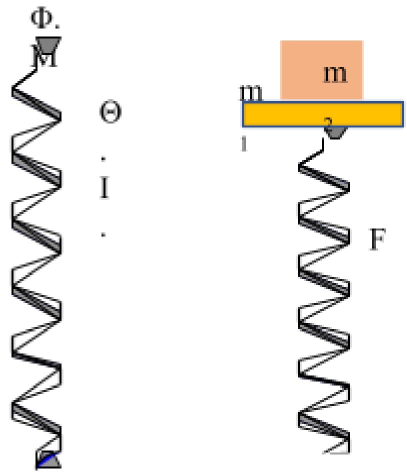
Άλλο ένα χάσιμο επαφής



Ένα κατακόρυφο ελατήριο με σταθερά Κ έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο στο δάπεδο. Στο επάνω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα $Σ_1$, μάζας m_1=1kg, και πάνω από αυτό τοποθετείται δεύτερο σώμα $Σ_2$, μάζας m_2=3kg και το σύστημα ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα, έχοντας το ελατήριο συσπειρωθεί κατά $Δl_1$=0,1m. Κάποια χρονική στιγμή που θεωρούμε t=0 ασκείται στο σώμα $Σ_1$ δύναμη μέτρου F=80N με φορά προς τα πάνω.

i) Να αποδείξετε ότι το σύστημα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της δύναμης επαφής που ασκεί το σώμα $Σ_1$ στο σώμα $Σ_2$ και να βρείτε σε ποια θέση από το φυσικό μήκος του ελατηρίου χάνεται η επαφή των σωμάτων.

iii) Να βρεθεί το νέο πλάτος ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ μετά τον αποχωρισμό του με το σώμα $Σ_2$ αν αυτό αμέσως μετά απομακρύνεται και δεν συγκρούεται με το σώμα $Σ_1$.

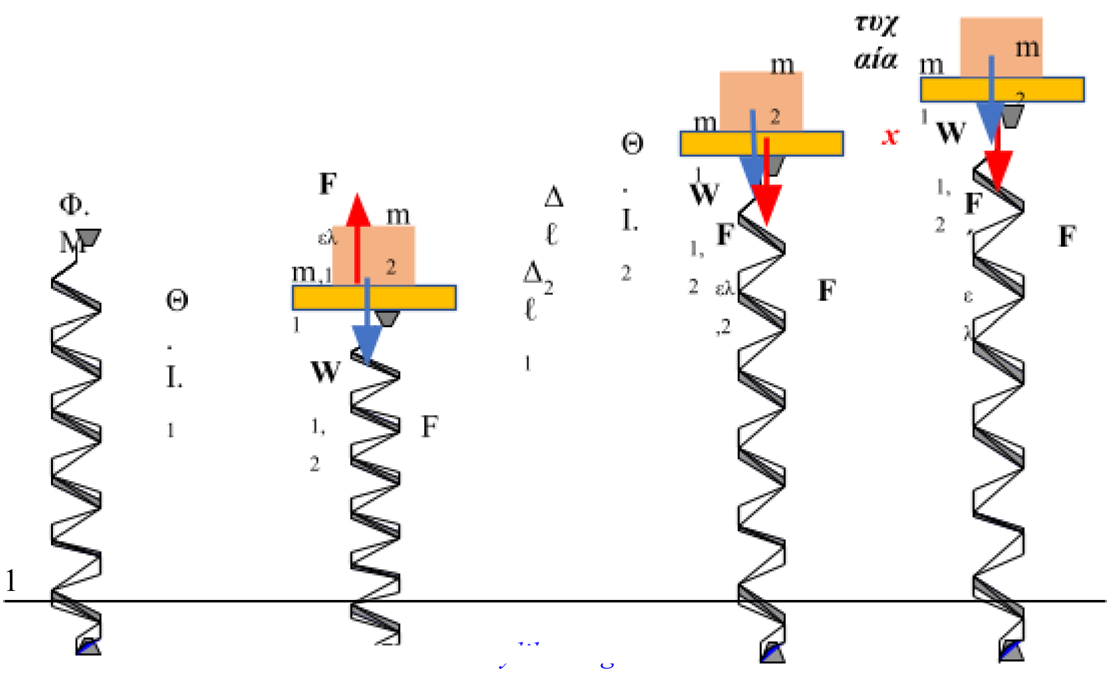
iv) Να βρείτε τις χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης του σώματος από το φυσικό μήκος. Προαιρετικό, να κάνετε ένα ποιοτικό διάγραμμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνονται: $g = 10 m/s^2$, Θετική φορά θεωρείστε την προς τα πάνω και το πεδίο τιμών της αρχικής φάσης της ταλάντωσης είναι: $0 \le φ_0 < 2π$. $\sqrt{3,25} = 1,8$ και ημ(0,089π)=1/3,6

