

Diffusion de la lumière par des ondes de surface

I.A

Les aspérités diffractent la lumière : émission dans d'autres directions que la seule direction prévue par les lois de Descartes

I.B

Energie potentielle de pesanteur : $E_{\text{pes}} = mg\Lambda = \mu S \Lambda g \Lambda$

$E_{\text{pes}}/E_p = \mu g \Lambda^2 / A = 2.2 \cdot 10^{-4}$: les forces de pesanteur sont bien négligeables...

I.C

$\alpha([F] \cdot [L]^{-1}) + \beta([M] \cdot [L]^{-3}) + \gamma[L]^{-1} = [T]^{-2} \Rightarrow [M]^{\alpha+\beta} + [L]^{-3\beta-\gamma} + [T]^{-2\alpha} = [T]^{-2}$. D'où :

$$\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = 3$$

$$\Omega = 5.2 \cdot 10^5 \text{rd.s}^{-1} \quad T = 12 \cdot 10^{-6} \text{s}$$

I.D.1

Sur les parois verticales, en $x = 0$ et $x = L$, $v_x = 0$

Sur le fond de la cuve, $v_z = 0$

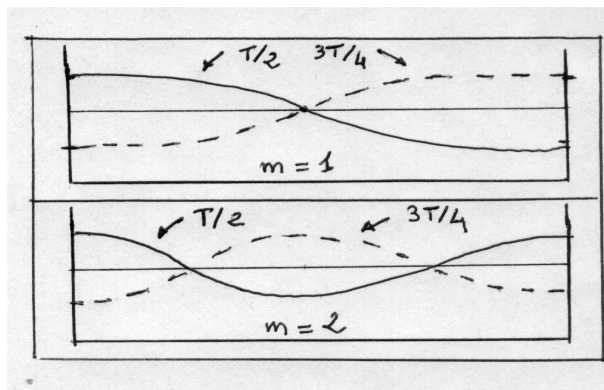
La deuxième condition est assurée puisque $f(z)$ est identiquement nulle pour $z < -\Lambda$. La première condition porte sur la fonction $\sin(Kx)$. On doit donc assurer $\sin(KL) = 0$, soit :

$$KL = m\pi$$

$\approx$

I.D.2

On a ici des ondes stationnaires et non plus progressives...



I.D.3

$v_x = -h_M \Omega f(z) \cos(\Omega t) \sin(Kx) \Rightarrow$ en ordre de grandeur $v_x \approx h_M \Omega$. Donc $E_C \approx m v_x^2$

$$E_C \approx \mu L^2 \Lambda (h_M \Omega)^2$$

Comme $E_c \approx k_B T$

$$h_M \approx \frac{1}{L\Omega} \sqrt{\frac{k_B T}{\mu\Lambda}} = 10^{-13} \text{ m}$$

I.D.4

Dans un liquide le libre parcours moyen est de l'ordre de 10^{-10} m. La valeur $h_M \ll l$ semble alors incompatible avec le modèle du fluide continu. Cependant ce modèle reste valide si l'on compare plutôt h_M à la longueur d'onde Λ .

II.A

Les traits correspondent aux ventres de l'onde stationnaire formée par la surface libre. On peut en effet remarquer que :

$$H(n\Lambda/2, t) = h_M \sin(\Omega t) \cos(\pi n) = (-1)^n h_M \sin(\Omega t) = z_n(t)$$

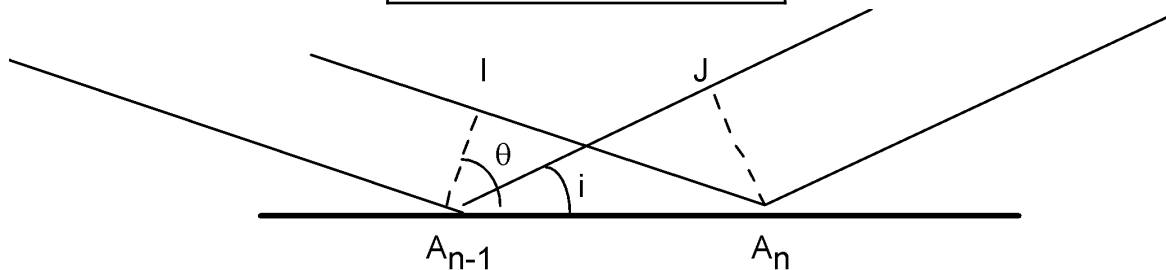
$$N = 2L/\Lambda = 500$$

C'est bien inférieur aux réseaux utilisés en TP qui comportent environ 10000 traits.

