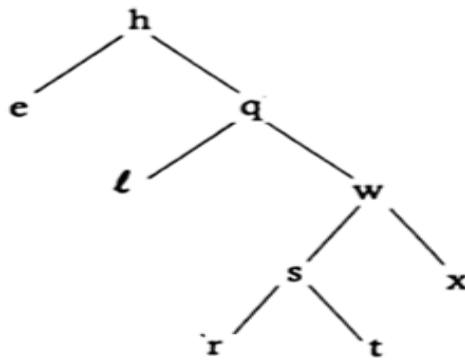


Рис.5 - дерево після видалення вершини q

Алгоритм Краскала

Нехай задано зважений зв'язний граф з n вершинами.

Задача: побудувати для цього графа зв'язний підграф, який є деревом з мінімальною сумарною вагою ребер.

Розв'язок цієї задачі про мінімальне дерево може бути отримано за допомогою алгоритму Краскала.

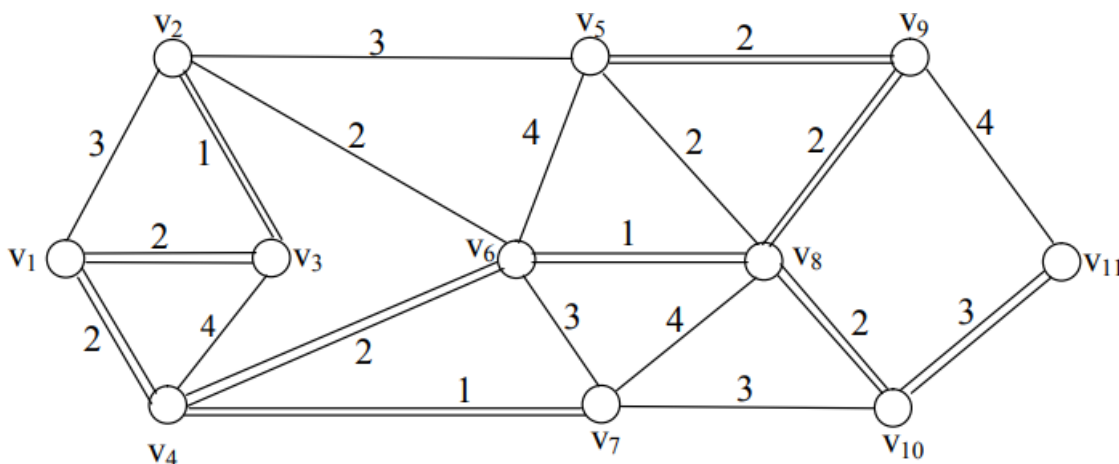
Алгоритм:

1. Обираємо найкоротше ребро e_1 графа G , потім ребро e_2 , найкоротше з тих, що залишилися.
2. Із ребер, що залишилися, обираємо найкоротше ребро таким чином, щоб воно не утворювало циклу з вибраними раніше ребрами.

3. Продовжуємо цей процес і на k -му кроці він закінчується ($k = n-1$). Залишаємо тільки обрані ребра. Це й є шукане дерево.

Приклад: Побудувати мінімальне дерево для зваженого графа $G(V,E)$ за алгоритмом Краскала.

Розв'язання.



1. Обираємо найкоротше ребро, наприклад (v_2, v_3) з довжиною 1 і позначаємо іншим кольором або двома рисками.

2. Обираємо найкоротше ребро з тих, що залишилися, наприклад (v_4, v_7) .

3. За таким же принципом обираємо дуги (v_6, v_8) , (v_1, v_3) , (v_1, v_4) , (v_4, v_6) , (v_5, v_9) , (v_8, v_9) , (v_8, v_{10}) , (v_{10}, v_{11}) . При цьому треба уважно дивитись, щоб не утворювалося циклів.

Сумарна довжина ребер дорівнює 18.

Дводольні графи

Граф називається *дводольним*, якщо множину його вершин можна так розбити на дві підмножини, аби кінці кожного ребра належали різним підмножинам. Ці підмножини називаються *долями*. Таким чином, кожна з долей породжує порожній підграф.

