

29.03.2022

Тема: Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

Цели и задачи урока:

- повторить понятия синуса, косинуса, тангенса острого угла прямоугольного треугольника;
- уметь вычислять значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° , 45° , 60° ;
- развивать вычислительные навыки;
- уметь обобщать изученный материал, делать вывод.

Ход урока:

I Организационный момент

II Изучение нового материала

Ранее, на уроках геометрии, вы познакомились с различными фигурами, в том числе и с треугольником.

Сегодня мы продолжим изучать треугольники и рассмотрим соотношение между его элементами.

Теорема: В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

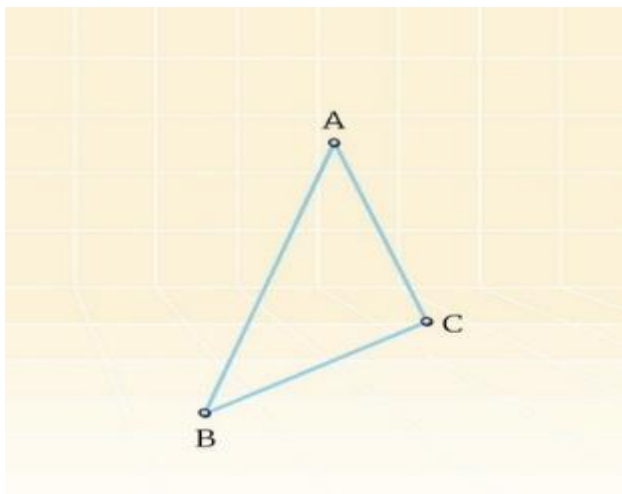
Дано: $\triangle ABC$.

$AB > AC$.

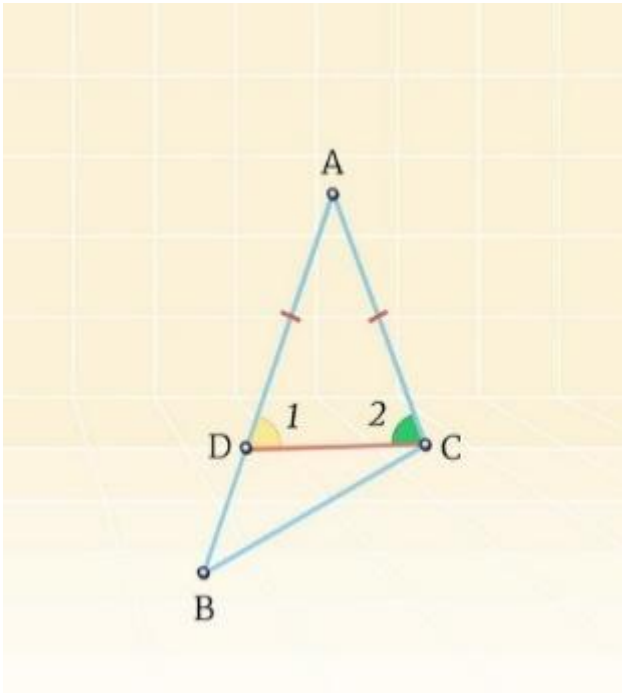
Доказать:

$\angle C > \angle B$

Доказательство:



Отложим на стороне AB отрезок, равный стороне AC .



Так как $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B .

Следовательно, угол 1 является частью угла C и, значит,

$$\angle C > \angle 1.$$

Угол 2 – внешний угол треугольника BDC , поэтому $\angle 2 > \angle B$ (по свойству внешнего угла треугольника).

$\angle 1 = \angle 2$ как углы при основании равнобедренного $\triangle ADC$ (по свойству равнобедренного треугольника).

$$\rightarrow \angle C > \angle 1, \angle 1 = \angle 2, \angle 2 > \angle B \rightarrow \angle C > \angle B.$$

Теорема доказана.

Справедлива и теорема, обратная данной. Против большего угла лежит большая сторона.

