

1990

1.- Discutir el siguiente sistema según los valores de λ ,
 $\{x + \lambda y + z = \lambda + 2x + y + \lambda z = 3x + y + z = 3\lambda$ y resolverlo cuando sea compatible indeterminado. Interpretar este caso geoméricamente.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (1 \lambda 1 \ 1 1 1 \lambda 1 1 1)$ y $A^* = (1 \lambda 1 \lambda + 2 \ 1 1 \lambda 3 \ 1 1 1 3\lambda)$

$$\det A = 1 + \lambda^2 + 1 - 1 - \lambda - \lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

- Si $\lambda \neq 1$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $\lambda = 1$, $\det A = 0$ y $A = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ $f_2 = f_1$ $f_3 = f_1 \ (1 \ 1 \ 1)$. Luego, $\text{rg } A = 1$.

$A^* = (1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3)$ $f_2 = f_1$ $f_3 = f_1 \ (1 \ 1 \ 1 \ 3)$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 1 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Las ecuaciones del sistema representan a tres planos coincidentes.

Hallemos las soluciones: La matriz del sistema es equivalente a $(1 \ 1 \ 1 \ 3)$ que corresponde a la ecuación $x + y + z = 3$.

Llamando $y = k$, $z = k'$, $x = 3 - y - z = 3 - k - k'$, las infinitas soluciones son $\{x = 3 - k - k' \ y = k \ z = k' \ , k, k' \in \mathbb{R}$

2.- Discutir el siguiente sistema $\{3x - \lambda y + 2z = \lambda - 1 \ 2x - 5y + 3z = 1 \ x + 3y - (\lambda - 1)z = 0$ según los valores de λ y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (3 \ -\lambda \ 2 \ 2 \ -5 \ 3 \ 1 \ 3 \ 1 \ -\lambda)$ y

$$A^* = (3 \ -\lambda \ 2 \ \lambda - 1 \ 2 \ -5 \ 3 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ -\lambda \ 0)$$

$$\det A = 15\lambda - 15 - 3\lambda + 12 + 10 - 27 + 2\lambda - 2\lambda^2 = -2\lambda^2 + 14\lambda - 20 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{7 \pm 3}{2}, \lambda = 2, \lambda = 5$$

- Si $\lambda \neq 2$; $\lambda \neq 5$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $\lambda = 2$, $\det A = 0$ y $A = (3 \ -2 \ 2 \ 2 \ -5 \ 3 \ 1 \ 3 \ -1)$. Como $|3 \ -2 \ 2 \ -5| = -11 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = (3 \ -2 \ 2 \ 1 \ 2 \ -5 \ 3 \ 1 \ 1 \ 3 \ -1 \ 0) \ f_1 - 3f_3 \ f_2 - 2f_3 \ (0 \ -11 \ 5 \ 1 \ 0 \ -11 \ 5 \ 1 \ 1 \ 3 \ -1 \ 0) \ f_2 = f_1 \ (0$$

Como $|0 \ - \ 11 \ 1 \ 3| = 11 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Hallemos las soluciones: La matriz del sistema es equivalente a $(0 \ - \ 11 \ 5 \ 1 \ 1 \ 3 \ - \ 1 \ 0)$ que corresponde al sistema $\{-11y + 5z = 1 \ x + 3y - z = 0, y = \frac{5z-1}{11},$

$$x = z - 3y = z - 3 \frac{5z-1}{11} = \frac{3-4z}{11}$$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = \frac{3-4k}{11} \ y = \frac{5k-1}{11} \ z = k, \text{ con } k \in \mathbb{R}$

Si $\lambda = 5$, la matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 & -5 & 3 & 1 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -14 & 14 & 4 & 0 & -11 & 11 & 1 & 1 & 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 - 3f_3 \\ f_2 - 2f_3 \end{matrix} \quad (0 \ - \ 14 \ 14 \ 4 \ 0 \ - \ 11 \ 11 \ 1 \ 1 \ 3 \ - \ 4 \ 0) \begin{matrix} 11f_1 - 14f_2 \end{matrix}$$