Απάντηση

i) Από την αρχική θέση ισορροπίας Θ.Ι.$_1$ έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow F_{ελ,1} = (m_1+m_2)g \Rightarrow k\,\Delta\ell_1 = (m_1+m_2)g \Rightarrow k = \frac{(m_1+m_2)g}{\Delta\ell_1} = \frac{4\cdot 10}{0,1} = 400\ N/m$$



Στην τελική θέση ισορροπίας Θ.Ι.$_2$ έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} \xrightarrow{(+)\uparrow} 0 \Rightarrow F - F_{\varepsilon\lambda.,2} - W_{1,2} = 0 \Rightarrow F - k\,\Delta\ell_2 - (m_1+m_2)g = 0 \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{F-(m_1+m_2)g}{k} = 0{,}1\ \mathrm{m} \qquad (1)$$

Σχεδιάζουμε μια νέα θέση όπου το σύστημα έχει μετακινηθεί κατά τυχαίο x από την θέση ισορροπίας του Θ.Ι$_2$. Για την συνισταμένη δύναμη θα ισχύει: (θετική φορά προς τα πάνω)

$$\Sigma \vec{F} \xrightarrow{(+)\uparrow} \Sigma F = F - F'_{\varepsilon\lambda.} - W_{1,2} \rightarrow \Sigma F = F - k(\Delta\ell_2 + x) - (m_1+m_2)g \rightarrow$$

$$\Sigma F = F - k\,\Delta\ell_2 - kx - (m_1+m_2)g \xrightarrow{(1)} \Sigma F = -kx \rightarrow \Sigma F = -400x$$

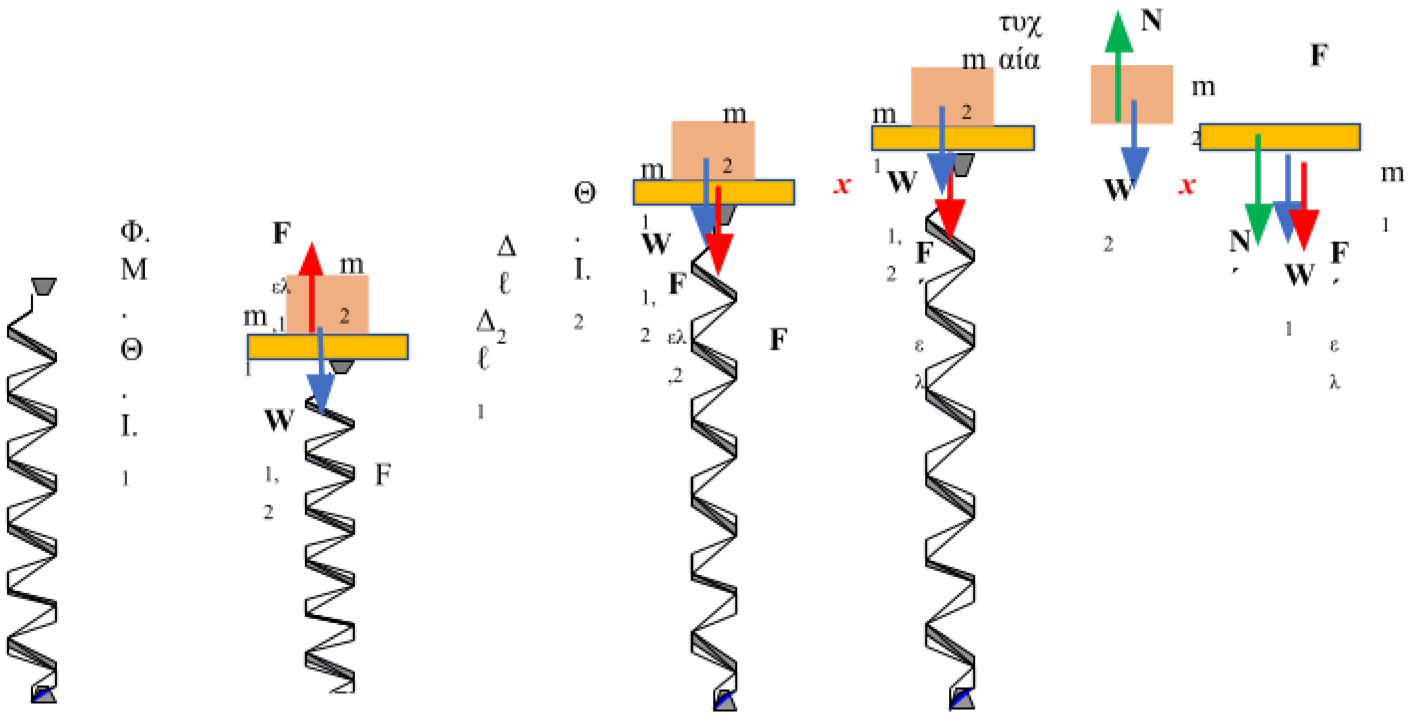
Η παραπάνω σχέση αποδεικνύει ότι το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με D=k=400N/m. Η περίοδος είναι: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{400}} = 0{,}2\pi\ \mathrm{s}$ και η γωνιακή συχνότητα ω=10r/s.

