Câu 50. **[1D5-2.1-4] (CHUYÊN LAM SƠN -LẦN 3-2018)** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:
$f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $A=3f(2)+4f'(2)$.

A. 11. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D.

Với $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0 \quad (1)$.

Đạo hàm hai vế của (1), ta được

$-3f^2(2-x).f'(2-x)-12f(2+3x).f'(2+3x)+2x.g(x)+x^2.g'(x)+36=0 \quad (2)$.

Từ (1) và (2), thay $x=0$, ta có $\begin{cases} f^3(2)-2f^2(2)=0 & (3) \\ -3f^2(2).f'(2)-12f(2).f'(2)+36=0 & (4) \end{cases}$

Từ (3), ta có $f(2)=0 \vee f(2)=2$.

Với $f(2)=0$, thế vào (4) ta được $36=0$ (vô lí).

Với $f(2)=2$, thế vào (4) ta được $-36.f'(2)+36=0 \Leftrightarrow f'(2)=1$.

Vậy $A=3f(2)+4f'(2)$ $=3.2+4.1$ $=10$.

----------HẾT----------**Câu 42:** **[1D5-2.1-4] (TH TUỔI TRẺ SỐ 6-2018)** Cho hàm số

$f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x} & \text{khi } 0<x<x_0 \\ x^2+12 & \text{khi } x\ge x_0 \end{cases}$. Biết rằng ta luôn tìm được một số dương x_0 và một số thực a để hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$. Tính giá trị $S=x_0+a$.

A. $S=2\left(3-2\sqrt{2}\right)$. **B.** $S=2\left(1+4\sqrt{2}\right)$. **C.** $S=2\left(3-4\sqrt{2}\right)$. **D.** $S=2\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B.

+ Khi $0<x<x_0$: $f(x)=a\sqrt{x}$ $\Rightarrow f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(0;x_0)$ nên liên tục trên khoảng $(0;x_0)$.

+ Khi $x>x_0$: $f(x)=x^2+12$ $\Rightarrow f'(x)=2x$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(x_0;+\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(x_0;+\infty)$.

+ Tại $x=x_0$:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{a\sqrt{x}-a\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{a\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{a}{2\sqrt{x_0}}.$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{x^2+12-\left(x_0^2+12\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}(x+x_0)=2x_0.$$

Hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Leftrightarrow\frac{a}{2\sqrt{x_0}}=2x_0.$$

Khi đó $f'(x_0)=\dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=2x_0$ và $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{2\sqrt{x}} & \text{khi } 0<x<x_0\\ 2x & \text{khi } x\ge x_0\end{cases}$ nên hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $\dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=2x_0\Leftrightarrow a=4x_0\sqrt{x_0}$ (1)

Mặt khác: Hàm số f liên tục tại x_0 nên $x_0^2+12=a\sqrt{x_0}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x_0=2$ và $a=8\sqrt{2}$

Vậy $S=a+x_0=2\left(1+4\sqrt{2}\right)$.

Câu 38. **[1D5-2.1-4]** **(THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC-LẦN 1-2018)** Hàm số nào sau đây không có đạo hàm trên $\mathbb{R}$?

A. $y=|x-1|$. **B.** $y=\sqrt{x^2-4x+5}$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\sqrt{2-\cos x}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y=|x-1|$, do đó: $y=\begin{cases}x-1, & x\ge 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$ khi đó: $y'=\begin{cases}1, & x>1\\ -1, & x<1\end{cases}$

Tại $x=1$: $y'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

$y'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{x-1}=-1$.

Do $y'(1^+)\ne y'(1^+)$ nên hàm số không có đạo hàm tại 1.

Các hàm số còn lại xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.