La 1ª fila corresponde a la ecuación $0 = 30$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

1989

1.- Discutir el sistema siguiente para los distintos valores reales de p y q ,

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ 3x + z = 3 \\ x - 2y + 5z = p \\ 4x + y - z = q \end{cases}$$

Resuélvelo en los casos que sea compatible.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (1 \ 1 \ - \ 2 \ 3 \ 0 \ 1 \ 1 \ - \ 2 \ 5 \ 4 \ 1 \ - \ 1)$ y

$$A^* = (1 \ 1 \ - \ 2 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1 \ 3 \ 1 \ - \ 2 \ 5 \ p \ 4 \ 1 \ - \ 1 \ q)$$

$A \rightarrow \begin{matrix} f_2 - 3f_1 \\ f_3 - f_1 \\ f_4 - 4f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -3 & 7 & 0 & -3 & 7 & 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_3 = f_2 \\ f_4 = f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -3 & 7 & 0 & -3 & 7 & 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$
 Como $|1 \ 1 \ 0 \ - \ 3| = -3 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 5 & p & 4 & 1 & -1 & q \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 - 3f_1 \\ f_3 - f_1 \\ f_4 - 4f_1 \end{matrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 0 & -3 & 7 & 0 & -3 & 7 & 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \det \begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 & 0 & 0 & p & + & 1 & 0 & 0 & q & - & 5 \end{pmatrix} = -3 \det \begin{pmatrix} 0 & p & + & 1 & 0 & q & - & 5 \end{pmatrix} = -3 \cdot 0 = 0.$$

Luego, $\text{rg } A^* < 4$

En A^* tomemos los menores $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & -2 & p \end{pmatrix} = 3 - 12 + 6 - 3p = -3 - 3p = 0 \Leftrightarrow p = -1$
 $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 4 & 1 & q \end{pmatrix} = 12 + 6 - 3 - 3q = 15 - 3q = 0 \Leftrightarrow q = 5$

Si $p \neq -1$ ó $q \neq 5$, $\text{rg } A^* = 3 \neq \text{rg } A = 2$. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución.

Si $p = -1$ y $q = 5$, la matriz del sistema es

$$A^* = (1 \ 1 \ - \ 2 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1 \ 3 \ 1 \ - \ 2 \ 5 \ - \ 1 \ 4 \ 1 \ - \ 1 \ 5) \begin{matrix} f_2 - 3f_1 \\ f_3 - f_1 \\ f_4 - 4f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 0 & -3 & 7 & 0 & -3 & 7 & 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Como $|1 \ 1 \ 0 \ 3| = 3 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Hallemos las soluciones: La matriz del sistema es equivalente a $(1 \ 1 \ - \ 2 \ 2 \ 0 \ 3 \ - \ 7 \ 3)$ que corresponde al sistema $\{x + y - 2z = 2 \ 3y - 7z = 3, y = \frac{3+7z}{3},$

$$x = 2 - y + 2z = 2 - \frac{3+7z}{3} + 2z = \frac{3-z}{3}$$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = \frac{3-k}{3} \ y = \frac{3+7k}{3} \ z = k \}$, con $k \in \mathbb{R}$

1988

1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar la matriz B tal que $AB - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿Existe A^{-1} ?

Resolución

Como A es de orden 2×3 y $AB = I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$ es de orden 2×2 , entonces B debe ser de orden 3×2

Si $B = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (2a + c \ 2b + d \ a + c + 2e \ b + d + 2f) = (2 \ 0 \ 0 \ 2)$$

Igualando los elementos queda

$$\{2a + c = 2 \rightarrow c = 2 - 2a \ 2b + d = 0 \rightarrow d = -2b \ a + c + 2e = 0 \ b + d + 2f = 2 \Rightarrow \{a + 2 - 2a + 2e = 0 \ b -$$

Despejando, $a = 2 + 2e$; $b = 2f - 2$. Si llamamos $e = k$, $f = k'$, queda $a = 2 + 2k$; $b = 2k' - 2$

$$c = 2 - 2a = 2 - 2(2 + 2e) = -2 - 4e = -2 - 4k \ ; \ d = -2b = -2(2k' - 2) = 4 - 4k'$$

Sustituyendo en la matriz quedaría $B = \begin{pmatrix} 2 + 2k & 2k' - 2 & -2 - 4k & 4 - 4k' & k & k' \end{pmatrix}$, con $k, k' \in \mathbb{R}$.

