З досвіду роботи
вчителя математики
Чайки М.П.

ЗМІСТ

«…гра – це величезне світле вікно, через яке в духовний світ дитини вливається життєвий потік уявлень, понять про навколишній світ»

В.Сухомлинський

ВСТУП

Як відомо, знання, отримані без інтересу, не стають корисними. Тому одним з найважчих і найважливіших завдань дидактики як була, так і залишається проблема виховання інтересу до навчання. Головним із них - як викликати стійкий пізнавальний інтерес. З кожним роком діти все пасивніше ставляться до навчання. Зокрема знижується інтерес в учнів до такого предмету як математика. Цей предмет сприймається учнями як нудний і зовсім не цікавий. У зв'язку з цим вчителями ведеться пошук ефективних форм і методів навчання математики, які сприяли б активізації навчальної діяльності, формуванню пізнавального інтересу. Однією з таких форм є математична гра. Математичні ігри відрізняються емоційністю, викликають в учнів позитивне ставлення до позакласних занять з математики, а, отже, і до математики в цілому; сприяють активізації навчальної діяльності; сприяють формуванню пізнавального інтересу до предмета.

Навчання за допомогою веселої пізнавальної математики - збірка захоплюючих розвиваючих математичних ігор.

В іграх, які пропонуються в даній збірці, грають двоє, ходять по черзі, причому гравець не може пропустити хід. Запитання завжди одне і те ж: хто переможе при правильній грі – перший, тобто той, що починає гру, чи другий?

І г р и - ж а р т и

Ігри–жарти – це ігри, результат яких не залежить від того, як грають суперники, а залежить тільки від початкових умов гри.

Задача 1. Двоє по черзі ламають шоколадку розміром $m \times n$. За один хід дозволяється зробити прямолінійний розлам будь-якого з кусків вздовж заглиблення, але тільки одного. Програє той, хто не може зробити черговий хід.

Розв'язання. Після кожного ходу кількість шматків збільшується на 1. Спочатку був один шматок. В кінці гри, коли вже не можна зробити хід, шоколадка розламана на маленькі дольки,кількістю mn. Значить гра може продовжуватися $mn-1$ хід. Тому, якщо mn -1 непарне, то mn - парне, то виграє перший гравець, оскільки він робить останній хід (як і всі інші ходи з непарними номерами). Якщо mn -1 парне, то mn непарне і виграє другий гравець.

Задача 2. На дошці в рядочок записано n цілих чисел. Гравці по черзі розставляють між ними знаки «+» або «-». Після того, як всі місця заповнені, підраховується результат. Якщо в результаті парне число, то виграє перший гравець, якщо непарне, то виграє другий гравець.

Розв'язання. Нехай «н» означає непарне число, а «п» -парне.

Оскільки п + п = п, п – п = п, н + н = п, н – н = п, н + п = н, н – п = н, то результат залежить тільки від кількості непарних чисел, записаних на дошці. Якщо кількість непарних чисел парна, то виграє перший гравець, а в іншому випадку – другий.

Задача 3. На дошці записано m одиниць і n двійок. За один хід кожному з гравців дозволяється стерти будь-які дві цифри і, якщо вони були однакові, записати двійку, якщо різні – записати одиницю. Якщо остання цифра, яка залишиться записана на дошці, одиниця, то виграє перший гравець, а якщо двійка – виграє другий.

Розв'язання. Відмітимо, що після кожного ходу кількість одиниць не змінюється, або зменшується на 2 (інваріант). Отже, парність числа одиниць не змінюється. Тоді, якщо m парне, то після останнього ходу одна одиниця залишитись не може. В цьому випадку виграє другий гравець. І навпаки, якщо m непарне, виграє перший гравець.

Задача 4. В торбинці лежить 101 цукерка. Двоє по черзі беруть з торбинки від 1 до 10 цукерок. Коли всі цукерки розібрані, гравці підраховують взяту кількість цукерок. Якщо ці числа взаємно прості, то виграє перший гравець, якщо – ні, то другий.

Розв'язання. Оскільки число 101 просте, то якщо $101 = m + n$, то числа m і n взаємно прості, тому що наявність якогось спільного їх дільника означало б наявність цього ж дільника і в числа 101, що неможливо. Тому перший гравець завжди виграє.