Прикладне значення поняття дводольного графа пов'язане з тим, що за допомогою таких графів моделюються відношення між об'єктами двох типів, а такі стосунки часто зустрічаються на практиці (наприклад, відношення "продукт x використовується у виробництві виробу y " між вихідними продуктами і готовими виробами, або "працівник x володіє професією y " між працівниками і професіями). У математиці такі стосунки теж нерідкі, один з найбільш поширених їх видів – відношення інцидентності. Нехай A – множина, а B – сімейство його підмножин. Елемент $x \in A$ і множина $X \in B$

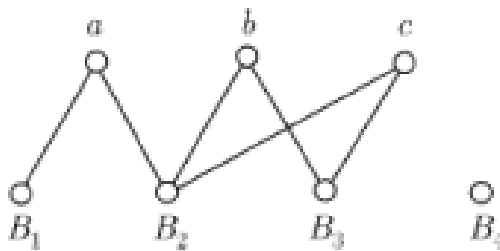
інцидентні один одному, якщо $x \in X$. Відношення інцидентності можна описати за допомогою дводольного графа, в якому

$$VG = A \cup B, EG = \{(x, X), x \in A, x \in B, x \in X\}$$

На рисунку показан граф відношення інцидентності для

$$A = \{a, b, c\}, B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \text{ де } B_1 = \{a\}, B_2 = \{a, b, c\},$$

$$B_3 =$$



Взагалі кажучи, розбиття множини вершин дводольного графу на долі можна здійснити не єдиним способом. Так, в графі з тільки що наведеного прикладу можна взяти за долі множини $\{a, b, c, B_4\}$ і $\{B_1, B_2, B_3\}$. В той же час в самому визначенні цього графу вже закладено "природне" розбиття на долі A і B . Дводольні графи, що виникають в додатках, часто бувають задані саме так – з множиною вершин, що спочатку складається з двох частин, і з множиною ребер, кожне з яких сполучає вершини з різних частин.

Якщо розбиття на долі не задане, то може виникнути питання, чи існує воно взагалі, тобто чи є даний граф дводольним? Якщо в графі n вершин, то є 2^{n-1} розбиття множини вершин на дві підмножини і безпосередня перевірка всього цього розбиття буде дуже трудомісткою справою. Наступна теорема дає критерій дводольності.

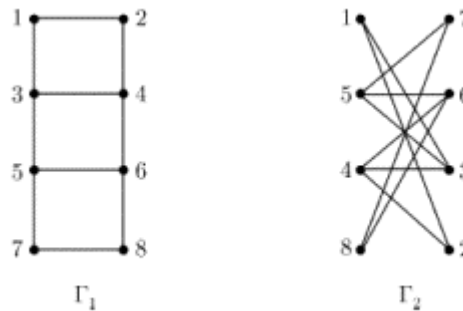
Теорема. Наступні твердження для графа рівносильні:

- 1) G - дводольний граф;
- 2) у G немає циклів непарної довжини;
- 3) у G немає простих циклів непарної довжини.

Наслідок. Граф є дводольним тоді і лише тоді, коли в ньому немає породжених простих циклів непарної довжини.

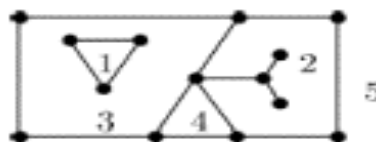
Планарні графи

Геометричний граф – це плоска фігура, що складається з вершин – точок площини і ребер – ліній, що сполучають деякі пари вершин. Всякий граф можна багатьма способами представити геометричним графом. На рисунку показано два геометричних графа Γ_1 і Γ_2 , що представляють один і той же звичайний граф. Просту будову цього графу, очевидну на зображенні зліва, не так легко виявити, розглядаючи зображення справа. Головна причина цього в тому, що в Γ_1 ребра не мають "зайвих" перетинів.



