

Завдання
II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2021/2022 н.р.

6 клас

Використання калькуляторів не дозволяється!

Частина 1. Завдання 1-3 мають по 5 варіантів відповідей, з яких правильна тільки ОДНА. Позначте правильну, на Вашу думку, відповідь.

$$\frac{У \cdot К \cdot Р \cdot А \cdot \ddot{І} \cdot Н \cdot А}{\phantom{У \cdot К \cdot Р \cdot А \cdot \ddot{І} \cdot Н \cdot А}}$$

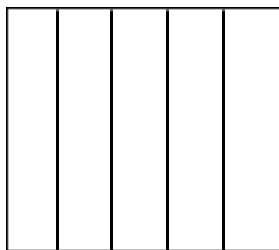
1. Знайдіть значення дробу $\frac{Є \cdot В \cdot Р \cdot О \cdot П \cdot А}{}$, де різні букви – це різні цифри, між буквами стоїть знак множення. Обґрунтуйте відповідь.

А	Б	В	Г	Д
10	9	0	11	20

2. Малюк може з'їсти банку варення за 6 хвилин, а Карлсон в 2 рази швидше. За який час вони разом з'їдять цю банку варення. Обґрунтуйте відповідь.

А	Б	В	Г	Д
1хв	2хв	3хв	2,5хв	4хв

3. Дідусь Михайло розділив квадрат на п'ять однакових прямокутників так, як показано на рисунку. Знайдіть периметр квадрата, якщо периметр кожного з п'яти однакових прямокутників 150 см. Відповідь обґрунтуйте.



А	Б	В	Г	Д
120 см	200 см	300 см	250 см	600 см

Частина 2. Завдання 4-6 розв'яжіть з повним обґрунтуванням та описом ходу міркувань.

4. У даний момент сім'я складається з батька, матері та сина. Сума років усіх членів сім'ї дорівнює 65. Чотири роки тому батько був старший за сина в 9 разів. Дев'ять років тому сума років усіх членів сім'ї дорівнювала 40. З'ясуйте, скільки років батькові? Відповідь обґрунтуйте.

5. Числа складаються з 2019 однакових цифр. Скільки серед цих чисел таких, що:

1) діляться на 15; 2) діляться на 6.

6. Є 10 спортсменів різного зросту, а також інші 10 спортсменів різної ваги. Яку найбільшу за кількістю групу спортсменів гарантовано можна вибрати з цих 20 спортсменів таким чином, щоб у цій групі усі спортсмени мали водночас різну вагу та зріст?

Завдання
II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2021/2022 н.р.
7 клас

Використання калькуляторів не дозволяється!

Частина 1. Завдання 1-3 мають по 5 варіантів відповідей, з яких правильна тільки ОДНА. Позначте правильну, на Вашу думку, відповідь.

1. Скількома нулями закінчується добуток всіх цілих чисел від 1 до 25 включно? Обґрунтуйте відповідь.

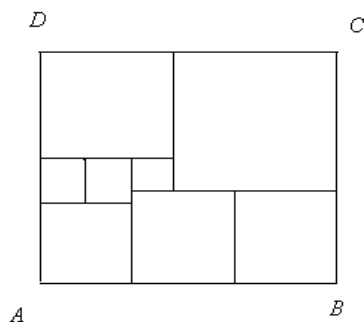
А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

2. Учора число учнів, присутніх у класі, було у 8 разів більше числа відсутніх. Сьогодні не прийшли ще два учні і виявилось, що кількість відсутніх складає 20% від числа присутніх у класі. Скільки всього учнів у класі?

А	Б	В	Г	Д
32	36	35	40	28

3. Прямокутник ABCD розділили на квадрати так, як показано на рисунку. Відомо, що сторона $AB=32$ см. Знайдіть довжину сторони AD . Обґрунтуйте відповідь.

А	Б	В	Г	Д
32	30	29	28	36



Частина 2. Завдання 4-7 розв'яжіть з повним обґрунтуванням та описом ходу міркувань.

4. Обчисліть значення виразу $\frac{1}{a+2021}$, якщо $\frac{1}{a+2020} = 2019$.
5. Відновити цифри, які замінені буквами: $\overline{2ab1} = \overline{c2d} \cdot 13$.
6. Розглядається деяка множина сороканіжок та триголових драконів. У них разом 26 голів та 298 ніг. У кожної сороканіжки одна голова. Скільки ніг у триголового дракона?
7. За столом зібралися 2020 мешканців країни "У", кожен з яких був брехуном або лицарем. Брехуни при відповіді на запитання завжди брешуть, а лицарі навпаки – завжди кажуть правду. Кожен з 2020 мешканців у відповідь на запитання, хто сидить за столом, сказав: "З 2019 мешканців, що сидять разом зі мною за столом, не менше ніж 1010 брехунів". Скільки може насправді сидіти за столом лицарів та брехунів? Вкажіть усі можливі відповіді.