Дано: $\triangle ABC$.

$$\angle C > \angle B$$

Доказать:

$$AB > AC.$$

Доказательство:

Предположим, что $AB = AC$ или $AB < AC$. Если $AB = AC \rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный (по определению равнобедренного треугольника) $\rightarrow \angle C = \angle B$ (по свойству равнобедренного треугольника). Что противоречит условию, т. к. $\angle C > \angle B$.

Если $AB < AC \rightarrow \angle C < \angle B$ (по теореме доказанной выше: против большей стороны лежит больший угол) Что противоречит условию, т. к. $\angle C > \angle B$.

Поэтому наше предположение неверное $\rightarrow AB > AC$.

Теорема доказана.

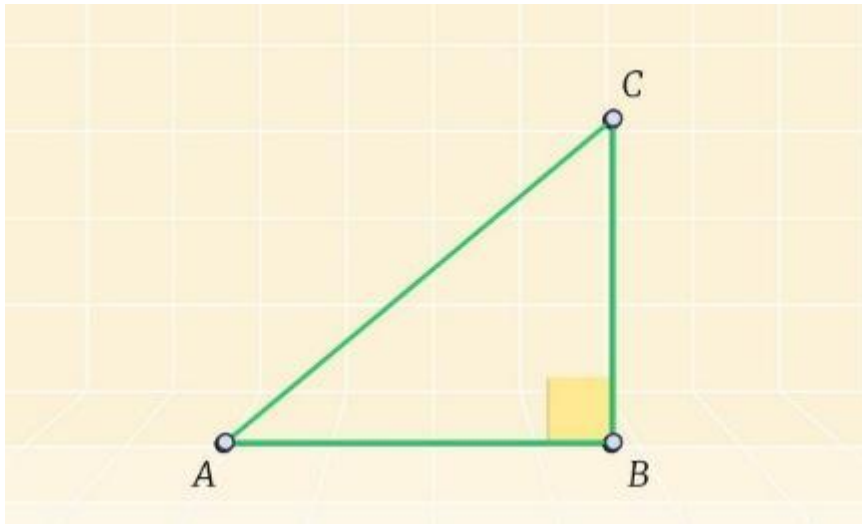
Докажем два следствия из этих теорем.

1 следствие. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный.

$\angle B = 90^\circ$

Доказать: $AC > CB$.



Доказательство: $\angle B > \angle A$, т. к. $\angle B = 90^\circ$ (по условию), $\angle A$ –острый $\rightarrow AC > CB$ (по обратной теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника: против большего угла лежит большая сторона).

Что и требовалось доказать.

Докажем второе следствие из этих теорем.

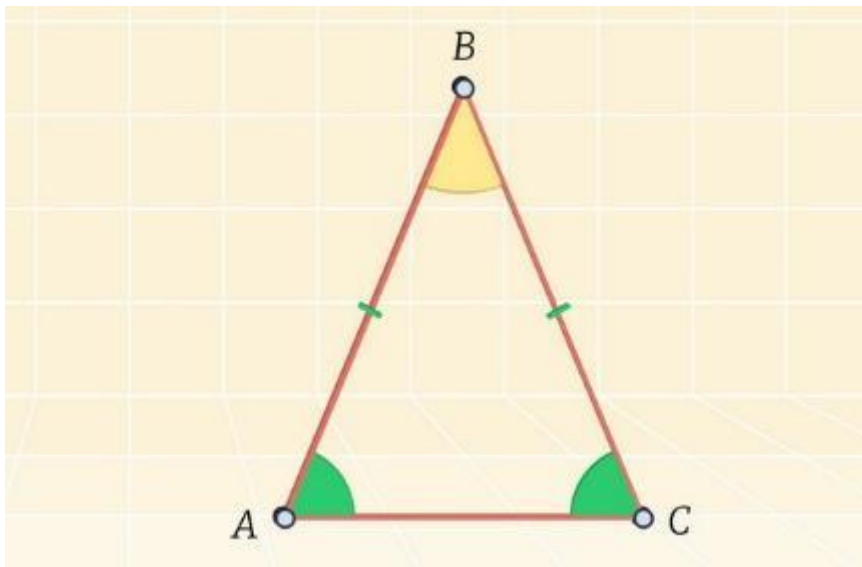
2 следствие:

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный. Это следствие называется признак равнобедренного треугольника.