Como ves hay infinitas soluciones. Una de ellas se obtiene para $k = k' = 0$ y es $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En cuanto que exista A^{-1} , no tiene sentido porque A no es cuadrada

2.- Hallar tres ecuaciones lineales homogéneas con cuatro incógnitas, que tengan como solución $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$ y $(1, 2, 1, 0)$, pero no tenga como solución $(0, 0, 3, 3)$.

Resolución

Por ejemplo, las ecuaciones $\{x - y + z + t = 0 \ x - y + z + 2t = 0 \ x - y + z + 3t = 0$

3.- Dado el sistema de ecuaciones $\{kx + y + z = 3 \ kx - y + z = 1 \ kx + y - z = k - 1$, determinar los valores de k para los que existe solución, y para tales valores hállese la solución.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k & -1 & 1 & k & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 3 & k & -1 & 1 & 1 & k & 1 & -1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = k + k + k + k - k + k = 4k = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

- Si $k \neq 0$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^{\circ}$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Vamos a usar la regla de Cramer para resolverlo:

$$A_x = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & k & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} k & 3 & 1 & k & 1 & 1 & k & k & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_z = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 & k & -1 & 1 & k & 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A_x = 3 + 1 + k - 1 + k - 1 - 3 + 1 = 2k$$

$$\det A_y = -k + 3k + k^2 - k - k - k^2 + k + 3k = 4k \ ; \ \det A_z = k - k^2 + k + 3k + 3k - k + k - k^2 = 8k - 2k^2$$

$$x = \frac{A_x}{\det A} = \frac{2k}{4k} = \frac{1}{2} \ ; \ y = \frac{A_y}{\det A} = \frac{4k}{4k} = 1 \ ; \ z = \frac{A_z}{\det A} = \frac{8k - 2k^2}{4k} = \frac{4 - k}{2}$$

- Si $k = 0$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Como $|1 \ 1 \ -1 \ 1| = 2 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = (0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 0 \ - \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ - \ 1 \ - \ 1) \quad f_3 = -f_2 \quad (0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 0 \ - \ 1 \ 1 \ 1) \quad f_2 = f_1 \quad f_2 + f_2 \quad (0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 0 \ 0 \ 2 \ 4) \quad f_2$$

Como $|1 \ 1 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Hallemos las soluciones: La matriz del sistema es equivalente a $(0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2)$ que corresponde al sistema $\{y + z = 3z = 2, y = 3 - z = 3 - 2 = 1\}$. Llamando $x = k$, las infinitas soluciones son $\{x = k, y = 1, z = 2\}$, con $k \in \mathbb{R}$

1987

1.- Demostrar que, si A es una matriz cuadrada de orden 2×2 , e I es la matriz unidad de orden 2×2 , siempre que se verifique $A^2 + A + I = O$, A es inversible. ¿Cuál sería la inversa de A ?

Resolución

Trasponiendo se tiene $-A^2 - AI = I$.

Sacando factor común A , por la izquierda, $A(-A - I) = I$

Sacando factor común A , por la derecha, $(-A - I)A = I$

Por tanto, según la definición de inversa, A tiene inversa y su inversa es $A^{-1} = -A - I$

1986

1.- Dígase si cada una de las siguientes matrices tiene inversa, y en los casos afirmativos, hállese la correspondiente inversa: $A = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \ 1)$; $B = (2 \ 3 \ - \ 4 \ - \ 6)$; $C = (1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 3 \ 7)$; $D = (1 \ - \ 2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$
Calcular el producto DC .