ii)

Κατά τη διάρκεια της επαφής του σώματος m_1 με το m_2 από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα Σ_2 προκύπτει:

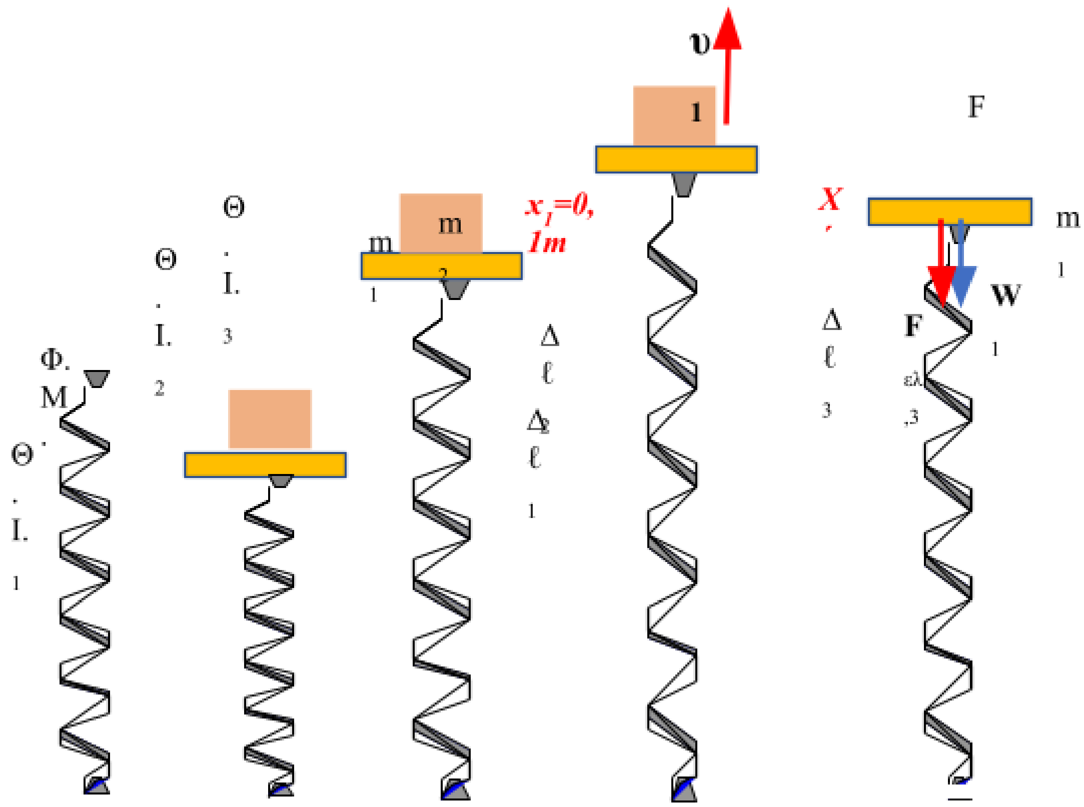
$$\Sigma \vec{F} = m_2 \vec{\alpha} \xrightarrow{(+)\uparrow} N - w_2 = -m_2\omega^2 x \rightarrow N = 30 - 300x$$

Η επαφή θα χαθεί στη θέση όπου N=0 από όπου προκύπτει $\boldsymbol{x_1=0{,}1m}$ πάνω από τη θέση ισορροπίας Θ.Ι.$_2$ του συστήματος. Η θέση αυτή απέχει από το φυσικό μήκος του ελατηρίου $\Delta\ell = \Delta\ell_2 + x_1 = 0{,}2\mathrm{m}$.



iii)

Το σώμα $Σ_1$ μετά το χάσιμο επαφής θα εκτελέσει μία νέα ταλάντωση γύρω από την Θ.Ι.$_3$ που απέχει από το Φ.Μ. του ελατηρίου απόσταση ίση με $Δ\ell_3$.



