

CCP PSI I 2003

Problème A

A.1.a) La loi de Snell Descartes de la réfraction s'écrit $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. Si $n_2 > n_1$, on peut avoir $i_2 =$ pour $i_1 = \theta_{\text{lim}}$ vérifiant la relation . Pour $i_1 > \theta_{\text{lim}}$, il n'y a pas de rayon réfracté.

b) Le phénomène de réflexion totale est utilisé par exemple :

• dans les prisme à réflexion totale utilisés dans les appareils photographiques ;

• dans les fibres optiques à saut d'indice.

c) Avec l'orientation indiquée, les angles α , r et θ sont positifs sur la figure ci-contre. La relation de la réfraction s'écrit $\sin(\alpha) = n \sin(r)$.

A
B
C
 θ
 α
 r
+

Dans le triangle ABC , on a $+(\theta) + (+ r) = \pi$ d'où $r = \theta$. Pour l'angle limite de réflexion, α_{lim} vérifie donc

θ_{lim}
 α_{lim}

A.N. Pour $n = 1,89$, on trouve, $\theta_{\text{lim}} = \text{Arcsin} = 0,557 \text{ rad}$ (soit environ 32°) d'où $\alpha_{\text{lim}} = 0,441 \text{ rad}$ (soit $-25,3^\circ$). La situation correspondante est représentée sur le schéma ci-contre. Si α augmente (en valeur algébrique) on voit que θ augmente donc il n'y a pas de réfraction à la deuxième interface. On aura réflexion totale sur l'interface verre/vidé si $\alpha > \alpha_{\text{lim}}$.

A.2.a) Le milieu est linéaire, homogène, isotrope et non magnétique donc $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. En supposant qu'il n'y a pas de distribution de courant libre et de charge libre, les équations de Maxwell s'écrivent $\text{div } \mathbf{E} = 0$; $\text{div } \mathbf{B} = 0$; et .

Comme et , on peut écrire l'équation de Maxwell-Ampère sous la forme .

b) On a .

Or donc, puisque $\text{div } \mathbf{E} = 0$, il reste . C'est l'équation de propagation du champ électrique dans le milieu. On reconnaît une équation de d'Alembert avec une vitesse de propagation .

c) En l'absence de densité surfacique de charges libres et de courants libres, les conditions aux limites s'écrivent : $E_{t1} = E_{t2}$, $D_{n1} = D_{n2}$, $H_{t1} = H_{t2}$ et $B_{n1} = B_{n2}$. Comme le milieu est linéaire, homogène, isotrope et non magnétique, il reste

$$E_{t1} = E_{t2}; \quad n_1^2 \cdot E_{n1} = n_2^2 \cdot E_{n2}; \quad B_{t1} = B_{t2} \text{ et } B_{n1} = B_{n2}.$$

d) Le plan d'incidence est $O, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_z$; le champ électrique est polarisé perpendiculairement à ce plan, il est donc porté par $\mathbf{u}_y$. Le module du vecteur d'onde est . Il se projette donc en soit, avec les notations de l'énoncé, $\mathbf{k}_i = \beta \mathbf{u}_x + \alpha \mathbf{u}_z$. L'onde peut s'écrire en grandeur réelle $\mathbf{E}_i = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$ dont la représentation complexe est .

e) Si l'on écrit et , on a $\text{div } \mathbf{E}_i = j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{E}_i$, $\text{div } \mathbf{B}_i = j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{B}_i$, $\text{rot } \mathbf{E}_i = j\mathbf{k}_i \wedge \mathbf{E}_i$ et $\text{rot } \mathbf{B}_i = j\mathbf{k}_i \wedge \mathbf{B}_i$. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit donc $j\mathbf{k}_i \wedge \mathbf{E}_i = j\omega \mathbf{B}_i$ d'où .

On en déduit $\mathbf{B}_i = (\beta \mathbf{u}_x + \alpha \mathbf{u}_z) \wedge \mathbf{E}_i$ $\mathbf{u}_y = (-\alpha \mathbf{u}_x + \beta \mathbf{u}_z)E_0$.

f) D'après la loi de Snell-Descartes de la réflexion, le vecteur d'onde $\mathbf{k}_r$ vaut $\mathbf{k}_r = \beta \mathbf{u}_x - \alpha \mathbf{u}_z$.

g) Le champ $\mathbf{B}_r$ vérifie la relation de structure des ondes planes d'où $\mathbf{B}_r = (\beta \mathbf{u}_x - \alpha \mathbf{u}_z) \wedge \mathbf{E}_r \mathbf{u}_y = (\alpha \mathbf{u}_x + \beta \mathbf{u}_z) E_{0r}$.

h) On écrit les conditions aux limites sur l'interface, en $z = 0$. En l'absence d'onde dans le vide, il vient $E_0 + E_{0r} = 0$ (composante tangentielle de $\mathbf{E}$)

et $-E_0 + E_{0r} = 0$ (composante tangentielle de $\mathbf{B}$).