Задача 5. На дошці розміром $m \times n$ $(m \geq 2,\ n \geq 2)$ одна з клітинок чорна, а решта – білі. Гравці по черзі перефарбовують один рядок або один стовпчик (перефарбування – заміна даного кольору на протилежний). Виграє перший гравець, після ходу якого всі клітинки стануть білими. В противному випадку виграє другий гравець.

Розв'язання. Завжди виграє другий гравець. Розглянемо квадратик 2×2, що містить чорну клітинку. Якби вдалось всі клітинки зробити білими, то і клітки квадрата 2×2 стали б білими. На початку гри чорна клітка одна, а в кінці гри чорних кліток нуль. Але числа 1 і 0 різної парності, а при перефарбовуванні квадрата 2×2 парність числа парних клітинок не змінюється. Отже таке перефарбовування неможливе, тому завжди виграє другий гравець.

Задача 6. На дошці записані числа 1, 2, 3, …,2015. Гравці по черзі стирають з дошки будь-які два числа і замість них записують модуль їх різниці до тих пір, поки на дошці не залишиться одне число. Якщо воно буде парним, то виграє перший гравець, а якщо непарним, то другий.

Розв'язання. Знайдемо суму записаних на дошці чисел:

$$1+2+3+...+2015=\frac{1+2015}{2}\cdot 2015=1008\cdot 2015$$

- парне число і парність чисел, записаних на дошці в процесі гри не змінюється. Тому на дошці залишиться парне число і виграє перший гравець.

Задача 7. Маємо три купи каменів: в першій – 10, в другій – 15, в третій 20. За один хід дозволяється розділити будь-яку купу на дві менші. Програє той, хто не зможе зробити хід.

Розв'язання. Після кожного ходу кількість купок збільшується на 1. Спочатку їх було 3, а наприкінці 45. Таким чином всього буде зроблено 42 ходи. Останній виграшний 42-й хід зробить другий гравець.

Задача 8. Двоє по черзі ставлять тури на шахову дошку так, що тури не б'ють одна одну, Програє той, хто не зможе зробити хід.

Розв'язання. Після кожного ходу і кількість вертикалей і кількість горизонталей, на які можна поставити туру , зменшується на 1. Тому гра буде тривати рівно 8 ходів. Останній, виграшний, хід зробить другий гравець.

Задача 9. На дошці написано числа 25 і 36.За хід дозволяється дописати ще одне натуральне число – різницю будь-яких двох написаних на дошці чисел, якщо вона ще не зустрічалась. Програє той, хто не зможе зробити хід.

Розв'язання В процесі гри(порівняйте з алгоритмом Евкліда) обов'язково буде записаний найбільший спільний дільник початкових чисел. Отже будуть виписані і всі числа, кратні йому, що не перевищують більшого з початкових чисел. У нашому випадку НСД дорівнює 1. Тому будуть виписані всі числа від 1 до 36. Таким чином, гра буде тривати 34 ходи і виграє другий гравець.

Задача 10. Маємо клітчасту дошку розмірами:

а) 9x10; б) 10x12; в) 9x11.

За один хід дозволяється викреслити будь-яку горизонталь, чи будь-яку вертикаль, на якій на час ходу є хоча б одна не викреслена клітинка. Програє той, хто не може зробити хід.

Розв'язання. Ця гра не зовсім жарт. В ній той, хто виграє, допустивши помилку, може програти. Ця помилка полягає в тому, що він після свого ходу залишає невикреслені клітинки тільки в одному стовпці чи тільки в одному рядку, надаючи супротивникові виграти за один хід. Програє в цій грі, той хто зробить цей згубний крок. Зауважимо, що частину дошки, що залишилась після викреслювання горизонталі клітчатої дошки m х n, можна представити як дошку

(m -1)х n. Аналогічно, після викреслювання вертикалі залишається дошка m х(n -1). Ситуація, в якій кожен хід є «згубним» є дошка 2х2.Таким чином виграє гравець, після ходу якого вона виникла. Проте, як ми бачимо, при кожному ході сумарна кількість горизонталей і вертикалей на дошці зменшується на 1. Тому переможця при правильній грі визначає парність цієї суми на початку гри. В пункті а) виграє перший гравець, а в пунктах б) і в) – другий.

Симетрія

Задача 11. Двоє по черзі кладуть п'ятаки на круглий стіл так, щоб вони не накладались один на одного. Програє той, хто не зможе зробити черговий хід.