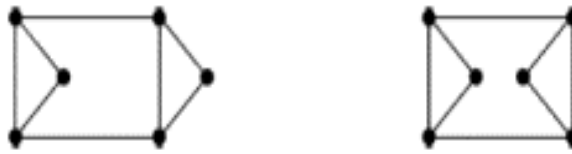
Геометричний граф, в якому жодні два ребра не мають загальних точок, окрім інцидентної їм обох вершини, називають *плоским* графом, а по відношенню до представляемого ним звичайного графу – його *плоскою укладкою*. Не кожен граф допускає плоску укладку. Граф, для якого існує плоска укладка, називається *планарним* графом. Окрім зручності візуального аналізу, є немало причин, у тому числі і суто практичних, для інтересу до планарних графів і їх плоских укладок.

Якщо площину розрізати по ребрах плоского графа, вона розпадеться на зв'язні частини, які називають гранями. Завжди є одна необмежена *зовнішня* грань, всі решта грані називаються *внутрішніми*. Якщо в плоскому графові немає циклів, то у нього є лише одна грань. Якщо ж цикли є, то кордон кожної грані містить цикл, але не обов'язково є циклом. На рисунку показаний плоский граф з п'ятьма пронумерованими гранями. Кордон грані з номером 3 складається з двох циклів, а кордон грані з номером 2 окрім циклу довжини 5 включає ще дерево з трьох ребер.



Множина ребер, яка створює кордони граней, може бути різною для різних плоских укладок одного і того ж графа. На рисунку показано дві плоскі укладки одного графу. У лівій укладці є дві грані, кордони яких є простими циклами довжини 5. У правій укладці таких граней немає, але є

грані, обмежені циклами довжини 4 і 6. Проте число граней, як показує наступна теорема, не залежить від укладки, тобто є інваріантом планарного графу.



Теорема (формула Ейлера). Кількість граней в будь-якій плоскій укладці планарного графу, що має n вершин, m ребер і k компонентів зв'язності, рівна $m - n + k + 1$.

Наслідок 1. Якщо в планарному графові n вершин, $n \geq 3$, і m ребер, то $m \leq 3(n - 2)$

Наслідок 2. Якщо в планарному графові n вершин, $n \geq 3$, m ребер і немає циклів довжини 3, то $m \leq 2(n - 2)$

Запитання для самоконтролю:

1. Який граф називають деревом?
2. Охарактеризуйте поняття бінарного дерева.
3. Який граф називають дводольним?
4. Який граф називають планарним?

ЛЕКЦІЯ 14. Використання матриць для дослідження орграфів. Ацикличні графи. Топологічне сортування

Зв'язок матриць орграфів зі шляхами. Матриця досяжності. Матриця відстаней.

Значну частину інформації щодо орграфа D можна уявити в зручній формі, використовуючи матриці. Визначимо наступні операції над матрицями. Нехай $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ - дві матриці $n \times n$. Тоді

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ – поелементне складання матриць A , B ,

$A \times B = (a_{ij} \times b_{ij})$ – поелементний добуток A і B ,

$AB = (c_{ij})$, де $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, – добуток A і B .

Транспонованою матрицею A' до матриці A є матриця (a'_{ij}) , в якій

$$a'_{ij} = a_{ji}.$$

Визначимо булево перетворення $B : N \rightarrow \{0,1\}$ наступним чином:

$$B(x) = \{0, \text{ якщо } x = 0 \ 1, \text{ якщо } x > 0\}$$

Тоді перетворення $B(A)$ для матриці $A = (a_{ij})$ означає, що елемент (i, j) в $B(A)$ дорівнює $B(a_{ij})$. Наприклад:

$$B(1 \ 3 \ 5 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0) = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)$$

В результаті отримуємо бінарну матрицю. Будемо позначати через I діагональну одиничну матрицю (матрицю, в якій на головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю), і через J – одиничну матрицю, в якій всі елементи дорівнюють одиниці.

Матриці орграфов і їх зв'язок зі шляхами

Матрицю суміжності $A(D)$ орграфа D можна використовувати для підрахунку кількості різних шляхів в D . Сама матриця A задає ребра D , тобто шляхи довжини 1. Виявляється, що матриця A^l (l - я степінь A) задає число шляхів довжини l .