Resolución

$\det A = 1 - 4 = -3 \neq 0$. Luego, existe A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{-3} (-3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ - \ 2 \ 0 \ - \ 2 \ 1)^t = \frac{-1}{3} (-3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ - \ 2 \ 0 \ - \ 2 \ 1) = \left(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{-1}{3} \ \frac{2}{3} \ 0 \ \frac{2}{3} \ \frac{-1}{3}\right)$$

$\det B = -12 + 12 = 0$. Luego, NO existe B^{-1}

Como C y D no son cuadradas no tiene sentido hablar de inversa de C ni de D

$$DC = (1 \ - \ 2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)(1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 3 \ 7) = (1 \ 0 \ 0 \ 1) = I$$

2.- Dado el sistema de ecuaciones $\{2x + y - z = 0, x + my + z = 1, 3x + y - mz = 1\}$, estudiar su compatibilidad para los distintos valores de m . En particular, resolver el sistema para $m = 0$, si dicho sistema es compatible.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (2 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ m \ 1 \ 3 \ 1 \ - \ m)$ y

$$A^* = (2 \ 1 \ - \ 1 \ 0 \ 1 \ m \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ - \ m \ 1)$$

$$\det A = -2m^2 + 3 - 1 + 3m - 2 + m = -2m^2 + 4m = -2m(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ó } m = 2$$

- Si $m \neq 2$; $m \neq 0$, $\det A \neq 0$ y $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg} A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Si $m = 2$, la matriz del sistema es

$$A^* = (2 \ 1 \ - \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ - \ 2 \ 1) \ 2f_2 - f_1 \quad 3f_2 - f_3 \ (0 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 5 \ 5 \ 2) \quad 5f_1 - 3f_3 \ (0 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = 4$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

- Si $m = 0$, $\det A = 0$ y $A = (2 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 3 \ 1 \ 0)$. Como $|2 \ 1 \ 1 \ 0| = -1 \neq 0$, $\operatorname{rg} A = 2$.

$$A^* = (2 \ 1 \ - \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 0 \ 1) \ 2f_2 - f_1 \quad 3f_2 - f_3 \ (0 \ - \ 1 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ - \ 1 \ 3 \ 2) \quad f_3 = f_1 \ (0 \ - \ 1 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1)$$

Como $|0 \ - \ 1 \ 1 \ 0| = 1 \neq 0$, $\operatorname{rg} A^* = 2$. Luego, $\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Hallemos las soluciones: La matriz del sistema es equivalente a $(0 \ - \ 1 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)$ que corresponde al sistema $\{-y + 3z = 2x + z = 1, y = 3z - 2, x = 1 - z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 1 - k, y = 3k - 2, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

1985

1.- Resolver el sistema $\{x + y + z + t + r = 9, y - z + t - r = 0, z - t + r = 10, t - r = 0$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son

$$A = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ - \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ - \ 1)$$

$$A^* = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 9 \ 0 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ - \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ - \ 1 \ 0)$$

En A, el menor $\det(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ - \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) = 1 \neq 0$ y como A^* contiene a A y sólo tiene 4 filas, entonces

$\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A = 4 < n^\circ$ de incógnitas = 5. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Hallemos las soluciones: $\{x + y + z + t + r = 9, y - z + t - r = 0, z - t + r = 10, t - r = 0$
Despejando, $t = r$; $z = 10 + t - r = 10 + r - r = 10$

$$y = z - t + r = 10 - r + r = 10; \quad x = 9 - y - z - t - r = 9 - 10 - 10 - r - r = -11 - 2r$$

Llamando $r = k$, las infinitas soluciones son $\{x = -11 - 2k, y = 10, z = 10, t = k, r = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

1984

1.- Halla un valor de m para que el sistema de ecuaciones $\{x + 3y = 1, mx - y = 2, my + 2z = 3\}$ sea compatible y determinado.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & m & 1 & 3 & 1 & -m \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & m & 1 & 1 & 3 & 1 & -m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2m^2 + 3 - 1 + 3m - 2 + m = -2m^2 + 4m = -2m(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ó } m = 2$$

- Si $m \neq 2$; $m \neq 0$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Si $m = 2$, la matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2f_2 & -f_1 & 3f_2 & -f_3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 5f_1 & -3f_3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = 4$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

1982

1.- Determina si es posible los coeficientes y el valor del parámetro para que el sistema $\{ax + by + cz = d \quad ka'x + b'y + c'z = d' \quad a''x + b''y + c''z = d''\}$ tenga exactamente 333333 soluciones distintas.