Ces relations sont vérifiées quels que soient x et t si ce qui n'est pas possible si E_0 et E_{0r} sont non nuls. Il faut donc envisager une onde transmise dans le vide pour satisfaire les conditions aux limites.

i) $\checkmark$ Le terme traduit **une atténuation** dans la direction des z croissants.

$\checkmark$ Le terme traduit **une propagation** dans la direction des x croissants.

$\checkmark$ La projection sur $\mathbf{u}_y$ traduit une **polarisation rectiligne** le long de ce vecteur.

Par rapport aux ondes incidentes et réfléchies, les phénomènes nouveaux envisagés sont l'atténuation et la direction de propagation unique le long de l'interface.

On peut écrire l'amplitude complexe $\underline{E}_0' = E_0'$ où l'on a posé $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{u}_x - jk_2 \mathbf{u}_z$ vecteur d'onde complexe de l'onde transmise.

Comme la relation est toujours vérifiée, on en déduit

$$\mathbf{B}' = (k_1 \mathbf{u}_x - jk_2 \mathbf{u}_z) \wedge \mathbf{E}' \mathbf{u}_y = (jk_2 \mathbf{u}_x + k_1 \mathbf{u}_z) \underline{E}_0'.$$

j) Les conditions aux limites s'écrivent, en $z = 0$, et après simplification par ,

Ce système ne peut être vérifié quel que soit x que si les arguments des exponentiels sont égaux. On en déduit $k_1 = \beta$.

L'équation de propagation du champ électrique s'écrit, pour l'onde transmise dans le vide, d'où soit .

Après simplification, le système des conditions aux limites se réduit à ce qui conduit à

k) δ est tel que d'où . Avec les expressions précédentes de k_2 et β , il vient = (possible car $n \sin \theta > 1$ quand il y a réflexion totale). Comme , il reste

Application numérique : = 66,4 nm.

A.3.a) La force dérive de l'énergie potentielle par $\mathbf{F}_{\text{vdw}} = -\mathbf{grad}(E_{\text{vdw}})$. En prenant A comme origine d'une base sphérique, avec $\mathbf{u}$ vecteur unitaire de $\mathbf{AB}$, on obtient $\mathbf{F}_{\text{vdw}} = \mathbf{u}$. C étant positive, la force est dirigée de B vers A : elle est attractive.

b) La force est la résultante du système de forces dû à la répartition des molécules B. Cette répartition est invariante par symétrie par rapport aux plans $\mathbf{Au}_x\mathbf{u}_z$ et $\mathbf{Au}_y\mathbf{u}_z$. Il en est de même de la résultante qui est donc portée par l'intersection de ces deux plans soit par le vecteur $\mathbf{u}_z$.

Tous les atomes B exercent une force attractive sur A donc il en est de même du milieu puisque tous les atomes B sont du même côté de A. La force subie par A est donc dans le sens de $\mathbf{u}_z$.

c) L'anneau de rayon x et de volume $2\pi x dx dz$ contribue à l'énergie pour $d^2U_{\text{vdw}}(x, z) = \mu 2\pi x dx dz$.

Comme $r(x, z)^2 = x^2 + z^2$, il reste .

L'énergie potentielle totale s'obtient en sommant sur tout le milieu diélectrique soit . Avec la relation donnée, on obtient $= -\mu C \pi$ d'où .

Si l'on note maintenant z la distance de A à l'interface milieu/vide (changement de notation mal indiqué par l'énoncé, avec de plus une horreur : $U(x, z)$ alors que x est la variable muette de l'intégrale précédente), on peut écrire en posant .

En prenant A comme origine, la force subie par le milieu de la part de A est $\mathbf{F}' = \mathbf{grad}(U_{\text{vdw}}) = -\mathbf{u}_z = -\mathbf{u}_z$. La force subie par A est donc $\mathbf{F} = \mathbf{u}_z$. Elle est bien attractive comme prévu en A.3.b. La norme de la force d'interaction est donc . Elle décroît rapidement avec la distance à l'interface.

A.4.a) En notant ν_p la fréquence de résonance de l'atome, la relation de Planck s'écrit $h\nu_p = \epsilon_2 - \epsilon_1$.

