

Exercice N°1

Dans le plan orienté dans le sens direct ,on considère un rectangle ABCD de centre O tel que $AB = 2AD$. Soient I , J et F les points définies par : $I = A * B$; $J = D * C$ et $C = B * F$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A en C et I en J .

b) Caractériser f.

2) Soit (C) le cercle de diamètre [AB] et (C ') le cercle de diamètre [CD] . La droite (BD) recoupe (C) en M et (C ') en N , on pose $M' = S_{(IJ)}(M)$

a) Montre que : $N = f(M)$.

b) Dédurre que les droites (M'N) et (BC) sont parallèles .

3) a) Montrer qu'il existe une unique isométrie vérifiant : $g(A) = C$, $g(I) = J$ et $g(D) = F$.

b) Montrer que g est un antidéplacement .

c) Déterminer $g(B)$ puis donner la nature de g et ses éléments caractéristiques .

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie $h = g \circ S_{(AD)}$

Exercice N°2

$$(BC, BA) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

On considère dans le plan orienté un triangle ABC isocèle direct tel que

On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC] Soit (C) le cercle de centre O circonscrit au triangle ABC.

1 / a) Montrer qu'il un déplacement unique f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = A$. caractériser f.

b) Déterminer $f(I)$.

c) Soit Δ la droite telle que $f = S_{(OA)} \circ S_{\Delta}$. Déterminer $S_{\Delta}(A)$, en déduire que $\Delta = (OI)$.

2. / La droite (OI) coupe (BC) en D. Le cercle (C') de centre B passant par D coupe (AD) en D et E

a) Soit $D' = f(D)$. Montrer que $D' = S_{(OA)}(D)$ et que O, J et D' sont alignés.

b) Déterminer (C'') l'image de (C') par f.

c) En déduire $f(E)$.

3. / Soit g l'antidéplacement tel que : $g(A) = C$ et $g(B) = A$

a) Montrer que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera

b) Caractériser $g^{-1} \circ f$.

Exercice N°3

Soit ABCD est un rectangle direct de centre O, on construit le point E tel que ACE un triangle équilatéral et I est le milieu de [EC].

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(B) = A$ et $f(D) = E$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de f.

2) Soit $g = t_{OA}^{\frac{\pi}{3}}$ or $(c, \frac{-\pi}{3})$

3) a) Déterminer $g(B)$ puis montrer que $g = f$.

b) Soit le point $F = f(A)$ montrer que AOEf est un rectangle.

3) Soit φ un antidéplacement telle que $(I) = O$ et $((CB)) = (AE)$.

a) Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer $((IO))$.

b) En déduire les éléments caractéristiques de φ . 4) Soient $J = D * C$ et Δ la médiatrice de $[CB]$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{\Delta} \circ S_J$

Exercice N°4

Soit ABC un triangle rectangle en A et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, on note O le milieu de segment $[BC]$ et R la rotation de centre C et d'angle $(-\frac{\pi}{3})$

1/a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f du plan tels que $f(A) = O$ et $f(C) = B$.

b) En déduire que f est une rotation dont on précisera la mesure principale angle et construire son centre I

c) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IB})$ en déduire que I appartient au segment $[AB]$

3) Soit $g = S_{(IC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(IC)}$

a) Montrer que $g = \text{Rof}$

b) Préciser $g(A)$ puis caractériser g . En déduire que $R^{-1} \circ S_{(AC)} = f \circ S_{(AC)}$

Exercice N°5

Soit l'équation (E): $z^2 - 2(m+2i)z + 2m^2 + 4im - 4 = 0$; m est un paramètre complexe.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

b) Déterminer m pour que $2i$ soit solution de (E); préciser alors l'autre solution.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct

On considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives: $m, z_1 = (1+i)m + 2i$ et $z_2 = (1-i)m + 2i$.

a) Montrer que: $z_2 = -iz_1 - 2 + 2i$.

b) En déduire que M_2 est l'image de M_1 par une rotation dont on précisera le centre I et l'angle α .

c) On suppose que m est non nul, et on note J le milieu de $[M_1M_2]$. Montrer que J est l'image de M par une translation que l'on précisera. Montrer que (IJ) et (M_1M_2) sont perpendiculaires.

3) Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ on associe le point $M'(z')$ tel que: $z' = i\bar{z} - 2 - 2i$

a) Montrer que g est un antidéplacement

b) Montrer que l'écriture complexe associée à l'application g est $z'' = z - 4 - 4i$

c) Caractériser alors g

Exercice N°6

Soit ABC est un triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ H est le projeté orthogonal de C sur (AB) I et J les milieux respectifs des segments $[AH]$ et $[AC]$ Δ est la médiatrice de $[AC]$.

