



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la
Universidad (EBAU)

Curso 2023 – 2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

Para contestar a algunas preguntas se puede usar la tabla de la distribución normal que se adjunta al final del cuestionario.

El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de una hora y media.

Bloque 1. Álgebra y Programación Lineal.

1.1. Resuelve el sistema lineal $\begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$ [1,75 puntos]

¿Por qué valor habría que sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación para que resultara un sistema sin soluciones? [0,75 puntos]

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$\det A = 3 - 6 + 6 + 4 + 27 + 1 = 35 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ \text{ de incógnitas}$. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única. Resolvámoslo:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{3f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 11 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3:5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 11 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 - 4f_3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

corresponde al sistema $\begin{cases} 4y + 11z = 7 \\ x + y + 3z = 4 \\ 7z = 7 \end{cases} \Rightarrow z = 1 ; 4y = 7 - 11 \cdot 1 = -4, y = -1; x = 4 - y - 3z = 4 + 1 - 3, x = 2$

La solución única es $x = 2, y = -1, z = 1$

Para la 2ª parte, queremos averiguar para qué valor de a es incompatible el sistema

$$\begin{cases} ax - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (a \ -1 \ -2 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ -3 \ 1)$ y
 $A^* = (a \ -1 \ -2 \ 5 \ 1 \ 1 \ 3 \ 4 \ 2 \ -3 \ 1 \ 8)$

$$\det A = a - 6 + 6 + 4 + 9a + 1 = 10a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Si $a \neq -\frac{1}{2}$, $\det A \neq 0$, $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única. entonces debe ser $a = -\frac{1}{2}$. Veamos que es así:

La matriz del sistema es

$$\left(-\frac{1}{2} \ -1 \ -2 \ 5 \ 1 \ 1 \ 3 \ 4 \ 2 \ -3 \ 1 \ 8 \right) \xrightarrow{-2f_1} \left(1 \ 2 \ 4 \ -10 \ 1 \ 1 \ 3 \ 4 \ 2 \ -3 \ 1 \ 8 \right) \xrightarrow{f_1 - f_2} \left(1 \ 2 \ 4 \ -10 \ 1 \ 1 \ 3 \ 4 \ 2 \ -3 \ 1 \ 8 \right) \xrightarrow{f_3 - 2f_1} \left(1 \ 2 \ 4 \ -10 \ 1 \ 1 \ 3 \ 4 \ 2 \ -3 \ 1 \ 8 \right)$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = -70$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

Respuesta: el valor 3 habría que sustituirlo por $-\frac{1}{2}$

1.2. Halla una matriz A que cumpla la igualdad $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ [2,5 puntos]

Resolución

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$;

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd & ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Igualando elementos: $a^2 + bc = -1$; $bc + d^2 = -1$

$$ab + bd = 0 \Rightarrow b(a + d) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ ó } d = -a \quad ; \quad ac + cd = 0 \Rightarrow c(a + d) = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ ó } d = -a$$

Si $b = 0$ ó si $c = 0$, vemos que las 2 primeras igualdades son imposibles. Luego debe ser $d = -a$

Sustituyendo, $a^2 + bc = -1$; $bc + (-a)^2 = -1 \Rightarrow a^2 + bc = -1$. Hay infinitas soluciones, matrices A que cumplen $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y son de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b & c & -a \end{pmatrix}$, con $a^2 + bc = -1$. Por ejemplo, una

solución es para $a = 0, b = 1, c = -1, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observa que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3. Un pastelero elabora dos clases de pasteles, con masa y chocolate que ya tiene preparados en cuencos. Las llamaremos A y B. Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B.