Resolución

Al ser un sistema lineal, o tiene solución única, o no tiene solución o tiene infinitas soluciones. Luego, NO es posible que tenga exactamente 333333 soluciones distintas

2.- Halla un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas que admita como soluciones a $(1, 2, 1)$ y $(3, -1, 2)$.

Resolución

El sistema que se pide es de la forma $\{ax + by + cz = 0 \quad a'x + b'y + c'z = 0 \quad a''x + b''y + c''z = 0\}$

Como $(1, 2, 1)$ es solución, entonces

$$\{a + 2b + c = 0 \rightarrow c = -a - 2b \quad a' + 2b' + c' = 0 \rightarrow c' = -a' - 2b' \quad a'' + 2b'' + c'' = 0 \rightarrow c'' = -a'' - 2b''\}$$

$$\text{Como } (3, -1, 2) \text{ es solución, entonces } \{3a - b + 2c = 0 \quad 3a' - b' + 2c' = 0 \quad 3a'' - b'' + 2c'' = 0 \Rightarrow \\ \{3a - b + 2(-a - 2b) = 0 \quad 3a' - b' + 2(-a' - 2b') = 0 \quad 3a'' - b'' + 2(-a'' - 2b'') = 0\}$$

$$\text{Operando y simplificando, } \{a - 5b = 0 \rightarrow a = 5b \quad a' - 5b' = 0 \rightarrow a' = 5b' \quad a'' - 5b'' = 0 \rightarrow a'' = 5b''\}$$

\Rightarrow

$$\{c = -a - 2b = -5b - 2b = -7b \quad c' = -a' - 2b' = -5b' - 2b' = -7b' \quad c'' = -a'' - 2b'' = -5b'' - 2b'' = -7b''\}$$

$$\text{Queda el sistema } \{5bx + by - 7bz = 0 \quad 5b'x + b'y - 7b'z = 0 \quad 5b''x + b''y - 7b''z = 0 \Rightarrow$$

$$\{5x + y - 7z = 0 \quad 5x + y - 7z = 0 \quad 5x + y - 7z = 0\}$$

1981

1.- Si a y b son números reales demostrar que la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ admite matriz inversa y calcúlala.

Resolución

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$; $\det A = a^2 + b^2 \neq 0$. Luego, A tiene inversa para cualesquiera valores de a y b

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^t = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{-b}{a^2 + b^2} \\ \frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$$

2.-

a) Sin desarrollar los determinantes, demostrar la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & 1 & b^2 & b^3 & 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 & ca & b & b^2 & ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Resolución

Partimos de $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 & ca & b & b^2 & ab & c & c^2 \end{vmatrix}$. Multiplicamos la 1ª fila por a, la 2ª por b y la 3ª por c.

De esta forma $\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 & abc & b^2 & b^3 & abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 & abc & b^2 & b^3 & abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$. Y sacando el factor abc de la 1ª columna queda

$$\frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & 1 & b^2 & b^3 & 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & 1 & b^2 & b^3 & 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}, \text{ como se quería demostrar}$$

b) Hallar que condición deben cumplir los números reales a, b y c, para que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 1 & b & b^2 & 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

sea distinto de cero.

Resolución

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 1 & b & b^2 & 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_2 - f_1 & f_3 - f_1 & f_3 - f_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 0 & b - a & b^2 - a^2 & 0 & c - b & c^2 - b^2 \end{vmatrix} = |b - a| (b - a)(a + b) \\ = (b - a)(c - b) |1 a + b & 1 b + c| = (b - a)(c - b)(b + c - a - b) = (b - a)(c - b)(c - a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b \neq c$$

3.- ¿Puede haber alguna matriz 2x2 no nula que multiplicada por sí misma dé como resultado la matriz nula? Si la respuesta es afirmativa dar un ejemplo, y si es negativa razónalo.