Si l'atome est excité par une onde de fréquence ν_p , il absorbera l'énergie de cette onde puis la diffusera par émission spontanée dans toutes les directions en particulier vers l'interface (ce qui créera une force de pression de radiation indésirable ici car elle sera répulsive). Cette mission stimulée des atomes pour une fréquence de résonance précise constitue l'effet LASER.

b) L'atome A initialement non polarisé acquiert un moment dipolaire induit en présence du champ $\mathbf{E}'$ donc le coefficient $a(\omega_p - \omega)$ est la polarisabilité de l'atome.

L'énergie potentielle dipolaire instantanée s'écrit $E_{\text{dip}} = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}'$ soit, en valeur moyenne et en utilisant les représentations complexes, $E_{\text{dip}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}'^*$ (il semble que l'énoncé mélange plusieurs idées différentes, comme les étudiants le font couramment ; il rattrapera cette erreur par la phrase sibylline “ on ne considèrera pas la partie propagative ” une ligne plus bas)

Avec la représentation complexe de $\mathbf{E}'$, on peut écrire $E_{\text{dip}} = a(\omega_p - \omega) \underline{\mathbf{E}}' \cdot \underline{\mathbf{E}}'^*$
 $= a(\omega_p - \omega) \underline{\mathbf{E}}_0' \cdot \underline{\mathbf{E}}_0'$ (la partie propagative disparaît car elle est de module unité). Avec l'expression de $\underline{\mathbf{E}}_0'$, on obtient de la forme $E_{\text{dip}} = U_0$ en posant et .

c) On a vu que le potentiel est attractif s'il est négatif. Il faut donc ici $\omega > \omega_p$ pour avoir un phénomène de répulsion.

Le potentiel dipolaire prend la valeur finie U_0 en $z = 0$ alors que le potentiel de Van der Waals tend vers $-\infty$. La somme des deux passe donc par un maximum pour z voisin de 50 nm. On obtient les courbes suivantes (extraites de l'article de “ *Images de la*

Physique 98 ” cité en annexe). Le potentiel total a donc la forme d'une barrière.

A.5.a) En négligeant le potentiel de Van der Waals, l'énergie totale d'un atome de masse m s'écrit $E_{\text{tot}} = mv^2 + E_{\text{dip}}(z)$. Loin de la paroi, le potentiel tend vers zéro donc $E_{\text{tot}} = mv_\infty^2$ et la vitesse v_∞ est maximale. L'atome atteint l'interface avec une vitesse non nulle si $E_{\text{tot}} > E_{\text{dip}}(z = 0)$. Il y a donc au contraire rebond avant d'atteindre la surface du prisme si $mv_\infty^2 > U_0$ soit .

Application numérique : $= \underline{1,18 \text{ m.s}^{-1}}$.

b) Dans le modèle cinétique du gaz monoatomique, on a donc .

Application numérique : $= \underline{295,8 \text{ m.s}^{-1}}$.



On constate que des atomes à températures ambiantes ont une vitesse d'agitation thermique beaucoup trop élevée pour rebondir sur le miroir. Il est nécessaire de les refroidir.

c) Le prix Nobel de physique 1997 a été attribué au français Claude Cohen-Tannoudji conjointement aux américains Steven Chu et William D. Phillips.

d) Il n'y a pas de frottement donc l'énergie mécanique se conserve. En notant d la hauteur de chute, on a $mv^2 = mgd$ où v est la vitesse au niveau de la surface du miroir d'où. Application numérique : $= 0,54 \text{ m.s}^{-1}$. Les atomes arrivent donc avec une vitesse inférieure à la valeur limite calculée plus haut : les atomes vont rebondir sur le miroir.

e) La quantité de mouvement d'un atome au niveau du miroir est $p = mv$. D'après la relation de De Broglie, on a donc $\lambda_{dB} =$ soit numériquement $\lambda_{dB} = 8,6 \text{ nm}$.

A.6.a) Lors de sa chute, l'atome subit son poids $\mathbf{P} = -mg\mathbf{u}_z$ (avec $g > 0$), la force attractive de Van der Waals et la force dipolaire répulsive. Ces trois forces sont dirigées suivant $\mathbf{u}_z$.

Il n'y a pas de composantes de la force résultante le long de $\mathbf{u}_x$ donc la composante de la quantité de mouvement de l'atome dans cette direction se conserve soit $V'_{0x} = V_{0x}$.