Cada unidad de la clase A requiere 2 cuencos de masa y 2 de chocolate, y la vende por 5 euros. Las de B contienen 1 cuenco de masa y 2 de chocolate, y su precio es de 4 euros. Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles. Dando por supuesto que venderá todos los pasteles, ¿cuántos tiene que hacer de cada clase para maximizar su beneficio? [2,5 puntos]

Resolución

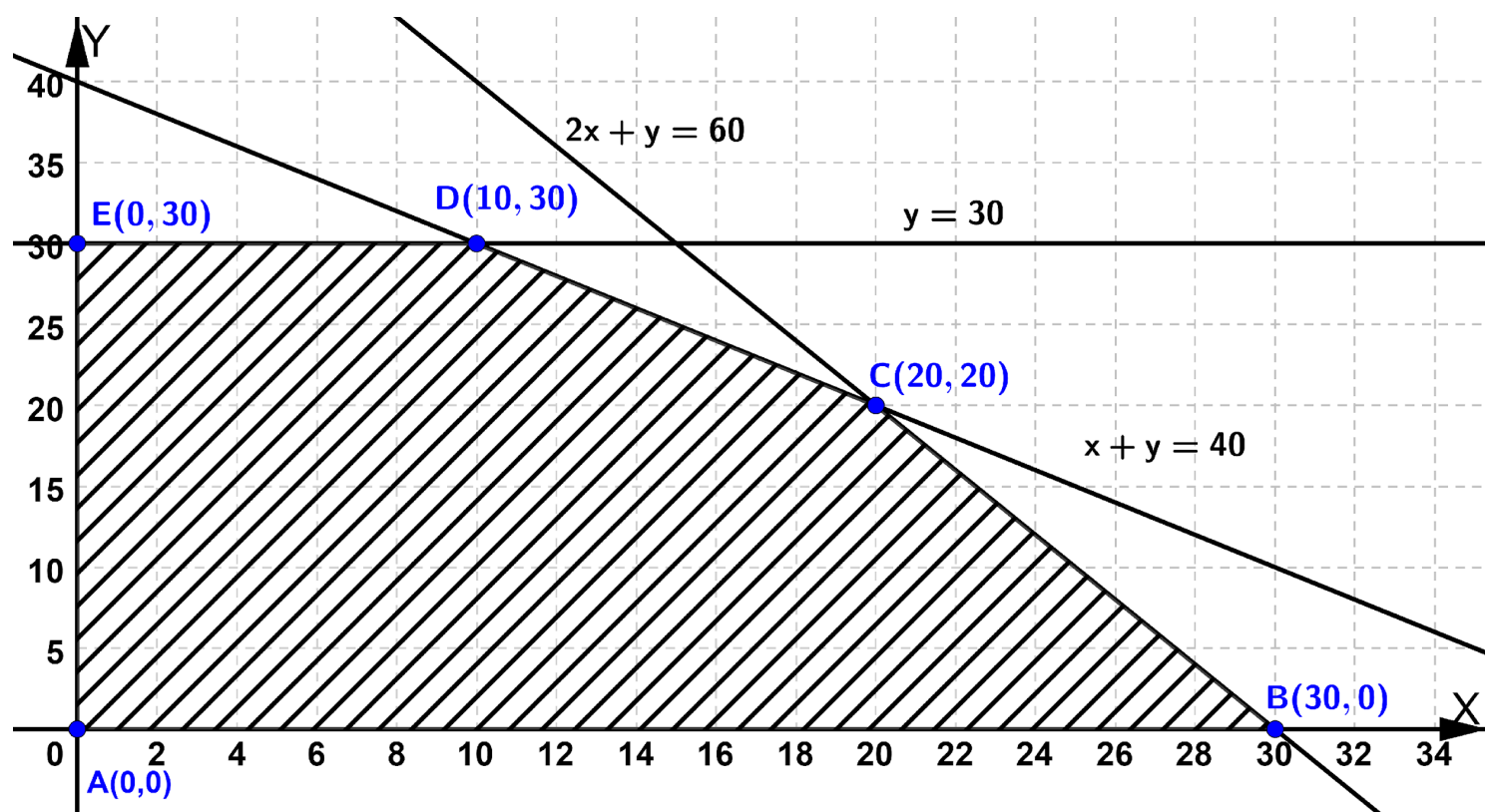
Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de unidades	cuencos de masa	cuencos de chocolate	beneficio (en €)
pastel clase A	x	2x	2x	5x
pastel clase B	y	1y	2y	4y
total	x + y	2x + y	2x + 2y	5x + 4y

Función a optimizar (maximizar), beneficio $f(x, y) = 5x + 4y$.