Resolución

Sí. Por ejemplo, cualquier matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $x \neq 0$ porque A es no nula y $AA = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

También serviría cualquier matriz de la forma $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix}$, con $y \neq 0$ porque B es no nula y $BB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^n , siendo n un entero positivo. Justificar razonadamente que existe A^{-1} .

Resolución

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \dots; A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Observa que } 2A - A^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \text{ Luego, } 2AI - A^2 = I$$

$$\text{Sacando factor común A, por la izquierda y por la derecha, } A(2I - A) = I; (2I - A)A = I$$

Por tanto, según la definición de inversa, A tiene inversa y su inversa es $A^{-1} = 2I - A$

5.- Demostrar que si los números 143, 221 y 247 son múltiplos de 13, entonces se puede afirmar que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ también es múltiplo de 13.

Resolución

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} |100c_1 + 10c_2 + c_3| \quad \begin{vmatrix} 143 & 4 & 3 & 221 & 2 & 1 & 247 & 4 & 7 \end{vmatrix} = |13 \cdot 11 & 4 & 3 & 13 \cdot 17 & 2 & 1 & 13 \cdot 19 & 4 & 7| = 13 \cdot \dots, \text{ múltiplo de 13.}$$

6.- Discutir y resolver, si es posible, el siguiente sistema, según los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} 9x + ay - z = 4 \\ 4ax - 2y + (a - 1)z = a \\ 5x + (2a - 1)y - 3z = 3(a + 2) \end{cases}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 9a & -1 & 4a & -2 & a & -1 & 5 & 2a & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 9a & -1 & 4 & 4a & -2 & a & -1 & 5 & 2a & -1 & -3 & 3a & +6 \end{pmatrix}; \det A = 54 + 5a^2 - 5a - 8a^2 + 4a -$$

$$10 - 18a^2 + 27a - 9 + 12a^2 = -9a^2 + 26a + 35 = 0; a = \frac{-26 \pm 44}{-18}, a = -1, a = \frac{35}{9}$$

- Si $a \neq -1, a \neq \frac{35}{9}$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Vamos a usar la regla de Cramer para resolverlo:

$$A_x = \begin{pmatrix} 4a & -1 & a & -2 & a & -1 & 3a & +6 & 2a & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 & 4a & a & a & -1 & 5 & 3a & +6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_z = \begin{pmatrix} 9 & a & 4 & 4a & -2 & a & 5 & 2a & -1 & 3a & +6 \end{pmatrix}$$

$$\det A_x = 24 + 3a^3 + 3a^2 - 6a - 2a^2 + a - 6a - 12 + 3a^2 - 8a^2 + 12a - 4 = 3a^3 - 4a^2 + a + 8$$

$$\det A_y = -27a + 20a - 20 - 12a^2 - 24a + 5a + 48a - 27a^2 - 27a + 54 = -39a^2 - 5a + 34$$

$$\det A_z = -54a - 108 + 5a^2 + 32a^2 - 16a + 40 - 18a^2 + 9a - 12a^3 - 24a^2 = -12a^3 - 5a^2 - 61a - 68$$

$$x = \frac{A_x}{\det A} = \frac{3a^3 - 4a^2 + a + 8}{-9a^2 + 26a + 35} = \frac{(a+1)(3a^2 - 7a + 8)}{(a+1)(35-9a)} = \frac{3a^2 - 7a + 8}{35 - 9a}$$

$$y = \frac{A_y}{\det A} = \frac{-39a^2 - 5a + 34}{-9a^2 + 26a + 35} = \frac{(a+1)(34 - 39a)}{(a+1)(35-9a)} = \frac{34 - 39a}{35 - 9a}$$

$$z = \frac{A_z}{\det A} = \frac{-12a^3 - 5a^2 - 61a - 68}{-9a^2 + 26a + 35} = \frac{(a+1)(-12a^2 + 7a - 68)}{(a+1)(35-9a)} = \frac{-12a^2 + 7a - 68}{35 - 9a}$$

