

План

1. Осьові, відцентровий та полярний моменти інерції перерізу
2. Зв'язок між осьовими та полярним моментами інерції перерізу
3. Моменти інерції простих перерізів: прямокутника, круга, кільця

1. Осьові, відцентровий та полярний моменти інерції перерізу

У деяких деформаціях міцність деталей залежить не тільки від величини площі поперечного перерізу, а й від його форми. Досі вивчалися деформації, у яких напруги залежали тільки від площі поперечного перерізу. Але для вивчення деформацій кручення і згину потрібно знати й деякі інші геометричні характеристики плоских фігур.

Статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі (рис. 1).

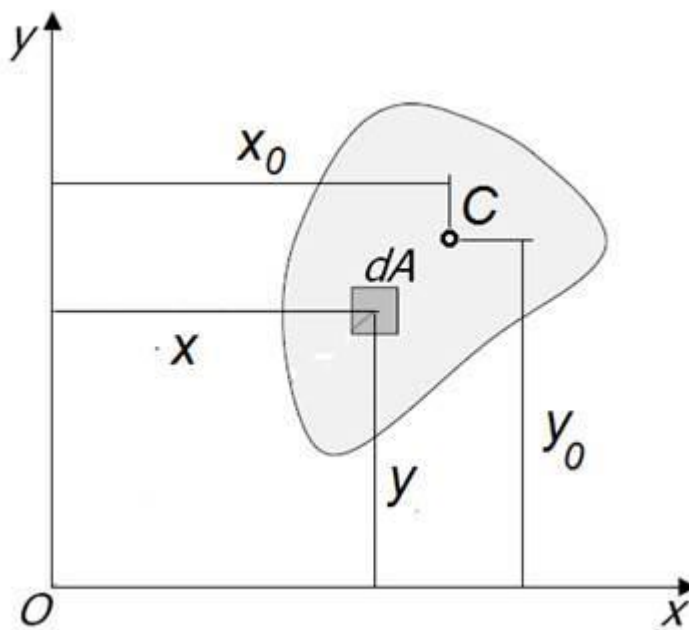


Рис. 1

Статичний момент площі позначимо S з індексом відповідної осі:

$$S_x = \int_A y \cdot dA ; \quad S_y = \int_A x \cdot dA$$

У випадку коли відомі координати центра ваги площі фігури статичний момент визначається із виразу:

$$S_x = A \cdot y_c; \quad S_y = A \cdot x_c.$$

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її центра ваги від цієї осі.

Одиниця статичного моменту площі м^3 .

Статичний момент площі фігури може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Очевидно, що статичний момент площі відносно осі, яка проходить через **центр ваги** площі фігури (центральної осі), у тому числі відносно осі симетрії фігури, **дорівнює нулю**.

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса (рис. 2).

Полярний момент інерції позначатимемо J_P :

$$J_P = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

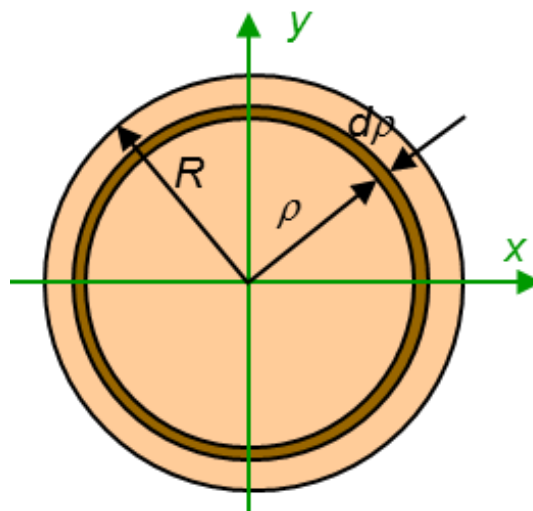


Рис. 2

Полярний момент інерції – величина завжди додатна і не дорівнює нулю.

Осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі (рис. 1).

$$J_x = \int_F y^2 \cdot dA$$

$$J_y = \int_F x^2 \cdot dA$$

Очевидно, що осьовий і полярний моменти інерції виражають в однакових одиницях: м^4 .

