

A 94 PHYS. II - M

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1994

PHYSIQUE

DEUXIÈME ÉPREUVE

OPTION M

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
PHYSIQUE II - M.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option M , comporte 7 pages.*

QUELQUES PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DES CAVITÉS OPTIQUES

Ce problème comporte trois parties pouvant être abordées indépendamment les unes des autres. Il concerne quelques propriétés caractéristiques des cavités optiques. Dans une première partie, on étudie la structure d'une cavité parallélépipédique fermée. Dans la deuxième partie, on étudie dans le cadre de l'optique géométrique une cavité ouverte, limitée par deux miroirs sphériques ; cette configuration pallie certaines limitations des propriétés parallélépipédiques. Les effets diffractifs dans de telles cavités sont pris en compte dans la troisième partie.

Dans tout le problème, l'espace est rapporté à un repère R muni d'une base orthonormée directe ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$). Un champ électromagnétique, monochromatique de pulsation ω , sera représenté par l'ensemble des vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, de composantes respectives E_i et B_i ($i = 1, 2$ ou 3) avec, par exemple, $\mathbf{E} = E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2 + E_3 \mathbf{e}_3$. Les cavités sont supposées être vides de charge.

PREMIÈRE PARTIE : CAVITÉ PARALLÉLÉPIPÉDIQUE FERMÉE

On considère une cavité parallélépipédique limitée par des plans infiniment conducteurs ; les longueurs des arêtes sont a_1 , a_2 et a_3 dans les directions orthogonales respectives Ox_1 , Ox_2 et Ox_3 .

I-1) Donner l'équation de propagation du champ électromagnétique monochromatique de pulsation ω et préciser les conditions aux limites relatives aux champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.

I-2) La résolution de l'équation de propagation, compte tenu des conditions aux limites, conduit à considérer trois -et trois seulement- familles de solutions, dépendant de trois nombres entiers naturels n_1 , n_2 et n_3 . On pose $k_i = \frac{n_i \pi}{a_i}$. Vérifier que le champ représenté par les trois relations ci-après constitue une solution du problème de propagation :

Établir aussi la relation :

où c est la célérité de la lumière.

I-3) Exprimer la relation qui, en l'absence de charge dans la cavité, lie $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{J}$ et l'interpréter géométriquement, en faisant intervenir au besoin le vecteur $\mathbf{J}$ dont les composantes dans R sont J_1 , J_2 et J_3 . Déduire de l'étude qui précède que la solution la plus générale du problème de propagation

TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

correspondant à une pulsation donnée peut être considérée comme la combinaison linéaire de deux solutions indépendantes, appelées modes, l'une d'entre elles correspondant par exemple à $\omega = 0$.

I-4) On considère, dans cette question seulement, une cavité constituée par deux miroirs plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan ($\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) et situés respectivement en $x_1 = 0$ et $x_1 = a_1$. Décrire les modes dans cette cavité (polarisations, pulsations possibles). Indiquer une analogie mécanique simple de cette configuration.

I-5) La relation où U est l'énergie électromagnétique instantanée au temps t dans la cavité parallélépipédique fermée, définit l'énergie électromagnétique moyenne, dans cette cavité. Exprimer sous la forme d'une intégrale sur le volume V de la cavité, faisant intervenir la représentation complexe du champ : et celle de son complexe conjugué.

I-6) Montrer, à partir des équations de Maxwell, des conditions aux limites et de l'identité vectorielle, que :

où

En déduire que la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique, $\langle u \rangle$, s'écrit

.

I-7) Un calcul, non demandé ici, établit qu'une estimation du nombre de modes dans le domaine de pulsations suffisamment étendu pour que $\omega a/c \gg 1$, est $N \approx \frac{4\pi}{3} \frac{a^3}{\lambda^3}$. Montrer par un calcul d'ordre de grandeur qu'une cavité parallélépipédique fermée du type précédent n'est absolument pas appropriée pour sélectionner un petit nombre de modes (une centaine, par exemple) dans le domaine de pulsations limitant le rayonnement visible.

DEUXIÈME PARTIE : CAVITÉ OUVERTE, À RÉFLECTEURS SPHÉRIQUES

On envisage alors (fig.1) une cavité ouverte, limitée par deux miroirs sphériques (M_1) et (M_2) d'épaisseur négligeable, de centres respectifs C_1 et C_2 , de sommets respectifs S_1 et S_2 et de diamètre d'ouverture commune D .

On pose : et

fig. 1 : Cavité ouverte, limitée par deux miroirs sphériques.

(Pour des raisons de lisibilité de la figure, la dimension des miroirs a été exagérée).

On se propose d'étudier dans cette partie les conditions permettant de confiner dans cette cavité un rayonnement monochromatique de pulsation ω . On suppose à cette fin $\omega a/c \gg 1$ et on néglige les effets de diffraction : le rayonnement sera donc supposé se propager conformément aux lois de l'optique géométrique.

1. Dépliage de la cavité

II-1-1) Montrer que les hypothèses faites impliquent que les conditions de Gauss sont satisfaites.

II-1-2) Montrer que l'étude de la marche d'un rayon lumineux effectuant N aller-retours dans la cavité de la figure 1 est équivalente (fig. 2, page 4) à celle d'un rayon lumineux rencontrant N fois le même motif constitué de deux lentilles minces et distantes de $2a$, dont on précisera les distances focales f_1 et f_2 en fonction de a et de R .

fig. 2 : Dépliement de la cavité

Un aller-retour est équivalent à la traversée d'un motif constitué de deux lentilles minces.