Теорема. Елемент $(i, j) = c_{ij}^{(l)}$ матриці A^l орграфа D дорівнює числу шляхів довжини l з v_i в v_j .

Доведення теореми проведемо індукцією по l . Для $l = 1$ теорема очевидна: матриця суміжності задає шляхи довжиною 1. Нехай для деякого l теорема вірна, тобто елемент матриці A^l дорівнює числу шляхів довжини l з v_i в v_j . Доведемо її для $l+1$. Будь-який шлях довжини $l+1$ з v_i в v_j складається з дуги, що веде з v_i в суміжну з нею вершину v_k , і потім шляху довжини l з v_k в v_j . Число шляхів довжини $l+1$ з v_i в v_j , що проходять на першому кроці через вершину v_k , так само $a_{ik} c_{kj}^{(l)}$ (якщо дуги з v_i в v_k немає, то $a_{ik} = 0$, і $a_{ik} c_{kj}^{(l)} = 0$, а якщо така дуга є, то $a_{ik} c_{kj}^{(l)} = c_{kj}^{(l)}$, так як $a_{ik} = 1$). Загальна кількість шляхів довжини $l+1$ з v_i в v_j отримаємо, якщо підсумуємо цю величину за всіма k :

$$\sum_{k=1}^n c_{ik} c_{kj}^{(l)}.$$

Ця сума дорівнює елементу (i, j) добутку матриць A і A^l , тобто елементу (i, j) матриці A^{l+1} , що і доводить теорему.

Слідування. Елемент (i, j) матриці $A + A^2 + \dots + A^l$ орграфа D дорівнює числу всіх шляхів довжини $\leq l$ з v_i в v_j .

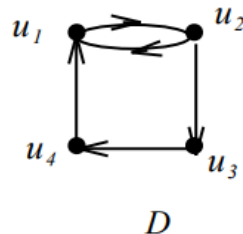
Приклад. На рис. 1 наведені матриці суміжності A, A^2, A^3 і A^4 , відповідні орграфу D . Матриця A^2 показує число шляхів довжиною два:

оскільки елемент a_{11} в A^2 дорівнює 1, в D існує шлях довжиною 2 з u_1 в u_1 . Дійсно, це цикл u_1, u_2, u_1 . Елемент $a_{13} = 1$, тобто в D існує шлях довжиною 2 з u_1 в u_3 : u_1, u_2, u_3 , і т.д. Елемент $a_{21} = 2$ в A^3 , отже, існує два шляхи довжини 3 з u_2 в u_1 . Ці шляхи - u_2, u_1, u_2, u_1 і u_2, u_3, u_4, u_1 . Аналогічно інтерпретуються інші елементи матриць A^2 , A^3 , A^4 і т.д.

Матриця відстаней

Нова матриця, яка виявляється корисною при розгляді орграфів, – матриця відстаней (d_{ij}), де d_{ij} – відстань від u_i до u_j , яке визначається як довжина найкоротшого шляху з u_i в u_j . (Нагадую, що величина d_{ij} не визначена, якщо шляху з u_i в u_j немає.)

Теорема. Нехай орграф D має матрицю суміжності A і матрицю відстаней (d_{ij}). Тоді, якщо величина d_{ij} , $i \neq j$ визначена, то вона дорівнює найменшому k , для якого елемент (i, j) в A^k не дорівнює 0.



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A^3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A^4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Степені матриці суміжності орграфа D .

Дотримуючись цієї теореми, можна побудувати матрицю відстаней, послідовно зводячи до степені матрицю суміжності орграфа. На рис. 1 наведені степені матриці суміжності орграфа D . Використовуємо їх для отримання матриці відстаней цього графа (див. рис. 2).

1. Матриця відстаней має нулі на головній діагоналі і спочатку збігається з матрицею суміжності, тобто вона містить всі шляхи довжиною 1. Інші елементи матриці відстаней поки не визначені.