- Si $a = -1$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & -4 & -2 & -2 & 5 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. Como

$|9 \ -1 \ -4 \ -2| = -22 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$. La matriz A^* es

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & -4 & -2 & -2 & 5 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ -f_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Como $| -9 \ 1 \ 2 \ 2 \ 0 | = -22 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Hallemos las soluciones: La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & -4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ que corresponde al

$$\text{sistema } \begin{cases} -9x + y + z = -4 \\ 22x = 9 \end{cases}, x = \frac{9}{22}; \quad -9\frac{9}{22} + y + z = -4 \rightarrow$$

$$y = -4 + \frac{81}{22} - z = \frac{-7 - 22z}{22}$$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = \frac{9}{22}, y = \frac{-7 - 22k}{22}, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

Si $a = \frac{35}{9}$, la matriz del sistema, A^* , es

$$\begin{pmatrix} 9 & \frac{35}{9} & -1 & 4 & \frac{35}{9} & -2 & \frac{35}{9} & -1 & \frac{35}{9} & 5 & 2 & \frac{35}{9} & -1 & -3 & 3 & \frac{35}{9} & +6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \frac{35}{9} & -1 & 4 & \frac{140}{9} & -2 & \frac{26}{9} & \frac{35}{9} & 5 & \frac{61}{9} & -3 & \dots \end{pmatrix}$$

. Multiplicamos por 9:

$$(81 \ 35 \ - \ 9 \ 36 \ 140 \ - \ 18 \ 26 \ 35 \ 45 \ 61 \ - \ 27 \ 159) \ 9f_2 + 26f_1 \ f_3 - 3f_1 \ (81 \ 35 \ - \ 9 \ 36 \ 3366 \ 748 \ 0 \ 1251 \ - \ 1$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = 2118$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

1980

1.- Investigar si es compatible el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 3z = 3 \\ 2x + y - z = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (1 \ 0 \ - \ 3 \ 2 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ 2 \ 1)$ y

$$A^* = (1 \ 0 \ - \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \ - \ 1 \ - \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1)$$

$\det A = 1 - 12 + 3 + 2 = -6 \neq 0$. Luego, $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas.

Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

1979

1.- Sin desarrollar, justificar que es nulo el determinante de $(1 \ 1 \ 1 \ a \ b \ c \ b + c \ c + a \ a + b)$

Resolución

$$|1 \ 1 \ 1 \ a \ b \ c \ b + c \ c + a \ a + b| \quad f_3 + f_2 \quad |1 \ 1 \ 1 \ a \ b \ c \ a + b + c \ a + b + c \ a + b + c| = (a + b + c)|1 \ 1 \ 1 \ a \ b \ c \ a + b + c \ a + b + c \ a + b + c|$$

porque la 1ª y 3ª filas son iguales.

2.- Estudiar para que valores de λ es compatible el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = \lambda \end{cases}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (\lambda \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \lambda)$ y $A^* = (\lambda \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \lambda \ \lambda)$

$\det A = \lambda^3 + 1 + 1 - \lambda - \lambda - \lambda = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$. Factoricemos usando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \quad \text{Nos queda } \det A = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0, \lambda = 1 \text{ ó } \lambda = \frac{-1 \pm 3}{2}, \lambda = 1, \lambda = -2$$

- Si $\lambda \neq 1$; $\lambda \neq -2$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $\lambda = 1$, $\det A = 0$ y $A = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ $f_2 = f_1 \ f_3 = f_1 \ (1 \ 1 \ 1)$, $\text{rg } A = 1$. La matriz A^* es $(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ $f_2 = f_1 \ f_3 = f_1 \ (1 \ 1 \ 1)$, $\text{rg } A^* = 1$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 1 < n^\circ$ de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

- Si $\lambda = -2$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & & & & \end{pmatrix}$. Como $|-2 \ 1 \ 1 \ -2| = 3 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} 2f_3 + f_1 \\ f_3 - f_2 \\ 0 \\ 3 - 3 - 3 \\ 0 \\ 3 - 3 - 3 \\ 1 \\ 1 - 2 - 2 \end{matrix} \begin{matrix} f_2 = f_1 \\ \end{matrix}$$

Como $|0 \ 3 \ 1 \ 1| = -3 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = 2 \neq \text{rg } A = 1$.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución.