Розв'язання. Виграє перший гравець. Першим ходом він кладе свою монету так , щоб центр монети співпав з центром стола. Після цього на кожен хід другого гравця перший відповідає монетою, покладеною симетрично відносно центра стола. Відмітимо, що при такій поведінці гравців після кожного ходу першого гравця позиція на столі симетрична. Тому, якщо можливий хід другого гравця, то можливий і хід першого.

Задача 12. Двоє по черзі ставлять слонів на клітинки шахової дошки так, щоб слони не били один одного (колір слонів значення не має). Програє той, хто не може зробити черговий хід.

Розв'язання. На відміну від попередньої задачі центральна симетрія не дозволяє досягти виграшу жодному з гравців. Тому скористаємось осьовою симетрією шахової дошки. За вісь симетрії приймемо пряму, що розділяю четверту і п'яту горизонталі. Симетричні відносно неї поля мають різний колір, і, тим самим слон, поставлений на одне з них, не заважатиме ходу на друге. Отже, в цій грі виграє другий гравець.

Задача 13. Двоє по черзі ставлять на вільні клітки шахівниці коней: один – чорних, другий – білих, роблячи це так, щоб жоден кінь не міг бути побитий одним з уже поставлених противником коней. Програє той, хто не може зробити черговий хід.

Розв'язання. Використавши симетріє відносно центра шахівниці, виграє другий гравець.

Задача 14. Гравці по черзі замальовують клітинки квадрата 10x10, причому замалювати можна одну з трьох фігур: прямокутники 1x2, 1x3, причому двічі закрашувати одну й ту ж клітинку не можна. Виграє той, хто замалює останню клітинку.

Розв'язання. Виграє другий гравець, якщо кожним своїм ходом буде симетрично відносно центра квадрата повторювати ходи першого.

Задача 15. На столі лежать дві купки сірників. Гравці по черзі беруть або один сірник з однієї купки, або по одному сірнику з обох купок. Виграє той, хто візьме останній сірник.

Розв'язання. Якщо в кожній купці парна кількість сірників, то виграє другий, повторюючи ходи першого гравця. Якщо хоча б в одній купці непарна кількість сірників, то виграє перший гравець. Своїм першим ходом він добивається того, щоб кількість сірників в обох купках була парною, а потім повторює ходи другого гравця.

Задача 16. На колі розміщено $2n$ точок. За один хід гравцю дозволяється з'єднати довільні дві точки відрізком, який не перетинає відрізків що вже проведені раніше. Програє той, то не зможе зробити черговий хід.

Розв'язання. Виграє перший. Першим ходом він проводить хорду, по обидві сторони якої розміщено по (n-1)-й точці. Після цього на кожен хід другого гравця він відповідає аналогічним ходом по другу сторону від першої хорди.

Задача 17. Є дві купи каменів по 7 у кожній. За хід дозволяється взяти будь-яку кількість каменів, але тільки з однієї купи. Програє той, кому нема що брати.

Розв'язання. В цій грі другий гравець перемагає, якщо буде брати стільки ж каменів, скільки їх взяв перший гравець попереднім ходом, але з іншої купи.

Задача 18. Двоє по черзі ставлять королі у клітинки дошки 9x9 так, що королі не б'ють один одного. Програє той, хто не може зробити черговий хід.

Розв'язання. Виграє перший. Перший хід в центр дошки, а потім потрібно виконувати ходи, симетричні ходам другого гравця відносно центра симетрії.

Задача 19. Дано клітчасту дошку 10x10. За хід дозволяється покрити будь-які дві сусідні клітинки прямокутником 1x2 так, щоб прямокутники не перекривались. Програє той, хто не може зробити хід.

Розв'язання. Виграє другий, якщо буде виконувати ходи центрально - симетричні ходам першого.

Задача 20. В кожній клітинці дошки 11x11 стоїть шашка. За хід дозволяється зняти з дошки будь-яку кількість шашок, що йдуть підряд або з одного вертикального, або з одного горизонтального ряду. Виграє той, хто зняв останню шашку.

Розв'язання. Виграє перший. Першим ходом він знімає центральну шашку, а потім грає центрально-симетрично.

Задача 21. Є дві купки камінців: в одній – 30, а в другій – 20. За хід дозволяється брати будь-яку кількість камінців, але тільки з однієї купи. Програє той, кому нема що брати.