1) a) Faire une figure claire

b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(C) = A$ et $f(H) = J$

b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

c) Soit D le symétrique de H par rapport à Δ , montrer que $f(J) = D$

d) Montrer que $((AB)) = \Delta$

e) La parallèle à (AC) passant par D coupe Δ en K , montrer que $(I) = K$

2) Soit $g = S_{\Delta} \circ f$

a) Déterminer (H) et (C)

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g

c) Montrer alors que le triangle CIK est équilatéral

d) on pose $(B) =$, montrer que $g(B) = P$ et en déduire que $P \in \Delta \cap \Delta'$ où $\Delta' = med[CB]$

e) Soit $h = R_{(J, -\frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{HJ}}$ montrer que h égale à g

3) Soit $L = A * D$ en utilisant le fait que $h(I) = K$ et que $h = g$ prouver que :

a) (HJ) est la médiatrice de $[KL]$

b) Le triangle JLK est équilatéral.

4) On munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \vec{AB}$

a) Déterminer l'écriture exponentielle de Z_C affixe du point C

b) Déterminer l'écriture complexe de g

c) En déduire les coordonnées du point P

Exercice N°7

Soit ABC un triangle isocèle rectangle tel que $(\vec{BA}, \vec{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ On désigne par O le milieu de $[AC]$ et par D son symétrique par rapport à (BC)

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et O sur D

b) Montrer que f est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

2) Soit I le milieu de $[OB]$ et J le point d'intersection des droites (AD) et (BC) On pose $K = f(I)$.

Montrer que K est le milieu de $[BD]$. En déduire que les points O, J et K sont alignés

3) Soit $g = S_{(OB)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$

a) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$ b) En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$

4) On pose $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$ et on désigne par Δ la médiatrice de $[BD]$

a) Montrer que h est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{BO}$

b) Déterminer l'ensemble des point M du plan tel que $h(M) = f^{-1}(M)$

c) Caractériser l'application $S_{(BO)} \circ h$

Exercice N°8

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle isocèle rectangle tel que $(\vec{BA}, \vec{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ Soit O, I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[OB]$ et $[BC]$ et soit D le symétrique de O par rapport à (BC) et N le point d'intersection de (AD) et (BC) .

1/ Faire une figure claire

2) Montrer que I est le milieu de $[AD]$

3) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f qui transforme A en C et O en D

b) Montrer que f est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

c) Soit $I' = f(I)$ montrer que I' est le milieu de $[BD]$

d) Dédurre que les points O , N et I' sont alignés

3) Soit $g = f \circ R$ où R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer $g(O)$ et caractériser g

4) Soit $h = S \circ f^{-1}$ où S est la symétrie orthogonale d'axe (AO)

a) Déterminer $h(D)$ et $h(C)$ b) Montrer que h est une symétrie glissante et préciser ses éléments caractéristiques

c) Déterminer l'ensemble des points M tel que $h(M) = f^{-1}(M)$

Exercice N°9

Dans le plan orienté, soit un rectangle $ABCD$ tel que $AB=2AD$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ et K le symétrique de I par rapport à (DC) .

1) On pose $f = S_{(IC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(IJ)}$.

a) Caractériser l'application $S_{(BC)} \circ S_{(IJ)}$.

b) En déduire que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

2) On pose $g = t_{\overrightarrow{IK}} \circ S_{(IC)}$.

a) Montrer que $g \circ S_{(AJ)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

3) Montrer que le quadrilatère $ICKD$ est un carré.

4) Déterminer toutes les isométries qui laissent le triangle IBC globalement invariant.

5) Soit φ une isométrie qui transforme le triangle IBC en le triangle JCK et R la

rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $R \circ \varphi$ laisse le triangle IBC globalement invariant.

b) Déterminer alors toutes les isométries qui transforment le triangle IBC en JCK .

Exercice N°10

Dans le plan orienté on considère un losange $ABCD$ tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, E le symétrique de A par rapport à B . Soit f l'application du plan P dans lui-même définie par $f(A)=B, f(B)=D$ et $f(D)=C$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'})$

1) Vérifier que dans ce repère le point D a pour affixe $z_D = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et que $z_D = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) On admet que l'expression complexe de f dans le repère R est : $f(M(z)) = M'(z')$ tel que $z' = a\bar{z} + b$

a) En utilisant $f(A)=B$ et $f(B)=D$, montrer que $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z + 1$

b) Montrer que $BM'=AM$, en déduire que f est une isométrie du plan

c) Déterminer l'ensemble des points invariants par f, puis déterminer la nature de f

3) Soit l'antidépacement g du P dans le plan qui au point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z + 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$
Déterminer g(B) et g(C) ; déduire la nature de g

4) Soit t la translation de vecteur $\vec{AB}$, écrire l'expression complexe de t puis celle de go t et vérifier que $f = go t$

5) Déterminer l'affixe du point F=f(E) et montrer en utilisant les affixes que les points D, B et F sont alignés et les droites (CB) et (CF) sont perpendiculaires