Las restricciones son $\{y \leq 30, 2x + y \leq 60, 2x + 2y \leq 80 \Rightarrow x + y \leq 40, x, y \geq 0\}$

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Veamos en qué vértice alcanza el valor máximo el beneficio $f(x, y) = 5x + 4y$

$$f(A) = f(0, 0) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \quad f(B) = f(30, 0) = 5 \cdot 30 + 4 \cdot 0 = 150 \quad f(C) = f(20, 20) = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 20 = 180$$

$$f(D) = f(10, 30) = 5 \cdot 10 + 4 \cdot 30 = 170 \quad f(E) = f(0, 30) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 30 = 120$$

El beneficio máximo es 180 € y se obtiene cocinando 20 pasteles de cada clase.

Bloque 2. Análisis.

2.1. Definimos la función $f(x) = \frac{2}{x(x-2)}$ para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido.

¿Cuál es su dominio? [0,25 puntos] ¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. [0,75 puntos]

Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas y también los extremos relativos de f , que debes calcular previamente. [1,5 puntos]

Resolución

Como el denominador se anula para $x = 0$, $x = 2$, entonces $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0 ; 2\}$

$$f(x) = \frac{2}{0} = \pm\infty \Rightarrow f \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 0 \text{ de ecuación A.V. : } x = 0 \text{ (el eje Y)}$$

$$\text{Además, } f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$f(x) = \frac{2}{0} = \frac{2}{0} = \pm\infty \Rightarrow f \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 2 \text{ de ecuación A.V. : } x = 2$$

$$\text{Además, } f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{2}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow f \text{ tiene asíntota horizontal en } \pm\infty, \text{ que es la recta de ecuación } y = 0 \text{ (el eje X)}$$

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{2}{x(x-2)} - 0 = \frac{2}{x(x-2)}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0 \Rightarrow \text{la gráfica está "por encima" de la asíntota en } +\infty$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0 \Rightarrow \text{la gráfica también está "por encima" de la asíntota en } -\infty$$

$$\nexists f(0) \text{ y } f(x) = \frac{2}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow 2 = 0 \text{ (imposible)} \Rightarrow \text{la gráfica de } f \text{ NO corta a los ejes de coordenadas}$$

$$f(x) = \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{x^2 - 2x} \quad f'(x) = \frac{0(x^2 - 2x) - 2(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{4 - 4x}{(x^2 - 2x)^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