2. Зв'язок між осьовими та полярним моментами інерції перерізу

Осьовий момент інерції – величина завжди додатна і не дорівнює нулю. Додамо моменти інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей x і y (рис. 1):

$$J_x + J_y = \int_F y^2 \cdot dA + \int_F x^2 \cdot dA = \int_F (x^2 + y^2) dA = \int_F \rho^2 \cdot dA = J_\rho,$$
$$J_x + J_y = J_\rho.$$

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

Через те, що інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, то момент інерції складної фігури можна обчислити як суму моментів інерції простих фігур, на які розбивають складну фігуру. Поняття про осьові моменти інерції потрібне буде для вивчення теорії згину.

Осі, які проходять через центр ваги фігури, називають *центральними*. Момент інерції відносно центральної осі називають *центральним моментом інерції*.

Теорема. Момент інерції відносно якої-небудь осі дорівнює центральному моменту інерції відносно осі, паралельної цій, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між осями.

$$J_{xI} = J_x + a^2 \cdot A$$

Уявимо плоску фігуру, моменти інерції якої відносно осей координат J_x і J_y , а полярний момент інерції відносно початку координат J_ρ . Як вже було встановлено, $J_x + J_y = J_\rho$.

Якщо осі координат повертати у своїй площині навколо початку координат, то полярний момент інерції залишиться незмінним, а осьові моменти інерції змінюватимуться, до того ж

$$J_x + J_y = \text{const.}$$

Якщо сума двох змінних величин залишається сталою, то одна з них **зменшується**, а друга **збільшується**. Отже, за якогось положення осей один із осьових моментів досягає **максимального**, а другий – **мінімального** значень. Осі, відносно яких моменти інерції максимальне і мінімальне значення, називають *головними осями інерції*. Момент інерції відносно головної осі називають *головним моментом інерції*.

Якщо головна вісь проходить через центр ваги фігури, то вона називається *головною центральною віссю*, а момент інерції відносно цієї осі

– *головним центральним моментом інерції*. Якщо фігура має вісь симетрії, то ця вісь завжди буде однією з головних центральних осей.

3. Моменти інерції простих перерізів: прямокутника, круга, кільця

1) Проведемо осі, які збігаються з осями симетрії **прямокутника** $b \times h$ (рис. 3). Визначимо момент інерції відносно осі x .

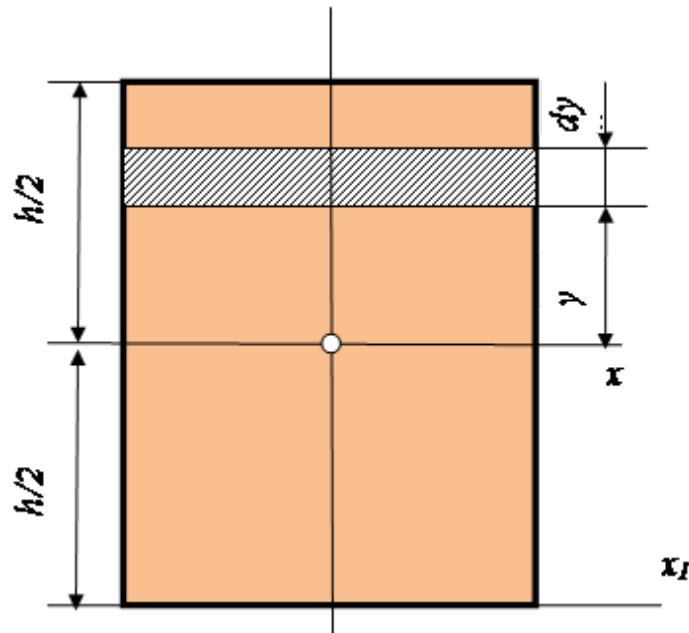


Рис. 3

Нескінченно малу площадку dA виділимо у вигляді смужки, що має ширину b і висоту dy , тоді $dA = b \cdot dy$:

$$J_x = \int_F y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Отже, осьові моменти інерції дорівнюватимуть:

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}.$$

$$J_x = J_y = \frac{a^3}{12}.$$

Для квадрата із стороною a

2) Обчислимо момент інерції **трикутника** відносно осі x_1 , яка проходить через вершину і паралельна основі (рис. 4).