Στην τελική θέση ισορροπίας Θ.Ι.$_3$ έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow F - F_{\varepsilon\lambda,3} - m_1 g = 0 \Rightarrow k\,\Delta\ell_3 = F - m_1 g \Rightarrow \Delta\ell_3 = \frac{80-10}{400} = \frac{7}{40} = 0,175m \qquad (2)$$

Από την αρχική ταλάντωση του συστήματος στη θέση x_1 που χάνεται η επαφή των σωμάτων η ταχύτητα είναι $|\upsilon_1| = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

Το σύστημα ξεκινά την ταλάντωσή από ακραία θέση γιατί η ταχύτητά του είναι μηδενική και το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με $A=\Delta\ell_1+\Delta\ell_2=0,2m$.

Έτσι $|\upsilon_1| = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2} = 10\sqrt{0,2^2 - 0,1^2} \rightarrow |\upsilon_1| = \sqrt{3}m/s$

Το σώμα Σ_1 ξεκινά ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς ίση με D=k=400N/m και γωνιακή συχνότητα ω΄=20r/s, από την τυχαία θέση $X'=\Delta\ell_2 + x_1 - \Delta\ell_3 = 0,025 = 1/40$ m έχοντας ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1=\sqrt{3}$ m/s.

Από την ενέργεια ταλάντωσης για το σώμα Σ_1 προκύπτει:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Dx'^2 \Rightarrow \frac{1}{2}400A'^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}400\left(0,025\right)^2 \Rightarrow$$

$$400A'^2 = 3 + 400\left(0,025\right)^2 \Rightarrow 400A'^2 = 3 + 0,25 \Rightarrow A'^2 = \frac{3,25}{400}m^2$$

$$A' = \frac{\sqrt{3,25}}{20}m \simeq 0,09m$$

iv)

● Το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ξεκινά ταλάντωση από την ακραία αρνητική θέση οπότε η εξίσωση κίνησης του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι :

x=0,2·ημ(10t+3π/2), S.I. για 0≤ t≤ π/15s.

Η επαφή χάνεται στη θέση x=0,1m→

0,2·ημ(10t+3π/2)=0,1 →

ημ(10t+3π/2)= 0,5=ημ(π/6)→→

$$10t + 3\pi/2 = \begin{cases} 2\kappa\pi + \pi/6 & (1) \\ 2\kappa\pi + 5\pi/6 & (2) \end{cases} \rightarrow$$

Από όπου για κ=0 και οι δύο λύσεις δίνουν αρνητικό χρόνο και για κ=1 από την εξίσωση (1) προκύπτει t=π/15s και από τη (2) t=4π/3s.

Η εξίσωση απομάκρυνσης από το φυσικό μήκος είναι :

d=0,2·ημ(10t+3π/2) +Δℓ$_2$ →

d=0,2·ημ(10t+3π/2)+0,1 , S.I. για 0≤ t≤ π/15s.

● Για την εξίσωση του σώματος $Σ_1$ προκύπτει:

$$x=0{,}09\cdot ημ(20(t-π/15)+φ_0) \text{ για } t\geq π/15s.$$

Για $t=π/15s$ η απομάκρυνση είναι $x΄ = 1/40m$ οπότε

$1/40=0{,}09\cdot ημ(φ_0) \rightarrow ημ(φ_0)=1/3{,}6=ημ(0{,}089π) \rightarrow$

$$\varphi_0 = \begin{cases} 2\kappa\pi + 0{,}089\pi & (3) \\ & \kappa=0,1,2... \rightarrow \\ 2\kappa\pi + 0{,}911\pi & (4) \end{cases}$$

Για κ=0 η φάση προκύπτει $φ_0=0{,}089π$ rad ή $φ_0=0{,}911π$ rad. Επειδή η ταχύτητα είναι θετική τελικά $φ_0=0{,}089π$ rad. Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x=0{,}09\cdot ημ[20(t-π/15)+0{,}089π], \quad \text{S.I. για } t\geq π/15s.$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης από το φυσικό μήκος είναι :

$$\boldsymbol{d=0{,}09\cdot ημ[20(t-π/15)+0{,}089π]+Δ\ell_3 \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{d=0{,}09\cdot ημ[20(t-π/15)+0{,}089π]+0{,}175\,, \quad S.I. \text{ για } t\geq π/15s}$$