2. Propagation d'un rayon lumineux

On considère le rayon issu de , émergeant à une hauteur algébrique sous un angle algébrique , puis émergeant de sous une hauteur et ainsi de suite.

II-2-1) Établir deux relations purement géométriques entre et d'une part, et d'autre part.

II-2-2) Établir aussi les deux relations de récurrence :

II-2-3) Dédire de l'ensemble de ces résultats la relation de récurrence liant et on pourra trouver commode de poser

3. Cavité confocale

II-3-1) Montrer qu'il est possible de choisir les caractéristiques de et de de telle manière que, pour tout p , l'on ait simultanément et . Représenter ce cas particulier sur une figure, où l'on indiquera notamment les foyers objet et image des lentilles et du motif numéro p . Construire aussi un rayon issu d'un point A sur l'axe tombant sur et émergeant de après avoir traversé et .

II-3-2) Justifier le fait que la cavité satisfaisant les relations de la question II-3-1) soit dite "confocale" et donner la figure 1', déduite de la figure 1 dans ce cas particulier.

II-3-3) En s'appuyant sur une construction géométrique soignée, dont on explicitera clairement l'élaboration, trouver l'image A' d'un point A sur l'axe optique, après un aller-retour de la lumière dans la cavité de la figure 1'.

II-3-4) De la même manière, déterminer l'image (respectivement) d'un petit objet orthogonal à l'axe optique, après un (respectivement deux) aller retour dans la cavité de la figure 2.

4. Condition de stabilité d'une cavité fermée par deux miroirs sphériques

La cavité de la figure 1 sera dite stable si, après un nombre arbitrairement élevé de traversées du motif , le rayon reste proche de l'axe optique. On suppose qu'il en est effectivement ainsi et l'on pose, dans le système de la question II-2-3), .

II-4-1) Déterminer l'équation vérifiée par et en déduire l'inégalité traduisant la stabilité de la cavité.

II-4-2) Commenter le cas particulier d'une cavité confocale, telle qu'elle a été introduite dans la question II-3-2). Quelle est la valeur de dans ce cas particulier ?

TROISIÈME PARTIE : DIFFRACTION DANS UNE CAVITÉ CONFOCALE

On considère maintenant, dans la cavité de la figure 1, les phénomènes de diffraction d'un rayonnement monochromatique de longueur d'onde dans le vide . Les paramètres et sont ajustés de manière à satisfaire la condition de stabilité de la question II-4-2) et l'inégalité est toujours satisfaite.

1. Arguments qualitatifs généraux

III-1-1) Donner des exemples de pertes que peut subir le rayonnement dans la cavité. En particulier, préciser comment la diffraction d'un faisceau incident sur un miroir plan de diamètre d'ouverture peut être à l'origine de pertes d'énergie électromagnétique.

III-1-2) On pose ; justifier par des arguments qualitatifs que le nombre permet d'évaluer les pertes de rayonnement dus aux phénomènes de diffraction. On pourra raisonner ici sur des miroirs plans de diamètre .

2. Description du rayonnement dans la cavité

On se propose d'étudier le rayonnement dans la cavité, en appliquant le principe d'Huygens-Fresnel aux deux miroirs (M1) et (M2). On admettra que le diamètre d'ouverture et la longueur séparant les sommets des miroirs (fig. 3) sont suffisamment grands pour que l'on puisse appliquer la théorie scalaire de la diffraction et on se limitera à une cavité confocale (cf. II-3-2 :).

fig. 3 : Cavité confocale.

Pour des raisons de lisibilité, la dimension des miroirs et la distance qui les sépare ont été exagérés.

Soient :

On note l'amplitude complexe d'une onde monochromatique incidente sur (M1) au point . L'amplitude complexe diffractée par (M1) au point à l'intérieur de la cavité s'écrit alors, en supposant les miroirs parfaitement réfléchissants :

où est une constante sans importance pour le moment. On note de façon analogue l'amplitude d'une onde monochromatique incidente sur le miroir (M2), de sorte que "pour l'indice 2" :

III-2-1) Commenter ces relations, en s'appuyant sur le principe de Huygens. On décrira en particulier la nature et les phases relatives des différentes ondes.

III-2-2) En supposant $\ll z$, montrer que, si , alors : , où .

Il est possible de montrer que, en régime permanent et pour une cavité confocale, les amplitudes sur (M1) et sur (M2) sont liées entre elles par les relations intégrales :

$$\begin{aligned} & , \\ & \text{et} \\ & , \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes et

III-2-3) Vérifier que, si le diamètre d'ouverture est suffisamment grand, une solution possible du système couplé de la question III-2-2) est fournie par les *faisceaux gaussiens* :

où C_1 , C_2 et α sont des constantes, α réel. Montrer que C_1 et C_2 en déduire la relation liant C_1 et C_2 . On donne, pour α et α :

III-2-4) Pour cette dernière question, il faut prendre en compte explicitement l'égalité .

Lorsque les miroirs sont parfaitement réfléchissants, Montrer que cette relation implique que les pulsations des modes permis dans la cavité sont Quelle est alors la relation (dépendant de α) entre C_1 et C_2 ? Conclure en comparant les propriétés de sélectivité de mode entre une cavité parallélépipédique fermée et une cavité confocale ouverte.