Розв'язання. Виграє перший, Своїм першим ходом він зрівнює кількість камінців в обох купах, а потім грає як в задачі 17.

Задача 22. Ромашка має а) 12 пелюсток; б) 11 пелюсток. За хід дозволяється відірвати або одне пелюстку, або дві, що ростуть поруч. Програє той, хто не може зробити ходу.

Розв'язання. В обох випадках виграє другий гравець. Незалежно від ходу першого гравця, другий може після свого ходу залишити два однакових за довжиною ланцюжки пелюсток. Далі використовується симетрія.

Задача 23. Дано прямокутний паралелепіпед розмірами а) 4х4х4;. б) 4х4х3; в) 4х3х3, зібраний з одиничних кубиків. За хід дозволяється проткнути спицею будь-який ряд, якщо в ньому є хоч один не проткнутий кубик. Програє той, хто не може зробити хід.

Розв'язання. У випадках а) і б) виграє другий, використовуючи центральну симетрію. У випадку в) виграє перший, Першим ходом він протикає ряд, що складається з центральних кубиків чотирьох шарів 3х3. Далі використовує центральну симетрію.

Задача 24. Двоє по черзі розламують шоколадку 5х10.За хід дозволяється зробити прямолінійний розлом будь-якого з кусків вздовж заглиблення. Виграє той, хто перший відломить частинку 1х1.

Розв'язання. В цій грі програє той, хто відломить шматок шириною 1. Виграє перший гравець. Першим ходом він розламує шоколадку на два шматки 5х5. Далі він повинен використовувати осьову симетрію.

Задача 25. Двоє по черзі ставлять хрестики і нулики в клітинки дошки 9х9. Той, хто починає ставить хрестики, його суперник – нулики. В кінці треба підрахувати, скільки є рядочків і стовпчиків, в яких хрестиків більше, ніж нуликів – це очки, набрані першим гравцем. Кількість рядочків і стовпчиків, де нуликів більше, ніж хрестиків – очки другого гравця. Той з гравців, хто набере більше очок, перемагає.

Розв'язання. Виграє перший. Першим ходом він ставить хрестик у центральну клітинку. Після кожного ходу другого гравця перший ставить хрестик у центрально–симетричну клітинку.

Виграшні стратегії

Задача 26. Петрик і Василько записують 12-значне число, ставлячи цифри по черзі, починаючи з старшого розряду. Починає Василько. Він виграє, якщо отримане число не ділиться на 9, інакше – виграє Петрик.

Розв'язання. Виграє Петрик. Одна з його можливих стратегій – доповнювати кожним ходом Василькову цифру до 9, тобто, якщо Василько написав 0, то Петрик пише 9, якщо Василько написав 1, то Петрик пише 8 і т. д. Таким чином після кожної пари ходів сума цифр збільшується на 9. На момент запису всього числа вона буду дорівнювати 54, тому отримане число ділиться на 9.

Задача 27. Вовк і Заєць грають в таку гру: на дошці написано деяке натуральне число з ненульовою останньою цифрою, і хід полягає втому, щоб відняти від числа яку-небудь його ненульову цифру і записати на місці старого числа отримане нове. Виграє той хто першим отримає нуль. Починає гру Вовк.

Розв'язання. Виграє Вовк, віднімаючи даного числа його останню цифру.

Задача 28. В ряд написано цифри 1, 2, 3, …,20, 21. Гравець за одним ходом закреслює будь-яке із не закреслених ще чисел. Гра продовжується, доки на дошці не залишаться два числа. Якщо сума цих чисел ділиться на5, то виграє перший гравець, а якщо не ділиться, то виграє другий.

Розв'язання. Виграє перший гравець. Розіб'ємо дані числа на множини

$M_0 = \{5,10,15,20\}$, $M_1 = \{1,6,11,16,21\}$, $M_2 = \{2,7,12,17,\}$, $M_3 = \{3,8,13,18\}$, $M_4 = \{4,9,14,19\}$.

Як бачимо, що в кожну множину попали числа, що дають однакову остачу при діленні на 5.

Першим ходом перший гравець викреслює число 21. Якщо другий гравець викреслює число із множини M_0, то перший гравець наступним ходом теж викреслює число із множини $M_{0.}$

Якщо другий гравець викреслює число з множини M_1 чи M_4, то перший гравець викреслює числа із множини M_4 чи M_1, тобто перший гравець викреслює число, що має остачу при діленні на 5, яка доповнює остачу з числа, викресленого другим гравцем. Тоді наприкінці залишаться два числа, які обидва діляться на 5, або такі, що сума їх остач при діленні на 5 буде дорівнювати 5, тобто сума буде ділитись на 5.