Завдання
II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2021/2022 н.р.

8 клас

Використання калькуляторів не дозволяється!

Частина 1. Завдання 1-3 мають по 5 варіантів відповідей, з яких правильна тільки ОДНА. Позначте у правильну, на Вашу думку, відповідь.

1. Скількома нулями закінчується добуток всіх цілих чисел від 1 до 75 включно? Обґрунтуйте відповідь.

А	Б	В	Г	Д
15	16	17	18	20

2. Дві висоти ромба, проведені з вершин його тупих кутів перетинаються і точкою перетину поділяються у відношенні 1:2. Визначити кути ромба. Відповідь обґрунтуйте.

А	Б	В	Г	Д
30° і 150°	45° і 135°	50° і 130°	80° і 100°	60° і 120°

3. Знайдіть $x + y$, якщо $x^3 + y^3 = 9$, а $x^2y + xy^2 = 6$. Відповідь обґрунтуйте.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	2020

Частина 2. Завдання 4-7 розв'яжіть з повним обґрунтуванням та описом ходу міркувань.

4. При тестуванні учням було запропоновано 30 запитань тестового характеру, де треба було вписати правильну відповідь. За кожну правильну відповідь учень отримував «+ 5» балів, а за кожну неправильну або при відсутності відповіді – отримував «- 1» бал. Яку найменшу додатну кількість балів міг отримати учень?

5. Знайти чотиризначні числа $\overline{abca}$, які дорівнюють значенню $(5c + 1)^2$.

6. Точка B є серединою відрізка AC . Квадрат $ABDE$ і рівносторонній трикутник BCF розташовані в одній півплощині відносно прямої AC . Знайдіть величину кута між прямими CD і AF .

7. За столом зібралися 2020 мешканців країни "У", кожен з яких був брехуном або лицарем. Брехуни при відповіді на запитання завжди брешуть, а лицарі навпаки – завжди кажуть правду. Кожен з 2020 мешканців у відповідь на запитання, хто сидить за столом, сказав: "З 2019 мешканців, що сидять разом зі мною за столом, не менше ніж 1010 брехунів". Скільки може насправді сидіти за столом лицарів та брехунів? Вкажіть усі можливі відповіді.

Завдання
II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2021/2022 н.р.

9 клас

Використання калькуляторів не дозволяється!

Частина 1. Завдання 1-3 мають по 5 варіантів відповідей, з яких правильна тільки ОДНА. Позначте у правильну, на Вашу думку, відповідь.

1. Обчисліть значення виразу $(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021}) \cdot 2021$. Відповідь обґрунтуйте.

А	Б	В	Г	Д
1	2021	2020	2019	2022

2. У прямокутному трикутнику гіпотенуза в 4 рази більша за висоту, проведену з вершини прямого кута. Знайти гострі кути трикутника. Відповідь поясніть.

А	Б	В	Г	Д
$30^\circ, 60^\circ$	$15^\circ, 75^\circ$	$45^\circ, 45^\circ$	$10^\circ, 80^\circ$	Знайти неможливо

3. Розв'яжіть нерівність: $\max\{2 - 2x; 4\} > x$, де $\max\{a; b\}$ дорівнює більшому з двох чисел a, b . Відповідь обґрунтуйте.

А	Б	В	Г	Д
$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (-\infty; 2)$	$x \in (-\infty; 3)$	$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-\infty; 4)$

Частина 2. Завдання 4-7 розв'яжіть з повним обґрунтуванням та описом ходу міркувань.

4. Знайти лінію, яку описує вершина параболи $y = x^2 - 2(m - 3)x + m - 8$, якщо m набуває всіх дійсних чисел. Побудувати графік цієї лінії.

5. У трикутнику зі сторонами 6 см, 10 см і 12 см вписано коло. До кола проведено дотичну так, що вона перетинає дві більші сторони трикутника. Знайдіть периметр трикутника, який відтинається дотичною.

6. Розв'яжіть рівняння $x + y + z = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 2\sqrt{z-2}$.

7. Кожна клітинка таблиці $n \times n$ зафарбована в один з $n - 1$ кольорів. За кожен хід дозволяється всі клітини будь-якого рядка чи стовпця перефарбувати в деякий колір, якщо в

цьому рядку (стовпці) є не менш, ніж дві клітинки такого кольору. Чи можна за декілька ходів перефарбувати таблицю в один колір?