2. Матриця A^2 вказує всі шляхи довжиною 2. Невизначеним елементам матриці відстаней d_{ik} присвоюємо значення 2, якщо $a_{ik}^{(2)} \neq 0$

3. Тим елементам d_{ik} , які ще не визначені, присвоюємо значення 3, якщо елементи A^3 $a_{ik}^{(3)} \neq 0$

Тепер матриця відстаней повністю визначена.

$$1). d(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x & x \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & x & 0 & 1 \\ 1 & x & x & 0 \end{pmatrix} \quad 2). d(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & x & 0 & 1 \\ 1 & 2 & x & 0 \end{pmatrix} \quad 3). d(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Обчислення матриці відстаней орграфа D.

Рис.2

Теорема. Для того, щоб оргграф з n вершинами з матрицею суміжності A мав хоча б один цикл, необхідно і достатньо, щоб матриця $K = A^2 + A^3 + \dots + A^n$ мала хоча б один не нульовий діагональний елемент.

Використання матриць дозволяє отримати і перелічення конкретних шляхів. Для цього всім дугам графа D дамо конкретні імена (наприклад, $e_1, \dots, e_m$), і в матриці A замінимо одиниці іменами відповідних дуг, тобто елемент $a_{ij} = 1$ замінимо ім'ям дуги, яка з'єднує вершину v_i з вершиною v_j . Отриману матрицю позначимо через $H(D)$. Для того, щоб визначити добуток матриць цього виду, введемо алгебру на множинах шляхів.

Шлях будемо розглядати як слово (послідовність символів) в алфавіті $\{e_1, \dots, e_m\}$. Нехай дано дві множини шляхів M_1 і M_2 . Сума M_1 і M_2 визначається як їх звичайне теоретико-множинне об'єднання: $M_1 \cup M_2$, добуток $M_1 \cdot M_2$ - як множина, що отримується приписуванням справа до кожного слова з M_1 всіх слів з M_2 . Наприклад, якщо $M_1 = \{e_2 e_4 e_2, e_3 e_1, e_1\}$, $M_2 = \{e_3 e_1 e_4, e_2\}$, то $M_1 \cdot M_2 = \{e_2 e_4 e_2 e_3 e_1 e_4, e_2 e_4 e_2 e_2, e_3 e_1 e_3 e_1 e_4, e_3 e_1 e_2, e_1 e_3 e_1 e_4, e_1 e_2\}$. (Таку операцію називають конкатенацією.) Порожня множина $\emptyset$ грає тут роль нуля: $M_1 \cdot \emptyset = \emptyset \cdot M_2 = \emptyset$. Тому замість $\emptyset$ будемо, як і в матриці A , писати 0. Операція конкатенації некомутативна. Вона має простий сенс: якщо M_1 - множина всіх шляхів, що ведуть з v_i в v_j , а M_2 - множина всіх шляхів, що ведуть з v_j в v_k , то $M_1 \cdot M_2$ - це множина всіх шляхів, що ведуть з v_i в v_k і проходять через v_j .

За допомогою цих операцій визначимо добуток $Z=X \cdot Y$ квадратних матриць X і Y однаковою розмірності n , елементами яких є множини слів (такі матриці називають словниковими):

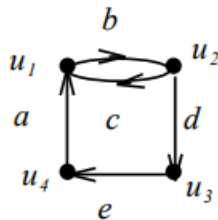
$$z_{ij} = \bigcup_{k=1}^n x_{ik} \cdot y_{kj}$$

У цій формулі роль суми елементів грає теоретико-множинне об'єднання, а добутку – вище наведена конкатенація. Степінь матриці H визначається по індукції формулою $H^{l+1} = H \cdot H^l$.

Теорема. Елемент $(i, j) = h_{ij}^{(l)}$ матриці H^l орграфа D являє собою множину всіх шляхів довжини l з v_i в v_j .

Слідування. Елемент (i, j) матриці $H \cup H^2 \cup \dots \cup H^l$ орграфа D дорівнює множині всіх шляхів довжини $\leq l$ з v_i в v_j .