II.B.1

La différence de marche entre deux rayons successifs s'écrit : $\delta = IA_n - JA_{n-1}$, soit compte tenu de l'orientation des angles ($\theta < 0$ et $i > 0$) :

$$\delta = -\Lambda/2 (\sin\theta + \sin i)$$



II.B.2

On a dans ce cas $\delta = \Lambda/2$ et l'éclairement reçu est nul.

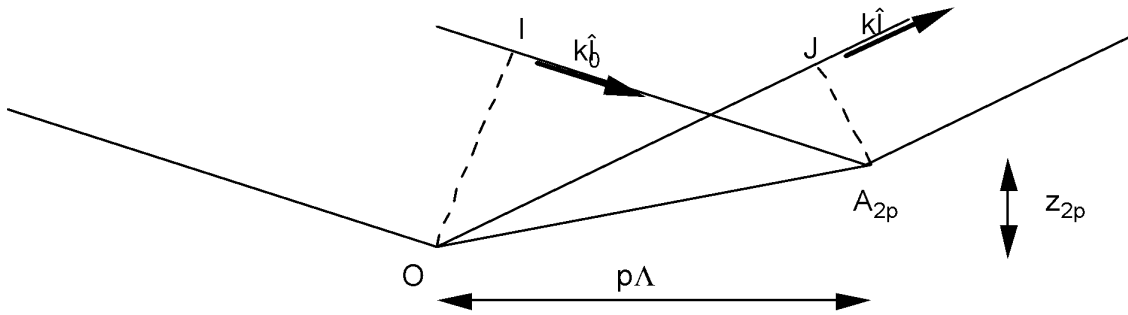
II.B.3

$$\sin i^* = \sin(-\theta + \delta i^*) = -\sin\theta + \delta i^* \cos\theta \Rightarrow \delta i^* = -\lambda_0/(\Lambda \cos\theta)$$

Si on ne veut pas récupérer la lumière émise dans la direction $-\theta$, il est nécessaire d'avoir $\delta i^* > \alpha = 2,5^\circ$, ce qui impose sur l'angle la condition :

$$\cos\theta < \lambda_0/\Lambda\alpha \Rightarrow \theta > 68,5^\circ$$

II.C.1



On peut écrire $\delta_{2p} = 1A_{2p} - OJ = 1/k_0 (\dot{k}_0 - \dot{k}) \cdot \vec{OA}_{2p}$ puisque les deux vecteurs ont même norme k_0 . D'où :

$$\mathbf{k}_0 \delta_{2p} = (\dot{\mathbf{k}}_0 - \dot{\mathbf{k}}) \cdot \vec{OA}_{2p}$$

$\delta_{2p} = -(\sin i^* + \sin \theta)p\Lambda - (\cos i^* + \cos \theta)h_M \sin(\Omega t)$ soit :

$$\delta_{2p} = -p\lambda_0 - 2h_M \cos \theta \sin(\Omega t)$$

L'amplitude associée au rayon $2p$ est donc :

$$a_{2p}(t) = \alpha \sqrt{E_0} \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0 - j4\pi/\lambda_0 h_M \cos \theta \sin(\Omega t))$$

cette expression est indépendante de p , donc l'amplitude totale associée aux rayons pairs est $a_{\text{pair}} = N/2 a_{2p}$, soit :

$$a_{\text{pair}}(t) = \alpha L/\Lambda \sqrt{E_0} \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0 - j2k_0 h_M \cos \theta \sin(\Omega t))$$

II.C.2

En changeant $2p$ en $2p + 1$, il vient :

$$\begin{aligned} \delta_{2p+1} &= -(p + 1/2)\lambda_0 + 2h_M \cos \theta \sin(\Omega t) \\ a_{\text{impair}}(t) &= -\alpha L/\Lambda \sqrt{E_0} \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0 + j2k_0 h_M \cos \theta \sin(\Omega t)) \end{aligned}$$