Завдання

II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2021/2022 н.р.

10 клас

Використання калькуляторів не дозволяється!

Частина 1. Завдання 1-3 мають по 5 варіантів відповідей, з яких правильна тільки ОДНА. Позначте у правильну, на Вашу думку, відповідь.

1. Обчислити значення виразу $\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots + n \cdot 3n \cdot 9n}}$, якщо $n=2020$.

А	Б	В	Г	Д
2020	0	2019	$\frac{2}{3}$	1

2. Розв'яжіть нерівність: $\min\{2 - |x|; x^4\} > x$, де $\min\{a; b\}$ дорівнює меншому з двох чисел a , b . Відповідь обґрунтуйте.

А	Б	В	Г	Д
$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (-\infty; 2)$	$x \in (-\infty; 3)$	$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-\infty; 4)$

3. В трапеції $ABCD$ менша основа BC дорівнює бічним сторонам, CH – висота. P – основа перпендикуляра, який опущено з точки H на пряму AC . Знайдіть відношення, в якому відрізок PH поділяє діагональ BD . Відповідь обґрунтуйте.

А	Б	В	Г	Д
1:2	1:1	2:3	1:3	3:4

Частина 2. Завдання 4-7 розв'яжіть з повним обґрунтуванням та описом ходу міркувань.

4. Цілі числа a, b, c є послідовними членами геометричної прогресії. Довести, що рівняння $ax^2 + bx - c = 0$ не має цілих коренів.

5. Дано функції $f(x) = |x + 2|$, $g(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0. \end{cases}$ Скільки розв'язків має рівняння $f(g(x)) = a + 2020$ в залежності від значень параметра a ?

6. На нараду в міністерство для обговорення питань олімпіад запросили 30 Заслужених вчителів України з математики, фізики, хімії та біології. Серед запрошених фізиків та

біологів разом виявилось удвічі менше ніж математиків, а фізиків та хіміків разом удвічі більше ніж біологів. Скільки на зустріч запросили математиків, якщо вчителів з кожного предмету була різна кількість?

7. Нехай O – внутрішня точка квадрата $ABCD$ зі стороною $AB=1$, для якої виконується рівність $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2$. Доведіть, що O – центр квадрата.

Завдання

II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2021/2022 н.р.

11 клас

Використання калькуляторів не дозволяється!

Частина 1. Завдання 1-3 мають по 5 варіантів відповідей, з яких правильна тільки ОДНА. Позначте у правильну, на Вашу думку, відповідь.

1. Обчисліть значення виразу $(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021}) \cdot 2021!$ Відповідь обґрунтуйте.

А	Б	В	Г	Д
2020!	2021!	2020 · 2020!	2019!+2020!	2022!-2

2. Розв'яжіть нерівність: $\max\{2 - |x|; x^4\} > x$, де $\max\{a; b\}$ дорівнює більшому з двох чисел a, b . Відповідь обґрунтуйте.

А	Б	В	Г	Д
$x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$	$x \in (-\infty; 2)$	$x \in (-\infty; 3)$	$x \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$	$x \in (-\infty; 4)$

3. До кожної грані кубика приклеїли по такому ж кубику. До кожної грані поверхні одержаної фігури приклеїли ще раз по такому ж кубику (можливо, деякі кубики закрили дві грані). З якої кількості квадратиків складається поверхня одержаного тіла?

А	Б	В	Г	Д
220	78	221	21	20

Частина 2. Завдання 4-7 розв'яжіть з повним обґрунтуванням та описом ходу міркувань.

4. Доведіть, що якщо a, b, c додатні дійсні числа і $a + b = c$, то $a^{\frac{2020}{2021}} + b^{\frac{2020}{2021}} > c^{\frac{2020}{2021}}$.

5. При яких значеннях параметра α $p(x) = x^4 + 2^{2-\sin \alpha} x^2 + \left(\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \right) x + 2^{1-\sin \alpha} + 2$
 $p(x)$ – многочлен, що залежить від x) є квадратом квадратного тричлена від x ?

6. Нехай функція $f: R \rightarrow R$ задовольняє $\forall x, y \in R$ умові: $f(f(x) - y) = x - f(y)$.

Доведіть, що функція f – непарна.

7. У трикутній піраміді сума плоских кутів при кожній вершині основи дорівнює 180° .

Площа основи S_0 . Знайти повну поверхню піраміди.