Дано: $\triangle ABC$

$$\angle A = \angle C$$

Доказать: $\triangle ABC$ – равнобедренный



Доказательство:

Докажем, что $AB = BC$.

Пусть $AB > BC \rightarrow \angle C > \angle A$ (по теореме доказанной выше: против большей стороны лежит больший угол), противоречит условию, т. к. $\angle A = \angle C$. $\rightarrow AB = BC \rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный (по определению равнобедренного треугольника).

Что и требовалось доказать.

Докажем теорему по соотношению между сторонами треугольника.

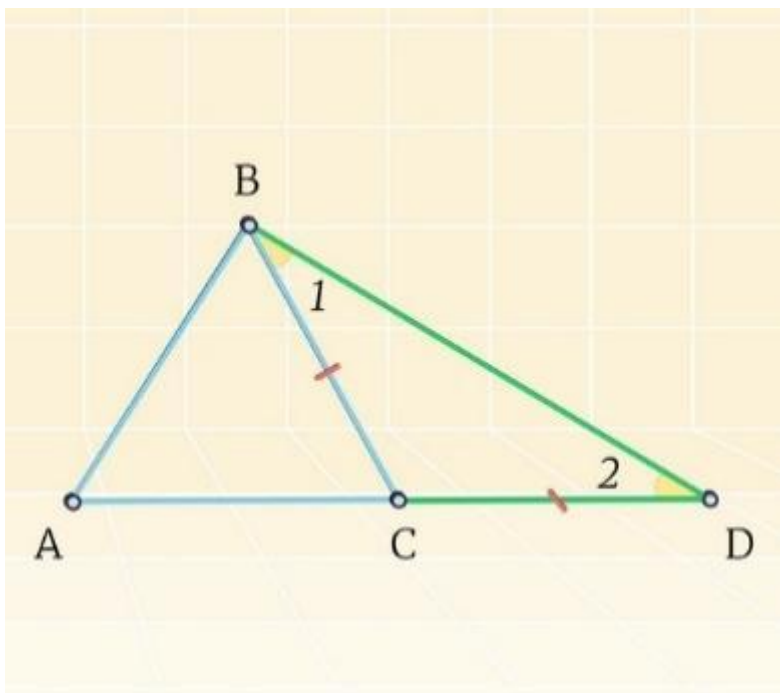
Теорема:

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Дано:

$\triangle ABC$

Доказать: $AB < AC + CB$.



Доказательство:

Продолжим сторону AC и отложим отрезок $CD = BC$.

$\triangle BCD$ – равнобедренный (по определению равнобедренного треугольника)
 $\rightarrow \angle 1 = \angle 2$ (по свойству равнобедренного треугольника).