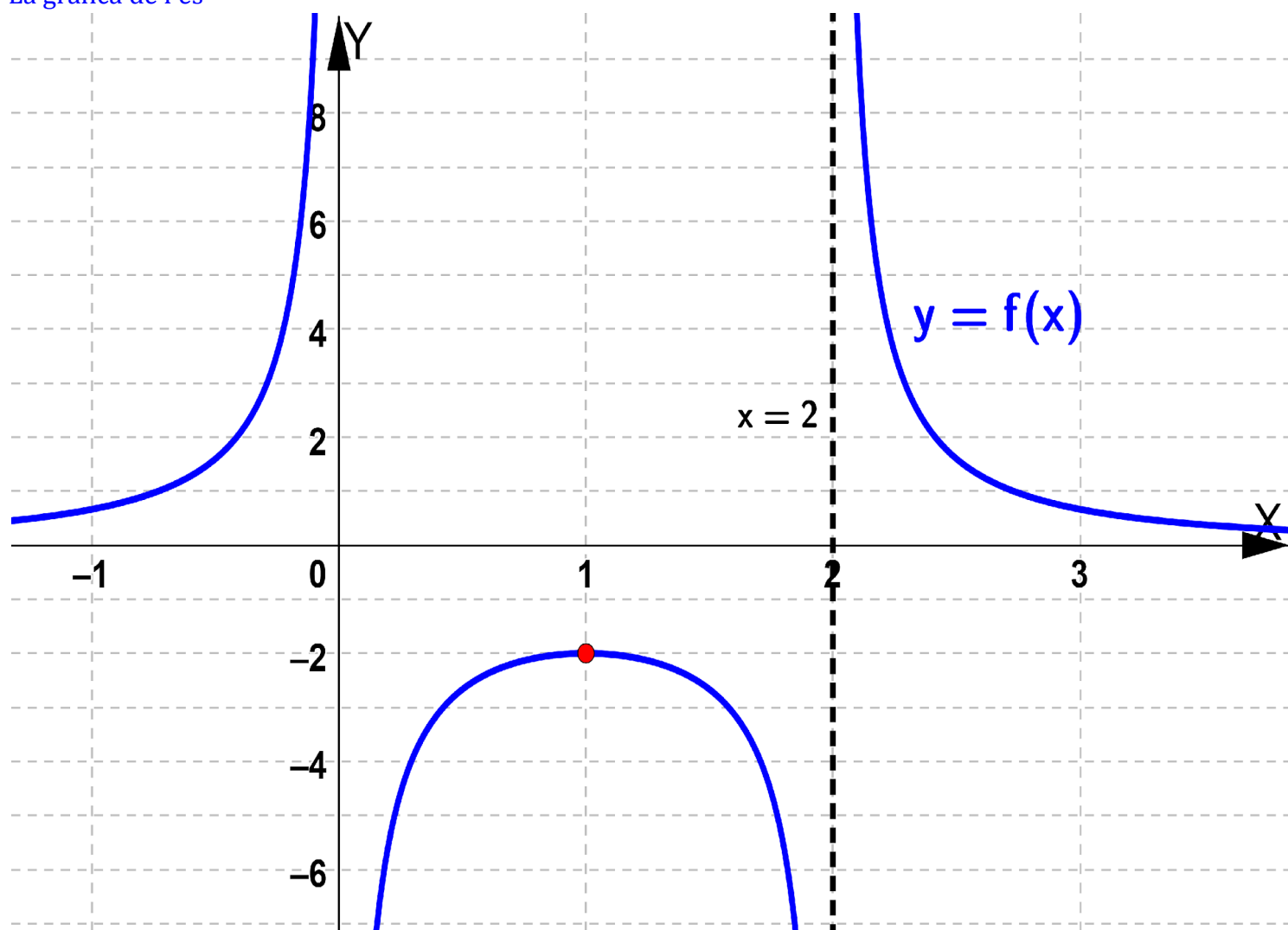
Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	-
$f(x)$	creciente	$\nexists$	creciente	máximo	decreciente	$\nexists$	decreciente

f es creciente en $(-\infty, 1) - \{0\}$ y decreciente en $(1, +\infty) - \{2\}$

Máximo relativo: $x = 1, y = f(1) = \frac{2}{1^2 - 2.1} = -2$, punto $(1, -2)$. No hay mínimo relativo

La gráfica de f es



2.2. Consideramos la parábola $y = 5x - x^2 - 4$. La recta $y = ax$ corta a la parábola en un punto (x_0, y_0) , e y_0 es el máximo valor posible. ¿Cuánto valen a, x_0 e y_0 ? [2,5 puntos]

Resolución

$f(x) = 5x - x^2 - 4$; $f'(x) = 5 - 2x$. La recta $y = ax$ corta a la parábola en un solo punto $\Rightarrow y = ax$ es la rtg

$$\{f'(x_0) = a \quad f(x_0) = ax_0 \Rightarrow \{5 - 2x_0 = a \rightarrow x_0 = \frac{5-a}{2} \quad 5x_0 - x_0^2 - 4 = ax_0 ;$$

$$5\left(\frac{5-a}{2}\right) - \left(\frac{5-a}{2}\right)^2 - 4 = a\frac{5-a}{2}. \text{ Multiplico por 4:}$$

$$10(5 - a) - (5 - a)^2 - 16 = 2a(5 - a) \Rightarrow 50 - 10a - 25 + 10a - a^2 - 16 = 10a - 2a^2$$