(Le changement de signe de l'amplitude provient d'un $\exp(j\pi)$)

II.C.3

On a évidemment $a = a_{\text{pair}} + a_{\text{impair}}$, soit :

$$a(t) = 2j\alpha L/\Lambda \sqrt{E_0} \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0) \cdot \sin[2k_0 h_M \cos \theta \sin(\Omega t)]$$

II.C.4

$$a(t) \approx 2j\alpha L/\Lambda \sqrt{E_0} \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0) \cdot 2k_0 h_M \cos \theta \sin(\Omega t)$$

$$a(t) = (2k_0 \alpha L h_M \cos \theta)/\Lambda \cdot \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0 + j\pi/2) \cdot (\exp(j\Omega t) - \exp(-j\Omega t))$$

$$a(t) = (2k_0 \alpha L h_M \cos \theta) / \Lambda [\exp(j(\omega_0 + \Omega)t - j\phi_0 + j\pi/2) + \exp(j(\omega_0 - \Omega)t - j\phi_0 + j\pi/2)]$$

On trouve bien deux ondes de pulsations $(\omega_0 + \Omega)$ et $(\omega_0 - \Omega)$

$$\Delta k / k_0 = \Delta \omega / \omega_0 = \Omega / \omega_0 = 10^{-10}$$

II.C.5

$a(t)$ décroît avec l'angle θ , alors qu'on a vu que cet angle devait être suffisamment grand pour éliminer la lumière non diffractée : il est donc nécessaire de trouver un compromis entre ces exigences contradictoires...

II.D.1

$$a_{\text{tot}} = a + a_{\text{réf}} = \exp(j\omega_0 t - j\phi_0 + j\pi/2) \cdot [\sqrt{E_0} 4k_0 \alpha L h_M \cos \theta \sin(\Omega t) / \Lambda + \sqrt{E_{\text{réf}}}]$$

Le détecteur moyenne bien sur ω_0 (période associée de l'ordre de 10^{-15} s), mais pas sur Ω (période associée de l'ordre de 10^{-5} s). D'où :

$$V(t) = \gamma \cdot [\sqrt{E_0} 4k_0 \alpha L h_M \cos \theta \sin(\Omega t) / \Lambda + \sqrt{E_{\text{réf}}}]^2 = \gamma \sqrt{E_{\text{réf}}} [1 + \sqrt{E_0} 4k_0 \alpha L h_M \cos \theta \sin(\Omega t) / \Lambda \sqrt{E_{\text{réf}}}]^2$$

$$\text{Soit } V(t) \approx \gamma \sqrt{E_{\text{réf}}} [1 + 2 \sqrt{E_0} 4k_0 \alpha L h_M \cos \theta \sin(\Omega t) / \Lambda \sqrt{E_{\text{réf}}}] = \gamma \sqrt{E_{\text{réf}}} + 16 \gamma \sqrt{E_0} \pi \alpha L \cos \theta / \Lambda \cdot h_M / \lambda_0 \sin(\Omega t)$$

$$V(t) = \gamma \sqrt{E_{\text{réf}}} + 16 \gamma \sqrt{E_0} \pi \alpha L \cos \theta / \Lambda \cdot h_M / \lambda_0 \cdot \sin(\Omega t)$$

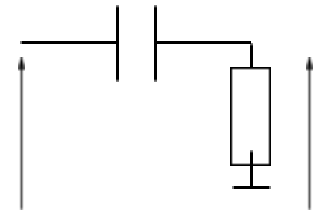
II.D.2

Un simple circuit R,C passe haut permet d'éliminer la composante continue :

Les valeurs de R et C doivent être choisies de sorte que $RC \gg 10^{-5}$.

On peut prendre par exemple :

$$R = 10k\Omega \text{ et } C = 100 \text{ nF}$$



II.D.3

Sans onde de référence, on aurait eu directement $V(t) = \gamma \cdot [\sqrt{E_0} 4k_0 \alpha L h_M \cos \theta \sin(\Omega t) / \Lambda]^2$ et donc une tension proportionnelle à $h_M^2 \sin^2 \Omega t$, et donc un signal plus faible...

II.D.4

Il faut néanmoins veiller à ce que la composante de référence ne « masque » pas totalement la composante variable dans le détecteur, avant filtrage...