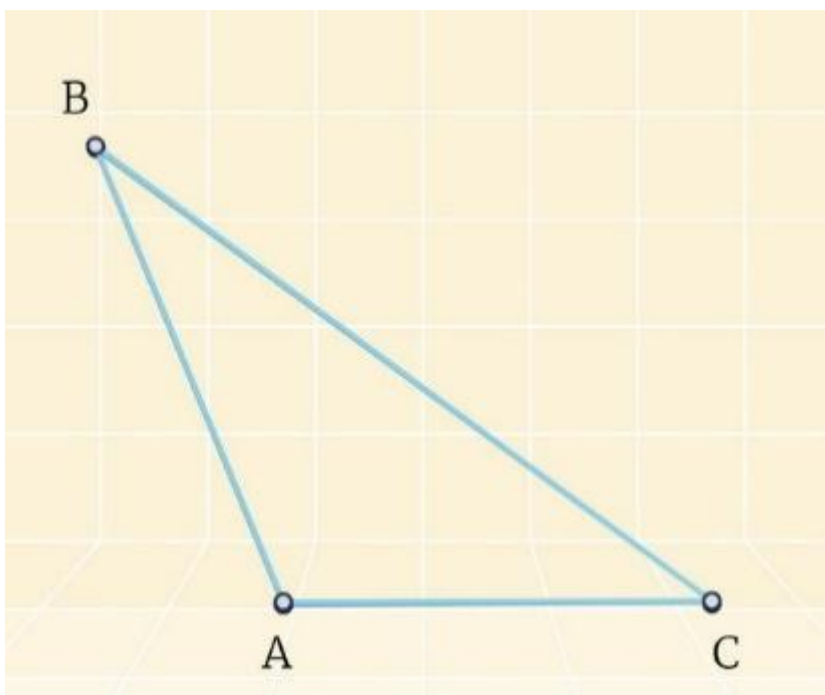
В $\triangle ABD$: $\angle ABD > \angle 1$ (так как угол 1 часть угла ABD), $\rightarrow \angle ABD > \angle 2$ (так как $\angle 1 = \angle 2$).

Так как против большего угла лежит большая сторона (по теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника) $\rightarrow AB < AD$, $AD = AC + CD$, т.к. $CD = BC$, поэтому $AD = AC + CB \rightarrow AB < AC + CB$.

Что и требовалось доказать.

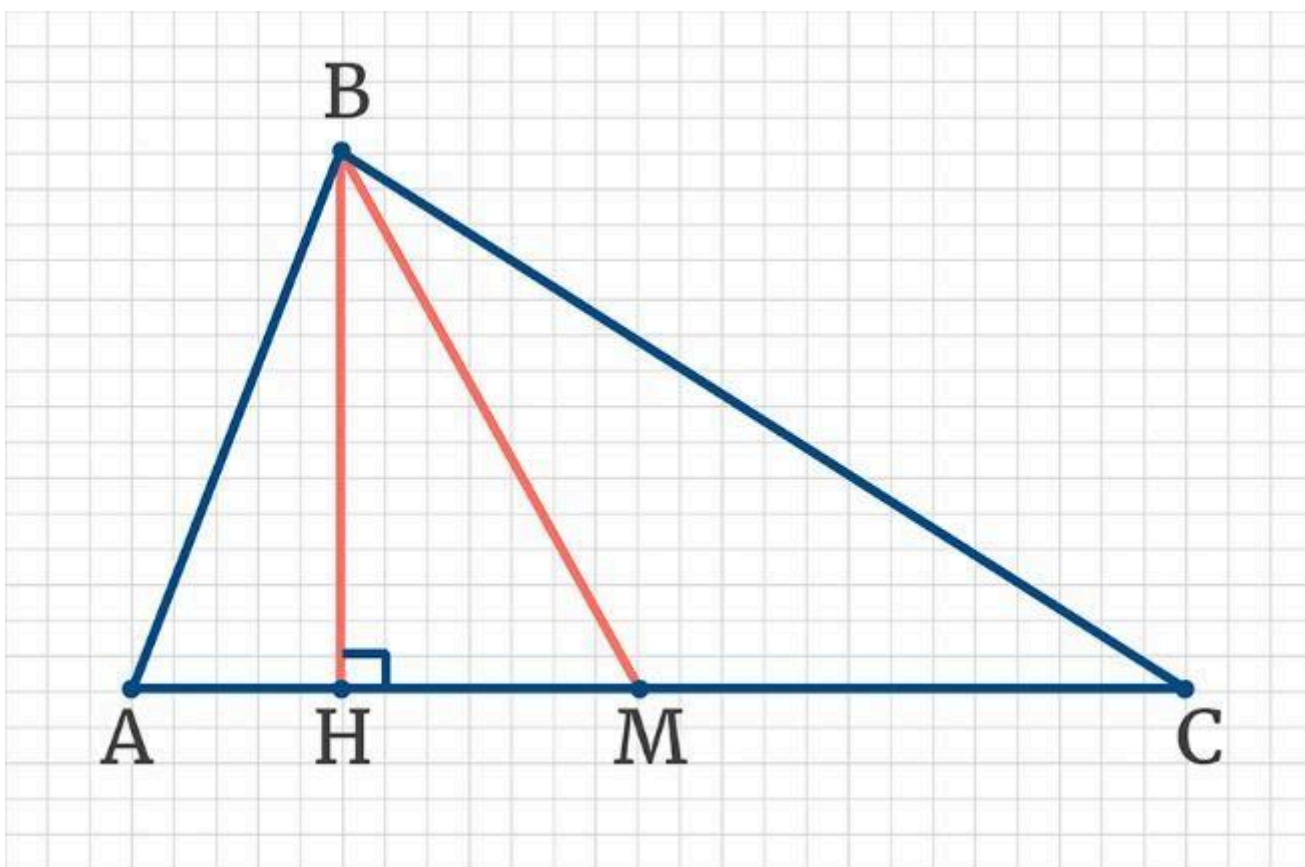
Сформулируем следствие из этой теоремы.