Приклад.



$$H = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} H^2 = \begin{pmatrix} bc & 0 & bd & 0 \\ 0 & cd & 0 & de \\ ea & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & 0 & 0 \end{pmatrix} H^3 = \begin{pmatrix} 0 & bcb & 0 & bde \\ cbc \cup dea & 0 & cbd & 0 \\ 0 & eab & 0 & 0 \\ abc & 0 & abd & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця шляхів в орграфі.

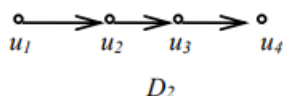
Матриця досяжності

Матриця досяжності $R(D)=(r_{ij})$ визначається наступним чином:

$$r_{ij} = \{1, \text{ } u_j \text{ досяжна з } u_i, 0, \text{ } u_j \text{ не досяжна з } u_i$$

Будь-яка вершина досяжна сама з себе, тому $r_{ii} = 1$ для всіх i . На рис. представлені матриці суміжності, відстаней і досяжності для деяких орграфів.

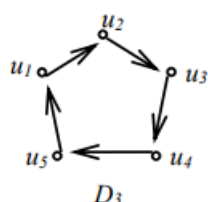
Матриця досяжності може бути отримана за допомогою матриці суміжності.



$$A(D_2) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$R(D_2) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

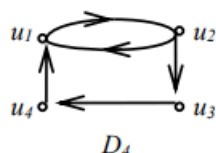
$$(d_{ij}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ x & 0 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ x & x & x & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



$$A(D_3) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$R(D_3) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$(d_{ij}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



$$A(D_4) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$(d_{ij}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$R(D_4) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Матриці відстаней і досяжності для орграфів.

Теорема. Нехай A - матриця суміжності і R - матриця досяжності орграфа D з n вершинами. Тоді $R = B(I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}) = B[(I + A)^{n-1}]$, де B - булево перетворення, а I - одинична діагональна матриця.

Доведення. Дійсно, за теоремою, якщо v_j досяжна з v_i , то існує простий ланцюг з v_i в v_j . Довжина цього шляху не перевищує $n-1$, оскільки у простому ланцюзі вершини не повторюються. Згідно зі слідуванням з теореми, в цьому випадку елемент (i, j) матриці $I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$ буде ненульовим, звідки і слідує наша теорема.

У наступній теоремі буде показано застосування матриці досяжності як методу визначення зв'язності орграфа.

Теорема. Нехай орграф D має матрицю досяжності R і матрицю суміжності A . Тоді

- 1) D сильно зв'язний тоді і тільки тоді, якщо $R = J$;
- 2) D односторонньо зв'язний тоді і тільки тоді, якщо $B (R + R') = J$;
- 3) D слабо зв'язний тоді і тільки тоді, коли $B [(I + A + A')^{n-1}] = J$, де J – одинична матриця.

Ациклічні графи, топологічне сортування.

Визначення. Орграф називається ациклічним, якщо він не містить циклів.

У загальному випадку орграф може містити шляхи якої завгодно довжини, оскільки кожен шлях може проходити через одну вершину будь-яке число раз. Однак це можливо, тільки якщо в графі є цикли. У ациклічному графі довжини шляхів обмежені, так як вершини в його шляхах не можуть повторюватися, тобто всі його шляхи – прості ланцюги. Отже, в ациклічному орграфі є шляхи максимальної довжини, тобто шляхи, які не можуть бути продовжені: не можна додати ребро ні до їх початку, ні до їх кінця. Звідси випливає, що в ациклічному графі існує, принаймні, одна вершина, в яку не входить жодна дуга (таку вершину називають виток, або джерелом), і, принаймні, одна вершина, з якої не виходить жодна дуга (таку вершину називають стоком)

Дійсно, в ациклічному графі будь-який шлях приводить в вершину, з якої він не може продовжитися (див. рис. 1). Така вершина і є стік. Якщо ж продовжити цей шлях від його початку проти орієнтації, прийдемо в вершину, з якої не можна вийти проти орієнтації інцидентних їй ребер, тобто в вершину, яка не має вхідних ребер. Така вершина є джерелом.