Задача 29. Перший гравець записує якусь цифру, другий гравець приписує до неї зліва або справа ще одну цифру, перший гравець приписує до утвореного числа ще одну цифру і т.д. Виграє другий гравець, якщо число, що утвориться після його ходу, буде квадратом цілого числа, якщо – ні, то виграє перший гравець. Вважається що гра буде продовжуватись не більше заданого числа ходів.

Розв'язання. Виграє перший гравець. Відмітимо насамперед наступне:

а) якщо a і b натуральні числа такі, що $a^2 = b$ і b містить не менше чотирьох цифр, то $a \geq 31$.

б) якщо a_1, a_2 натуральні числа такі, що $a_1 \geq 31, a_2 \geq 31$ і $a_1 \geq a_2$, то

$a_1^2 - a_2^2 \geq 31$.

Опишемо виграшну поведінку першого гравця. Своїм першим ходом він пише цифру 7. тоді другий гравець не може виграти своїм першим ходом. Якщо далі другий гравець напише цифру зліва, то перший гравець знову пише цифру 7, але справа. Нехай тепер другий гравець пише цифру справа і при цьому отримується число a. Розглянемо числа $100a + 20 + b, 100a + 30 + b, \ldots,$ де b =0, 1, 2, …, 9.

Тоді в силу зауваження хоча б один із вказаних наборів не буде квадратом цілого числа. Тому перший гравець пише справа цифру 2 або 3, в залежності від того, який набір володіє вказаною властивістю.

Задача 30. Дано куб і дві фарби синя і жовта. Перший вибирає три ребра куба і фарбує їх в синій колір. Другий вибирає три непофарбовані ребра і фарбує їх в жовтий колір і т. д. Забороняється перефарбовувати ребро в інший колір, або фарбувати двічі одним кольором. Виграє той, хто першим зможе пофарбувати своєю фарбою всі ребра якої-небудь грані.

Розв'язання. Нічия. Перший не може виграти, бо другий може вибрати три ребра, що попарно перетинаються. Аналогічно, другий теж не може виграти.

Задача 31. Дано опуклий многогранник з $n\ (n \geq 5)$ гранями, з кожної вершини якого виходить рівно три ребра. Гравці по черзі пишуть своє ім'я на одній з вільних граней. Виграє той, хто перший напише своє ім'я на трьох гранях, що мають спільну вершину.

Розв'язання. Виграє перший. Покажемо спочатку, що існує грань, яка не є трикутною. Припустимо, що всі грані многогранника – трикутники. Тоді у многокутника $\frac{3n}{2}$ ребер, оскільки з кожної вершини виходить три ребра и кожне ребро належить одночасно двом вершинам. За формулою Ейлера (В+Г-Р=2) маємо $n + n - \frac{3n}{2} = 2$

Тобто $n = 4,$ що суперечить умові задачі.

Отже, існує грань , що не є трикутником, яку і повинен зайняти своїм першим ходом перший гравець. Позначимо цю грань A_1. Другим ходом перший гравець повинен зайняти грань A_2, що прилягає до грані A_1 і має спільні ребра з двома вільними гранями A_3, A_4, що також прилягають до грані A_1. Це можливо, бо другий гравець своїм ходом може зайняти тільки одну грань, що прилягає до A_1. Нарешті своїм третім ходом перший гравець може зайняти одну з граней A_3 чи A_4 не зайняту другим гравцем, після чого перший гравець виграє.

Задача 32. На столі лежить дві купки сірників. Кожним ходом можна взяти один із сірників з першої купки, або перекласти один сірник з другої купки в першу. Виграє той, хто візьме останній сірник.

Розв'язання. Нехай m - кількість сірників у першій купці на початку гри. Тоді, якщо m парне, то виграє другий, а якщо m непарне, то – перший.

а) Нехай m - парне. Тоді після першого ходу першого гравця ми будемо мати позицію $(m-1;n)$, або $(m+1;n-1)$, причому в кожній позиції кількість сірників в першій купці непарна. Тому другий гравець добивається, щоб кількість сірників в першій купці стала парною. Так на кожному кроці або зменшується на 1 загальна кількість сірників, або на 1 зменшується кількість сірників в другій купці. За скінчену кількість кроків Другий гравець після свого ходу робить позицію(2;0).