Il n'y a pas de dissipation donc l'énergie mécanique se conserve.

b) La conservation de l'énergie mécanique s'écrit. En prenant $z_f = z_i$ on en déduit d'où $|V'_{0z}| = V_{0z}$. L'existence de la composante selon $\mathbf{u}_z$ de la résultante des forces entraîne une variation de quantité de mouvement de l'atome non nulle $\Delta p_z = 0$ donc $V'_{0z} = -V_{0z}$. La trajectoire possède donc un axe d'antisymétrie parallèle à $\mathbf{u}_z$ dont la position dépend de V_{0x} . A.7.a) A l'aide du système de la question A.2.k, on obtient l'amplitude de l'onde réfléchie sur l'interface milieu/vide : . Après réflexion sur le miroir, l'amplitude de l'onde incident sur l'interface est (en tenant compte du déphasage de π sur le miroir) avec un vecteur d'onde $\mathbf{k}_2 = -\beta \mathbf{u}_x + \alpha \mathbf{u}_z$.

L'onde transmise est donc (en notant t le coefficient de transmission calculé en A.2.1) car elle se propage vers les x négatifs. Comme les deux ondes transmises sont polarisées suivant $\mathbf{u}_y$, l'onde évanescence résultante au dessus de la surface du prisme est

L'énergie dipolaire associée est $E_{\text{dip}} = a(\omega_p - \omega) \underline{E}_{\text{rés}} \cdot \underline{E}_{\text{rés}}^*$ avec $a = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}$. Avec les expressions obtenues plus haut, on trouve $E_{\text{dip}} = a(\omega_p - \omega) \frac{1}{2} \sin^2(\theta) E_0^2$. En supposant θ voisin de θ_{lim} , on a $\sin(\theta) \approx \sin(\theta_{\text{lim}})$ donc et il reste $E_{\text{dip}} = a(\omega_p - \omega) \frac{1}{2} \sin^2(\theta_{\text{lim}}) E_0^2$.

Il vient alors $E_{\text{dip}} = a(\omega_p - \omega) \frac{1}{2} \sin^2(\theta_{\text{lim}}) E_0^2$. Comme $\omega_p - \omega \approx \omega_p$, il reste $E_{\text{dip}} = a \omega_p \frac{1}{2} \sin^2(\theta_{\text{lim}}) E_0^2$.

(il fallait passablement compléter les non-dits de l'énoncé ou bien ne pas trop se poser de questions...).

b) Les surfaces isopotentielles sont telles que $\psi = \text{const}$ soit $\psi = \psi_0 \cos(kx)$ ou $\psi = \psi_0 \sin(kx)$. Si $R \ll 1$, on peut écrire soit $\psi = \psi_0 \cos(kx)$ soit $\psi = \psi_0 \sin(kx)$. Les surfaces sont sinusoïdales de période spatiale λ_{dB} et d'amplitude ψ_0 .

c) Les particules possèdent une vitesse v et la longueur d'onde associée est λ_{dB} . On peut donc écrire l'onde progressive associée sous la forme $\psi = \psi_0 \cos(kx - \omega t)$. Le potentiel dipolaire de variation périodique agit comme un réseau en créneau sur l'onde atomique incidente. On aura donc des maxima d'amplitude (c'est-à-dire réflexion des atomes) dans des directions particulières correspondant aux interférences constructives entre les atomes passant au fond des ondulations et ceux passant aux sommets.

d) Pour un angle d'incidence de 60° , on trouve $\lambda_{\text{dB}} = 238,3 \text{ nm} \gg \lambda_{\text{at}}$. La période de variation de la surface est de l'ordre de quelques centaines de longueur d'onde atomique : on a donc un phénomène de diffraction. Les lois de l'optique géométriques ne sont pas simplement vérifiées.

Comme $\lambda_{\text{at}} \approx 0,05 \text{ nm}$, on obtient numériquement $L = 124 \text{ nm}$. On a donc H_0 de l'ordre de λ_{dB} si $\lambda_{\text{at}} \approx 0,05 \text{ nm}$ » 4×10^{-3} . L'intensité de l'onde optique réfléchiée par le miroir est très faible ce qui permet une très grande sensibilité de la méthode.

Pour aller plus loin (merci Google):

un article de "Images de la Physique 98"
 <http://www.spm.cnrs-dir.fr/quoi/publications/imagephys98/12-18.pdf>

la page personnelle de Claude Cohen-Tannoudji (avec les notes de ses cours au Collège de France) <http://www.lkb.ens.fr/~cct/>

une présentation par l'équipe d'A. Aspect : <http://atomoptic.iota.u-psud.fr/>

un article plus complet, publié (en anglais) dans les compte-rendu de l'Académie des Sciences : <http://www.science.uva.nl/research/aplp/eprints/VoiWolCor01.pdf>