Для любых трёх точек A , B и C , не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства: $AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$.



Решим задачу на доказательство, используя теоремы о соотношениях между углами и сторонами треугольника.

Докажем, что в произвольном треугольнике, если медиана и высота проведены из одной вершины, то эта медиана не меньше высоты, проведённой из той же вершины.



Дано: $\triangle ABC$.

BM – медиана,

BH – высота.

Доказать: $BM \geq BH$.

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда $AB \neq BC$. То BM и BH не совпадают (т. к. по свойству равнобедренного треугольника, высота и медиана совпадают, если проведены к его основанию).

Рассмотрим $\triangle BHM$ – прямоугольный (по определению прямоугольного треугольника), т. к. $\angle H = 90^\circ$, при этом угол в 90° единственный в данном треугольнике (по теореме о сумме углов треугольника) $\rightarrow \angle H$ – самый большой $\rightarrow BM > BH$ (по обратной теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника).

Рассмотрим ещё случай $AB = BC \rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный (по определению равнобедренного треугольника). То $BM = BH$ (по свойству равнобедренного треугольника, высота и медиана совпадают, если проведены к его основанию) $\rightarrow BM \geq BH$.

Что и требовалось доказать.

III Разбор заданий тренировочного модуля.

1 Дано: ABC , равнобедренный, вычислите чему равна третья сторона треугольника, если две других равны 8 см и 4 см?

Объяснение: По определению равнобедренного треугольника, две его боковые стороны равны, следовательно это будет сторона равная 4 см или 8 см.

Сторона 4 см не может быть, т. к. $8 \text{ см} = 4 \text{ см} + 4 \text{ см}$., что противоречит теореме о соотношениях между сторонами треугольника: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Предположим, что боковые стороны равны 8 см. Тогда, по теореме о соотношениях между сторонами треугольника, каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, получим следующее соотношение между сторонами треугольника:

$$4 \text{ см} < 8 \text{ см} + 8 \text{ см}$$

$$8 \text{ см} < 8 \text{ см} + 4 \text{ см}.$$

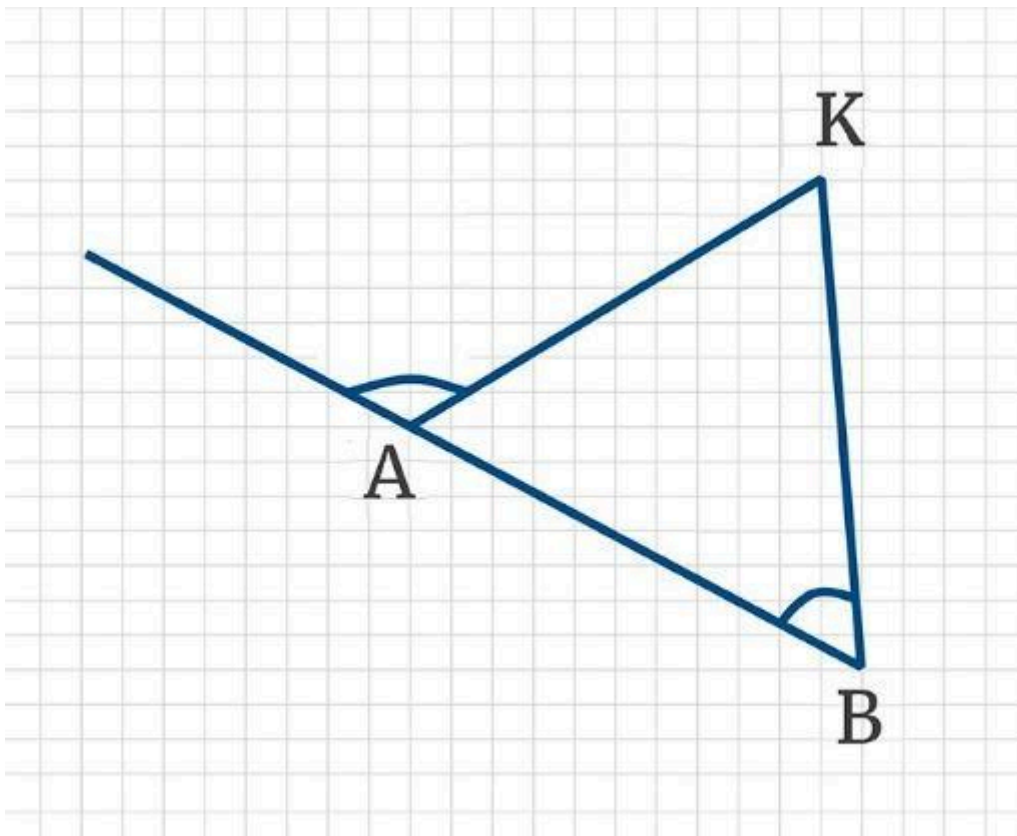
Соотношение верно, следовательно, третья сторона равна 8 см.

Ответ: третья сторона равна 8 см.

2. Дано: $\triangle ABK$ – равнобедренный, BK – основание треугольника, его периметр равен 29 см, разность двух сторон равна 5 см, при этом один из его внешних углов – острый. Найдите длину боковой стороны AB и основания BK .

Объяснение: т. к. по условию, один из внешних углов острый, то один из внутренних углов будет тупым, а это может быть, в равнобедренном треугольнике, только вершина над основанием треугольника (следствие из теоремы о сумме углов треугольника). $\rightarrow$ Основание BK – самая длинная сторона треугольника ABK (по теореме о соотношении между углами и сторонами треугольника). $\rightarrow BK - AB = 5 \text{ см} \rightarrow BK = 5 \text{ см} + AB$.

По определению равнобедренного треугольника, две его боковые стороны равны $\rightarrow AB = AK$. Периметр треугольника – сумма длин трёх его сторон.



$$P_{\triangle ABK} = AB + AK + BK = 29 \text{ см (по условию)}.$$

$$2AB + BK = 29 \text{ см}$$

$$2AB + 5\text{см} + AB = 29\text{ см}$$

$$3AB = 24\text{ см}$$

$$AB = 8\text{ см}, BK = 8 + 5 = 13\text{ см}.$$

Ответ: $BK = 13\text{ см}$; $AB = 8\text{ см}$.

IV. Просмотр видеоурока

<https://www.youtube.com/watch?v=GTwMbfmefGI>

V. Выполнить задания с учебника № 594 с159

Выполненную работу присылайте учителю на электронную почту

ekaterinaefremova160283@gmail.com