б) Нехай m - непарне,то перший гравець своїм ходом Бере один сірник з першої купки, що приводить до випадку, коли в першій купці кількість сірників парна і хід переходить до другого гравця. Далі гра розвивається по плану пункту а), тільки вже в ролі другого гравця – перший.

Задача 33. Гравці ставлять по черзі числа замість зірочок в наступній система рівностей :

$$\begin{cases} * = * \\ * = * + * \\ * = * + * + * \end{cases}$$

Виграє другий, якщо всі рівності виконуються, виграє перший, якщо хоча б одна з рівностей не виконується.

Розв'язання. Відмітимо, що гравець, котрий замінює останню зірочку в рівності , завжди може добитись, щоб рівність або виконувалась, або не виконувалась. Відповідно, кожен гравець повинен замінювати останню зірочку в кожній рівності. Для цього перший гравець повинен замінити зірочку на число в друг1й рівності, тоді кількість зірочок в усіх рівностях буде парною. Далі після довільного ходу другого гравця, який своїм ходом порушив парність, перший своїм ходом відновлює парність числа зірочок в кожній рівності. Останнім ходом буде хід першого гравця, який і виграє.

Задача 34. Є дві купки цукерок по дев'ять у кожній. За один хід потрібно перекласти з однієї купки в іншу одну цукерку і з'їсти дві цукерки з будь-якої купки. Програє той, хто не зможе зробити хід.

Розв'язання. Виграє перший гравець. Першим ходом він перекладає одну цукерку з однієї купки в іншу і з'їдає цукерку з тієї купки, де десять цукерок. Таким чином отримуємо дві купки по вісім цукерок. Далі, незалежно від ходу противника, перший гравець може отримати дві купки по шість цукерок.

Після другого ходу другого гравця, перший може отримати дві купки по чотири цукерки, після третього – дві купки по дві цукерки. Тепер, який би крок не зробив супротивник, перший гравець виграє.

Задача 35.Перший гравець своїм ходом повідомляє яку-небудь дату січня. Далі кожен з гравців своїм ходом називає пізнішу дату, збільшуючи або календарну дату в місяці,або місяць,але не те і друге разом. Виграє той, хто першим досягне 31 грудня.

Розв'язання. Виграє перший гравець. Розглянемо дати:

20 січня, 21 лютого, 22 березня, 23 квітня, 24 травня, 25 червня, 26 липня, 27 серпня, 28 вересня, 29 жовтня, 30 листопада, 31 грудня.

Назвемо ці дати особливими. Відмітимо, що якщо один гравець назве особливу дату, то другий змушений буде називати неособливу дату. Якщо один з гравців називає неособливу дату, то другий може назвати особливу дату.

Перший гравець своїм першим ходом називає 20 січня. Другий гравець своїм першим ходом змушений назвати неособливу дату, тому перший гравець знову називає особливу дату і т. д.

Оскільки 31 грудня особлива дата, то ви   грає перший гравець.

Задача 36. На столі лежать карточки з номерами від 1 до 9. За один хід кожному з гравців дозволяється взяти зі столу одне карточку. Виграє той, у кого буде три карточки, загальна сума на яких 15.

Розв'язання. Буде нічия. Дана гра еквівалентна грі в хрестики-нулики на квадраті 3х3 виду:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Задача 37. Нехай на прямій R дано відрізок $[a;b]$. Перший гравець своїм черговим ходом вибирає точку $x_n \in R$, що не співпадає з жодною із раніше вибраних точок. Другий гравець своїм ходом вибирає один з двох променів L_n з початком в точці x_n . Гра продовжується задане число ходів k . Виграє другий гравець, якщо відрізок $[a;b]$ належить об'єднанню всіх променів L_n $n = 1,2,3,...,k.$ Якщо – ні, то виграє перший гравець.

Розв'язання. Виграє перший гравець. Своїм першим ходом він вибирає точку $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Нехай L_1 - промінь, вибраний другим гравцем. Тоді або $(a; x_1)$ не перетинається з вибраним променем, або $(x_1; b)$ не перетинається з вибраним променем (умова 1).Перший гравець вибирає відрізок, для якого виконана умова 1. Позначимо цей відрізок $[a_1; b_1]$. Перший гравець своїм другим ходом вибирає точку

$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ і нехай L_2 - промінь, вибраний другим гравцем. Тоді або

$(a_1; x_2)$ не перетинається з L_2, або $(x_2; b_1)$ не перетинається з L_2

(умова 2).