3.- Calcular $|1 + x \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 + x \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 + x \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 + x|$

Resolución

Le sumamos a la 1ª columna las demás columnas y queda:

$$|x + 4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ x + 4 \ 1 + x \ 1 \ 1 \ x + 4 \ 1 \ 1 + x \ 1 \ x + 4 \ 1 \ 1 \ 1 + x| = (x + 4)|1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 + x \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 + x \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1|$$

4.- ¿Qué condiciones deben cumplir los números reales a y b para que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & a \end{pmatrix}$ coincida con su inversa?

Resolución

Si $A = A^{-1}$, multiplicando por A obtenemos $A^2 = A^{-1}A = I$. Luego, $\begin{pmatrix} a & b & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Operando, $\begin{pmatrix} a & b & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Igualando los elementos, se obtiene $a = 1, b = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

5.- Estudiar, para los distintos valores de λ , la compatibilidad del sistema

$$\begin{cases} \lambda x + 3y - z = 3x + \lambda y + z = 1x - y - z = \lambda \end{cases}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & -1 & 1 & \lambda & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & -1 & -1 & 1 & \lambda & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -\lambda^2 + 3 + 1 + \lambda + \lambda + 3 = -\lambda^2 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 7 = 0; \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}$$

- Si $\lambda \neq 1 \pm \sqrt{7}$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $\lambda = 1 + \sqrt{7}$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{7} & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 + \sqrt{7} & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Como $|1 \ 1 \ 1 \ -1| = -2 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

La matriz A^* es

$$\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{7} & 3 & -1 & -1 & 1 & 1 + \sqrt{7} & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 + f_1 \\ f_1 - f_3 \\ (1 + \sqrt{7} \ 3 \ -1 \ -1 \ 2 + \sqrt{7} \ 4 \end{matrix}$$

Como el menor de A^* , $|1 + \sqrt{7} \ 3 \ -1 \ 2 + \sqrt{7} \ 4 + \sqrt{7} \ 0 \ \sqrt{7} \ 4 \ 0| = -1|2 + \sqrt{7} \ 4 + \sqrt{7} \ \sqrt{7} \ 4| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 3$.

Luego, $\text{rg } A^* = 3 \neq \text{rg } A = 2$. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible.

- Si $\lambda = 1 - \sqrt{7}$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{7} & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 - \sqrt{7} & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Como $|1 \ 1 \ 1 \ -1| = -2 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

La matriz A^* es

$$\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{7} & 3 & -1 & -1 & 1 & 1 - \sqrt{7} & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 + f_1 \\ f_1 - f_3 \\ (1 - \sqrt{7} \ 3 \ -1 \ -1 \ 2 - \sqrt{7} \ 4 \end{matrix}$$

Como el menor de A^* ,

$$|1 - \sqrt{7} \ 3 \ -1 \ 2 - \sqrt{7} \ 4 - \sqrt{7} \ 0 \ -\sqrt{7} \ 4 \ 0| = -1|2 - \sqrt{7} \ 4 - \sqrt{7} \ -\sqrt{7} \ 4| = 1 \neq 0, \text{rg } A^* = 3.$$

SELECTIVIDAD – MATEMÁTICAS CIENCIAS – ÁLGEBRA – ANDALUCÍA – ANTERIORES AL
1991

Profesor: Rafael Núñez Nogales

Luego, $\text{rg } A^* = 3 \neq \text{rg } A = 2$. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema también es incompatible.