Для цього на відстані y від осі x_1 виділимо елементарну смужку шириною b_x і висотою dy , паралельну основі.

З подібності трикутників дістанемо:

$$b_x = \frac{b}{h} y.$$

Площа елементарної смужки дорівнює:

$$dF = \frac{b}{h} y dy$$

Тоді момент інерції буде:

$$J_{x1} = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} y dy = \frac{bh^3}{4}$$

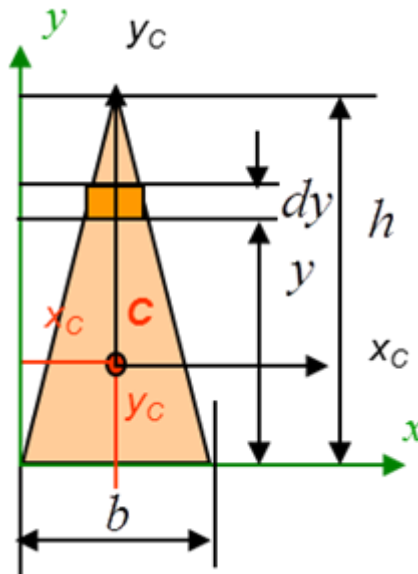


Рис. 4

Момент інерції відносно центральної осі, паралельної основі, дорівнює:

$$J_x = J_{x1} - \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \cdot A = \frac{bh^2}{4} - \frac{4}{9} h^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

3) **Круг** діаметром d (рис. 5).

Нескінченно малу площадку dA виділимо у вигляді кільця шириною $d\rho$, що знаходиться на змінній відстані ρ від полюса; тоді $dA = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho$.

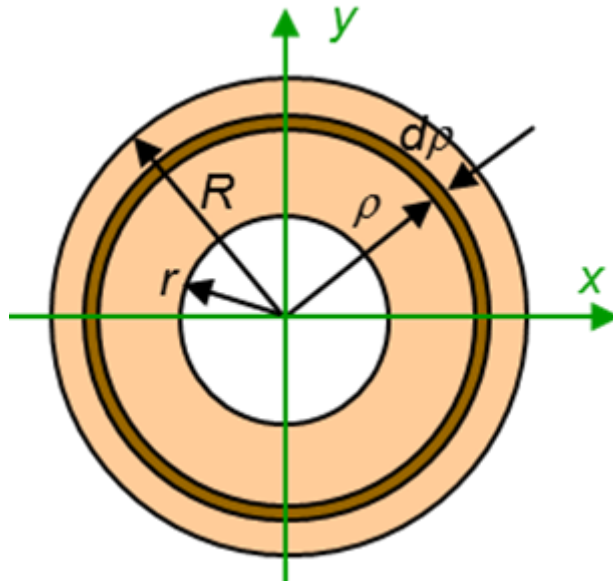


Рис. 5

Обчислимо полярний момент інерції:

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4$$

Внаслідок симетрії для круга осьові моменти інерції рівні $J_x = J_y$.

Оскільки $J_x + J_y = J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$, $J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \approx 0,05d^4$.

4) **Кільце**, що має розміри $D \times d$.

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho = 2\pi \cdot \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$$

$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4) \approx 0,1 \cdot (D^4 - d^4)$$

Полярний момент інерції **кільцевого перерізу** можна обчислити як різницю полярних моментів інерції великого і малого кругів.

Осьовий момент інерції:

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4)$$

Моменти інерції складних фігур визначають у такій послідовності:

- 1) складний переріз ділять на окремі прості фігури (прямокутники, трикутники, кола та ін.);
- 2) знаходять центр ваги складного перерізу;
- 3) обчислюють моменти інерції окремих простих фігур відносно власних центральних осей і потім відносно центральних осей всього перерізу;
- 4) підсумовують обчислені моменти інерції окремих простих фігур.

Моменти інерції прокатних профілів беруть із сортаменту. Користування сортаментом значно полегшує підрахунок моменту інерції складних перерізів.