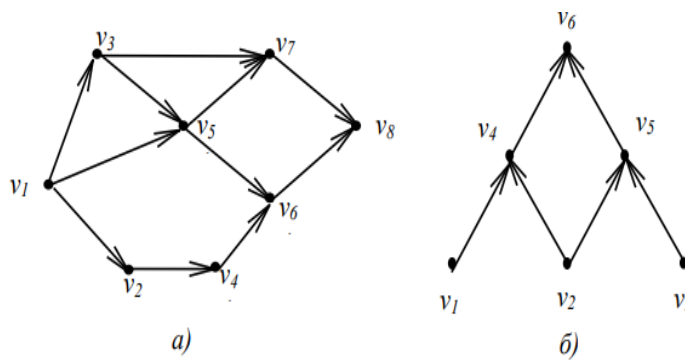


Рис. 1

Ациклічний оргграф з одним джерелом і одним стоком називається *двополюсним*. Двополюсний граф зображений на рис. 1, а). Ациклічний оргграф на рис. 1, б) має три джерела і один стік.

Визначення. Топологічним сортуванням оргграфа називається така нумерація вершин, що для будь-якого ребра (v_i, v_j) номер його початку менше номера його кінця: $i < j$.

Теорема. Для оргграфа топологічне сортування існує тоді і тільки тоді, коли він ациклічний.

Доведення. Припустимо, що для циклу топологічне сортування можливе. Виберемо в циклі довільну вершину v_i . Цикл містить ребра (v_i, v_j) і (v_k, v_i) , причому за визначенням повинно бути $i < j$ та $k < i$. При проходженні вздовж циклу номери вершин повинні тільки зростати і, отже, всі вони будуть більше i . Тому, коли ми прийдемо в v_k , отримаємо $k > i$, що суперечить припущенню.

Для ациклічного оргграфа D з n вершинами топологічне сортування здійснюється за допомогою наступного алгоритму. Виберемо в D будь-який стік і дамо йому номер n . Всі інцидентні йому ребра – входять, тому їх початки будуть мати номери, менші n , і, отже, для них умову визначення виконано. Видалимо обраний стік разом з усіма інцидентними йому ребрами. Отримаємо ациклічний граф з $n-1$ вершиною. Виберемо в ньому будь-який стік і дамо йому номер $n-1$. Будемо повторювати процедуру видалення стоків і інцидентних їм ребер до тих пір, поки не пронумеруємо всі вершини. Оскільки щоразу ребра, що видаляються, будуть задовольняти умові визначення, отримаємо топологічне сортування вихідного оргграфа. Приклад топологічної сортування графа наведено на рис. 1, б)

Запитання для самоконтролю.

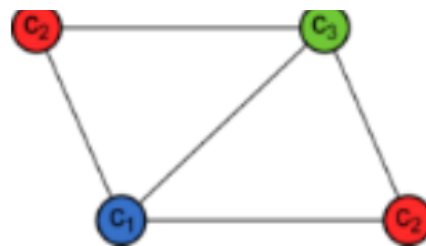
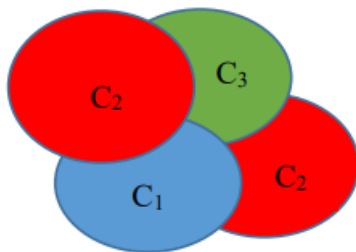
1. Охарактеризуйте зв'язок матриць оргграфів зі шляхами.
2. Охарактеризуйте поняття матриці досяжності та матриці відстаней.
3. Який граф називається ациклічним?

4. Що називають топологічним сортуванням?

ЛЕКЦІЯ 15. Розфарбування графів. Гіпотеза 4-х фарб

Розфарбування графа

Розбиття площини на непересічні області називаються картою. Області на карті називаються сусідніми, якщо вони мають спільну межу. Задача полягає в розфарбовуванні карти таким чином, щоб ніякі дві сусідні області не були зафарбовані одним кольором.