Далі перший вибирає новий відрізок, для якого виконується умова 2 і, продовжуючи діяти описаним способом, перший гравець доб'ється перемоги.

Задача 38. На дошці записано рівняння $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0.$

Перший гравець замінює один із коефіцієнтів довільним дійсним числом. Потім другий гравець замінює один із двох коефіцієнтів, що залишились теж дійсним числом. Нарешті, перший замінює третій коефіцієнт дійсним числом. Перший гравець виграє, якщо рівняння має три різних дійсних корені. В іншому випадку виграє другий гравець.

Розв'язання. Виграє перший гравець. Першим ходом перший гравець вибирає коефіцієнт a_2 так, щоб $1 + a_2 < 0.$ Далі, після ходу другого гравця, перший вибирає третій коефіцієнт так, щоб $a_1 + a_3 = 0$. Тоді $f(1) = 1 + a_1 + a_2 + a_3 < 0,\ \ f(-1) = -1 + a_1 - a_2 + a_3 > 0.$ Звідси, на кожному з проміжків $(-\infty;-1],\ [-1:1],\ [1;\infty)$ рівняння має корінь.

Задача 39. На дошці записано рівняння: $* x^2 + *x + * = 0.$

Перший з гравців називає будь-які три числа, другий гравець розставляє їх на свій розсуд замість зірочок. Виграє перший гравець, якщо рівняння має різні раціональні корені.

Розв'язання. Перший гравець виграє, якщо назве при попарно різні цілі числа, сума яких буде дорівнювати нулю. Тоді дане рівняння буде мати два корені: 1 і частка від ділення вільного члена на перший коефіцієнт.

Задача 40. Гра починається з числа 7. за один хід дозволяється додати до наявного числа довільне , менше від нього натуральне число. Грають двоє, роблячи ходи почергово. Виграє той хто дістане число 1997. У кого з гравців є виграшна стратегія?

Розв'язання. Проаналізуємо задачу з кінця. 1997 – виграшна позиція. Із позицій 999 – 1996 її можна досягнути за один хід. Тому всі ці позиції програшні. Із позиції 998 всі ходи ведуть у програшну позицію, тому 998 - виграшна позиція. Аналогічно встановлюємо: позиції 500 – 997 програшні, 499 - виграшна ;250 – 498 – програшні. 249 – виграшна, 125 – 248 – програшні, 124 – виграшна, 63 – 123 –програшні, 62 – виграшна, 32 – 61 – програшні, 31 – виграшна, 16 – 30 – програшні, 15 – виграшна, 8 – 14 – програшні, 7 – виграшна позиція. Отже, перемогу здобуде другий гравець, якщо своїми ходами займатиме виграшні позиції: 15, 31, 62, 124, 249, 499, 998, 1997.

Ігри на шаховій дошці

В даному розділі запропоновано задачі, для розв'язування яких запропоновано досить загальний метод, який називається аналіз з кінця. За допомогою даного методу можна знайти виграшні стратегії.

Задача 41. На крайній лівій клітинці смужки 1х100, розкресленої на клітки1х1, стоїть фішка. За один хід дозволяється перемістити її на 1,10 або 11 кліток вправо. Програє той, хто не зможе зробити черговий хід.

Розв'язання. Виграє перший. пронумеруємо кліточки смужки числами від 1 до 100. Назвемо клітинку виграшною, якщо гравець, що робить хід з цієї клітинки, виграє, і програшною в протилежному випадку. Всяка клітинка, з якої можна перейти в тільки в виграшну клітинку, є програшною. Навпаки, клітинка, з якої хоча б один хід веде в програшну клітинку, буде виграшною.

Будемо розмірковувати з «кінця». Клітинка 100 – програшна, тому клітинка 99 – виграшна, 98 – програшна, 97 – виграшна і т. д. через одну до 91-ї. Всі клітинки від 81 до 90-ї – виграшні. Аналогічно, всі клітинки від 71 до 80 чергуються, подібно до клітинок від 91 до 100-ї , а всі клітинки з номерами 61 – 70 – виграшні і т. д. В результаті отримаємо, що клітинка з номером 1 – виграшна.