Un polariseur incliné d'un angle β par rapport à la direction de polarisation du laser permet de multiplier $E_{\text{réf}}$ par un facteur atténuant $\cos^2\beta$, conformément à la loi de Malus...

II.E.1

Le réseau est utilisé en incidence normale, d'où : $\sin\delta i_n = n\lambda_0/a$, soit, avec δi_n faible :

$$\delta i_n = n\lambda_0/a$$

II.E.2

On superpose dans chaque ordre la lumière diffractée par le réseau, provenant de l'onde réfléchie en $-\theta$, qui sert ici de référence, et une onde diffractée par la surface, correspondant à un Λ_n tel que :

$$\delta i_n^* = \delta i_n \Rightarrow -\lambda_0/(\Lambda \cos\theta) = n\lambda_0/a$$

$$\Lambda_n = -a/n\cos\theta$$

II.E.3

D'après le graphe, $\log\Omega = \alpha \log k + \beta$, avec $\alpha \approx 1,5$. D'où $\Omega^2 = \gamma k^{2\alpha} = \gamma k^3$: on retrouve la valeur prévue au I.C).

De même, en prenant un point du graphe ($\log K = 6$, $\log\Omega = 6,8$), on évalue :

$$A \approx 3.10^{-2} \text{ Pa.m compatible, en ordre de grandeur avec la donnée du texte...}$$

II.F

La décroissance de $u(t)$ révèle un phénomène d'absorption dû à la dissipation d'énergie associée à la viscosité du fluide.

A cette viscosité, de coefficient cinématique ν (exprimée en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) correspond un temps caractéristique τ qu'on peut évaluer, par analyse dimensionnelle, en faisant intervenir la distance caractéristique Λ :

$$\tau = \Lambda^2/\nu$$

Ce même temps peut être évalué sur la courbe grâce à son enveloppe de la forme $\exp(-t/\tau)$, dont la pente à l'origine coupe l'axe des temps au temps τ : on évalue alors $\tau \approx 1 \text{ ms}$. D'où $\nu = \Lambda^2/\tau$, soit :

$$\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$$

III.A.1

Ecoulement incompressible $\text{div}\mathbf{v} = 0$, soit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

III.A.2/3

$$f''(z) - K^2 f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = \Phi_0 e^{Kz} \text{ puisque } f(z) \rightarrow 0 \text{ quand } z \rightarrow -\infty$$

$$f(z) = \Phi_0 e^{Kz} = \Phi_0 e^{2\pi z/\Lambda}$$

Λ apparaît bien comme la distance caractéristique de l'hypothèse H

III.B.1

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = v_z \text{ représente bien la variation de cote de la surface libre en } z = h, \text{ soit } \frac{\partial h}{\partial t}$$

III.B.2

$$H_M \Omega \cos(\Omega t) \cos(Kx) \Phi_0 = \frac{\partial h}{\partial t} = H_M \Omega \cos(\Omega t) \cos(Kx), \text{ soit } \Phi_0 = 1$$

$$f(z) = e^{Kz}$$

III.C

Euler : $\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -g \text{ grad } p$ en se limitant au premier ordre et en ne retenant que les forces volumiques de pression. D'où : $g \text{ grad}(p + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t}) = \vec{0}$, ou encore :

$$\mathbf{P} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = C(t)$$

III.D.1

Au premier ordre, la somme des forces de tension superficielle et de pression s'appliquant sur l'élément de surface $dx dy$ est nulle, soit :

$$A dy (\vec{\tau}(x+dx) - \vec{\tau}(x)) + (p - p_0) dx dy \vec{n} = \vec{0}$$

En appelant α l'angle de l'élément $dx dy$ avec l'axe x , il vient en projection sur z :

$$A dy dx \frac{\partial(\sin \alpha)}{\partial x} + (p - p_0) dx dy \cos \alpha = 0$$

Au premier ordre, $\cos \alpha \approx 1$ et $\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{\partial h}{\partial x}$, d'où :

$$p - p_0 = -A \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

III.D.2

En $z = 0$, en identifiant les deux expressions de $p - p_0$:

$$p - p_0 = AK^2 h_M \sin(\Omega t) = \mu h_M \Omega^2 / K \sin(\Omega t). \text{ D'où :}$$

$$\Omega^2 = AK^3/\mu$$