Розфарбуванням графа називається таке приписування кольорів (натуральних чисел) його вершинам, що ніякі дві суміжні вершини не отримують однаковий колір. Найменше можливе число кольорів в розфарбуванні графа G називається *хроматичним числом* і позначається $\chi(G)$. Множина вершин, що розфарбована в один колір, називається *однокольоровим класом* і є незалежним (тобто будь-які дві вершини з одного класу не є суміжними).

Спосіб явного вираження хроматичного числа через інваріанти графа невідомий, відомі тільки деякі оцінки, наприклад, $\chi(G) \leq \max \deg v + 1$.

Хоча ефективного методу визначення χ , не знайдено, існують цілком ефективні алгоритми розфарбовування графів.

На основі хроматичного числа можна сформулювати ще одну властивість планарності: $\chi(G) \leq 4$.

Власне в 1879 році Келі була висунута *гіпотеза 4 фарб*: будь-який планарний граф - 4-х розфарбовуваний. Спроби довести цю гіпотезу привели Хівуда в 1890 році до доведення теореми: всякий планарний граф можна розфарбувати 5 фарбами.

Труднощі проблеми 4-х фарб привела до появи різних інтерпретацій, і в кінці 60-х років була зведена до дослідження великої, але кінцевої множини непереборних конфігурацій - тисячі чотиреста вісімдесят два зразка. У 1976 році Аппелю і Хейкену вдалося протягом 2000 годин машинного часу розфарбувати ці графи в 4 кольори.

Спочатку розфарбування графів були потрібні для складання географічних карт. Сьогодні ж вони (зокрема розфарбування з використанням мінімальної кількості кольорів) використовуються, наприклад, для складання розкладів, розподілу регістрів в мікропроцесорах, розпаралелювання чисельних методів

Задача про знаходження $\chi(G)$ не розв'язується за поліноміальний час. Хроматичні числа різних графів:

1-хроматичні графи - це нульові (що не мають ребер) графи і тільки вони - $\chi(O_n) = 1$.

$\chi(K_n) = n$ - хроматичне число повного графа з n вершинами .

$\chi(C_n) = \{2, \text{якщо } n - \text{парне}; 3, \text{якщо } n - \text{непарне}\}$ – циклічні графи.

Для дводольних графів та дерев - $\chi(G) = 2$

Цикломатичне число

Цикломатичне число визначається як $\gamma(G) = m - n + k$, де m -кількість ребер, n -кількість вершин, k -кількість компонент зв'язності (наприклад, для неорієнтованого зв'язного графа $k=1$). Тоді, для плоского неорієнтованого зв'язного графа можна визначити кількість граней як $r = \gamma(G) + 1$.

Цикломатичне число є однією з можливих числових характеристик графа. Наприклад, при цикломатическая числі, що дорівнює нулю, граф не містить циклів; якщо ж воно дорівнює одиниці, то граф має тільки один цикл. Або, цикломатичне число це - мінімальне число ребер, які треба видалити, щоб граф став ациклічним.

Запитання для самоконтролю:

1. Що називають розфарбуванням графа?
2. Про що говорить гіпотеза 4 фарб?
3. Як визначити цикломатичне число?

Список літератури

1. Темнікова О.Л. Дискретна математика: практикум з дисципліни «Дискретна математика» для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика» [Електронне видання] / О.Л.Темнікова – К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020
2. Сергій Кривий. Збірник задач з дискретної математики. Букрек, 2020, 456 с.
3. Іваненко О.І. Дискретні структури: навчальний посібник. Київ: КНЕУ, 2020. — 180 с.
4. Кравець М. Алгоритмічні структури. Львів: ЛНУ, 2021. — 156 с.
5. Johnson, K. Discrete Mathematics Essentials./ Springer, 2021. — 260 с.
6. Harper, G. Foundations of Discrete Systems. / Routledge, 2024. — 210 с.
7. Lee, P. Combinatorics for Computing Students. / Wiley, 2022. — 296 с.
8. Turner J. Applied Discrete Concepts./ Oxford University Press, 2025. — 240 с.