Задача 42. Є дві купи по дев'ять каменів. Двоє гравців по черзі беруть або один, або два камені з однієї купки, або по одному каменю з кожної купки. Виграє той, хто бере останній камінь.

Розв'язання. Виграє другий. Розглянемо таблицю 10х10, де по горизонталі відмічається число каменів в одній купці, а по вертикалі – число каменів в другій купці. Аналізуючи з кінця, відмітимо програшні позиції для першого гравця.

-		-		-		-			
	-		-		-		-		
-		-		-		-		-	
	-		-		-		-		-
-		-		-		-		-	
	-		-		-		-		-
-		-		-		-		-	
	-		-		-		-		-
		-		-		-		-	
-			-		-		-		-

Задача 43. Є смужка паперу в клітинку довжиною 30 клітинок. На самій правій клітинці стоїть фішка. Двоє гравців по черзі пересувають

фішку: а) на одну чи на три клітинки вліво, б) на дві чи на чотири клітинки вліво. Програє той, хто не може зробити хід.

Розв'язання. Провівши аналіз з кінця, прийдемо до висновку, що в обох випадках перший гравець програє.

М і н і м а к с

Розглянемо ігри, в яких виграш кожного гравця – змінна величина, що приймає різні числові значення в залежності від ходу гравця, і гравці прагнуть зробити свій виграш якомога більшим , причому сума їх виграшів є сталою величиною, незалежною від гравців. Таким чином, чим більше виграє один гравець, тим менше виграє другий. І інтереси гравців тут різко протилежні. Наприклад, в змаганні з шахів за кожну партію дається лише одне очко: якщо виграв перший, а другий програв, то очко цілком дістається переможцеві, а у випадку нічиєї це очко ділиться навпіл.

Задача 44. Два коти украли ланцюжок із шести сосисок і тепер ділять його між собою. По черзі кожен кіт перекушує перемичку між сосисками і з'їдає отримані одиничні сосиски. Скільки кому дістанеться?

Розв'язання. Відмітимо, що між шістьма сосисками п'ять перемичок. Тому коти будуть перегризати їх п'ять разів: - три рази перший кіт і два – другий. При кожному перегризанні другий може здобути собі по дві сосиски, тому дві сосиски він може отримати незалежно від поведінки першого кота.

Покажемо, що перший кут може здобути собі чотири сосиски. Першим ходом він перегризає ланцюжок посередині; отримується два ланцюжки по три сосиски. Другий може собі відділити тільки одну сосиску, перший після цього з'їдає дві, що залишились, перекусивши перемичку між ними. Потім другий кіт знову відокремлює собі одну сосиску. Перший кіт знову з'їдає решту – дві сосиски. Отже, перший з'їдає 4, а другий - 2 сосиски.

Задача 45. Лисиця Аліса і кіт Базиліо ділять 10 золотих монет за наступним правилом. Спочатку Базиліо ділить всі золоті на дві купки, в кожній з яких не менше двох золотих. Потім Аліса ділить кожну з цих купок ще на дві купки. З отриманих чотирьох купок найбільша і найменша дістаються Алісі, а дві середні – Базиліо. Кому скільки дістанеться?

Розв'язання. Нехай Базиліо розділить монети на дві купки, що складаються з a і b монет, причому $a \leq b$. Аліса може розділити першу купку приблизно порівну, а другу купку – на купки, що містять 1 і b-1 монету. Таким чином,лисиця забезпечить собі b золотих. Оскільки $a \leq b$ і $a + b$ =10, то $b \geq 5$. Тому Алісі дістанеться не менше 5 монет.

Припустимо, що Базиліо розділив монети на дві рівні купки. Тоді, як би не ділила монети Аліса, їй дістанеться 5 золотих. Отже. кожному дістанеться по 5 монет.

Задача 46. Торт має форму паралелограма. Малюк і Карлсон ділять торт наступним чином. Малюк вказує на поверхні торта точку, а Карлсон по прямій, що проходить через цю точку розрізає торт на два куски і один з кусків забирає собі. Кожен хоче отримати більше. Де Малюк повинен поставити точку?

Розв'язання. Очевидно, що малюк не може отримати більше половини торта. Покажемо, що вибираючи точку перетину діагоналей, Малюк може отримати половину торта. Для доведення цього скористаємось властивостями паралелограма, а також формулою для обчислення площі паралелограма.