Problème B

B.1.a) Dans l'hypothèse des très faibles amplitudes, la période d'un pendule simple est . A.N. = 16,77 s

b) En l'absence de frottement et dissipation, l'énergie totale garde toujours la valeur initiale E_0 . Énergie cinétique et potentielle oscillent en opposition de phase à la pulsation $2\omega_0$. L'énergie cinétique est nulle (et l'énergie potentielle maximale) lorsque l'élongation est maximale en valeur absolue). En supposant $E_0 < E_{\text{révolution}}$ le mouvement est sinusoïdal et les courbes sont alors les suivantes :

E_0
 E_p
 E_c
 t



c) On peut écrire l'élongation $\theta(t) = \theta_M \cos(\omega_0 t)$ donc l'énergie cinétique est $E_c = m.L^2.[\omega_0 \theta_M \sin(\omega_0 t)]^2$ et vaut au maximum

$E_{c\text{MAX}} = m.L^2.[\omega_0 \theta_M]^2$. Or $E_{c\text{MAX}} = E_0$ (lorsque l'énergie potentielle est nulle) donc $\theta_M =$ d'où . A.N. = 0,102 rad soit 5,8°. d) Dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, la masse m est soumise à la tension du fil de module T et à son poids. La projection de la relation fondamentale sur la direction du fil s'écrit : . Or $E_0 = mv^2 + mgL[1 - \cos(\theta)]$ en prenant l'altitude à l'équilibre comme origine de l'énergie potentielle. On en déduit soit . d'où .

e) Dans le référentiel géocentrique qui est galiléen, le plan d'oscillation du pendule reste fixe donc le sol de la Terre tourne par rapport à ce plan avec une période T_0 . La projection verticale du point du pendule de vitesse nulle (correspondant donc à une vitesse nulle) est à la distance $L\theta_M$ du point de projection de la position d'équilibre et possède donc dans le référentiel lié à la Terre une vitesse linéaire $v_L = L\dot{\theta}_M$. Après une durée P_0 , ce point a donc parcouru la distance par rapport au sol. A.N. $d = 8,7 \text{ mm}$.

f) Ce point parcourt sur le sol un cercle de rayon $\rho = L\theta_M$. A.N. $\rho = 7,14 \text{ m}$.

g) Le pendule étant au pôle, le nombre d'oscillations aller-retour pour faire un tour est et la durée nécessaire . $P_0 = T_0$. Le plan de rotation du pendule situé au pôle étant fixe par rapport au référentiel géocentrique, sa durée de par rapport au sol est bien T_0 .

2.a) = 16,78 s.

b) Dans le référentiel géocentrique, la vitesse de l'objet à l'équilibre par rapport au sol est $v_0 = R \cos(\phi)$. A.N. $v_0 = 6400 \times 10^3 \cdot \cos(48^\circ 51') = 308 \text{ m.s}^{-1}$ soit $1,1 \times 10^3 \text{ km.h}^{-1}$.

c) L'angle $\Delta\phi$ étant petit, on a $r = R \cdot \Delta\phi$.

d) Les points extrêmes sont à des distances différentes de l'axe de rotation de la Terre. Ils possèdent donc des vitesses différentes $v_+ = R \cos(\phi + \Delta\phi)$ et $v_- = R \cos(\phi - \Delta\phi)$. Lorsque la latitude varie de $d\phi$, la vitesse varie de $dv = R(-\sin(\phi))d\phi$. En supposant les variations de vitesse petites, on a en valeur absolue, .

e) Dans l'expression précédente, on reconnaît $r = R \cdot \Delta\phi$ donc $\Delta v = r \cdot \sin(\phi)$. C'est la vitesse linéaire, *par rapport au sol*, de la projection des points de vitesse nulle sur le méridien du point d'équilibre. En faisant l'approximation que cette vitesse est la même pour toutes les positions de cette projection, la période nécessaire pour faire un tour est $T =$ soit .

f) Dans le référentiel géocentrique, le plan d'oscillation du pendule est fixe. Or le point de la Terre coïncidant avec la projection du point de vitesse nulle située au nord du point d'équilibre a une vitesse plus petite, dans ce géocentrique, que le point situé au sud. Pendant une durée τ , la distance parcourue au Nord est donc plus petite qu'au Sud. Par conséquent, dans le référentiel lié au sol, le plan d'oscillation tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

g) Dans un point de latitude Sud, la vitesse angulaire de rotation des points de vitesse nulle change de signe comme $\sin(\phi)$ donc le plan d'oscillation du pendule tourne par rapport au sol dans le sens anti-horaire.

h) A l'équateur, $\sin(\phi) = 0$ donc le plan d'oscillation ne tourne pas. (Les points de vitesse nulle situés de part et d'autre de l'équateur ont la même vitesse dans le référentiel géocentrique).