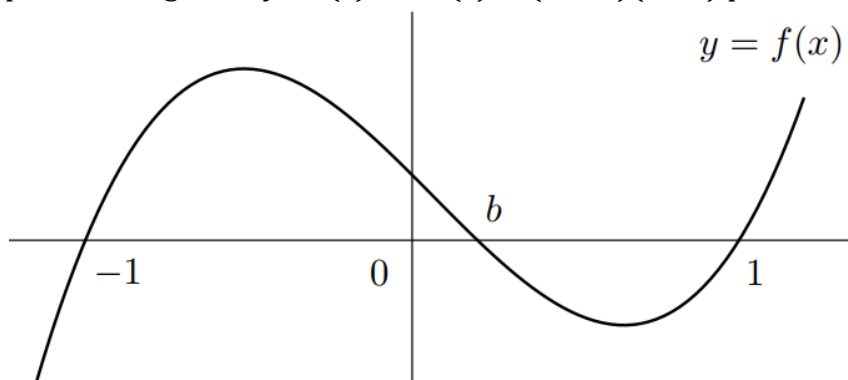
Queda $a^2 - 10a + 9 = 0$, $a = \frac{10 \pm 8}{2}$, $a = 1$, $a = 9$. Veamos para qué valor de a es máximo y_0

$$\text{Para } a = 1, x_0 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad y_0 = ax_0 = 1 \cdot 2 = 2$$

Para $a = 9$, $x_0 = \frac{5-9}{2} = -2$ $y_0 = ax_0 = 9(-2) = -18$

Vemos que $y_0 = 2$ es el valor máximo. Luego, la solución es $a = 1$, $x_0 = y_0 = 2$

2.3. En la figura se representa la gráfica $y = f(x)$, con $f(x) = (x^2 - 1)(x - b)$ para cierto b entre -1 y 1 :



¿Qué signo tienen respectivamente las integrales $\int_{-1}^b f(x) dx$ y $\int_b^1 f(x) dx$? [0,25 puntos]

Sabemos que $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Halla entonces el valor de b . [2,25 puntos]

Resolución

La 1ª integral es positiva porque la gráfica de f está “por encima” del eje X en el intervalo $(-1, b)$ y la 2ª integral es negativa porque la gráfica de f está “por debajo” del eje X en el intervalo $(b, 1)$

Para la 2ª parte del ejercicio: Sabemos que $f(x) = (x^2 - 1)(x - b) = x^3 - bx^2 - x + b$

Una primitiva de f es $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + bx = \frac{3x^4 - 4bx^3 - 6x^2 + 12bx}{12}$. Por la regla de Barrow,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} = F(1) - F(-1) = \frac{3 \cdot 1^4 - 4b \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 12b \cdot 1}{12} - \frac{3(-1)^4 - 4b(-1)^3 - 6(-1)^2 + 12b(-1)}{12} = \frac{16b}{12} = \frac{4b}{3}$$

Por tanto, $4b = 1$, $b = \frac{1}{4}$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1. Milena y Santi juegan con un dado. Cada uno lo tira una vez, pero Milena tiene ventaja: si saca un 6 gana ella; en caso contrario, si Santi saca par gana él, y si saca impar gana Milena.

(i) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno? [1,25 puntos]

(ii) ¿Cuál es la probabilidad del suceso “Santi saca par”? ¿Y la de “gana Milena” condicionada a “Santi saca par”? ¿Cuál es entonces la probabilidad de “Santi saca par” condicionada a “gana Milena”? [1,25 puntos]

Resolución

A = Milena saca un 6 B = Santi saca par M = gana Milena S = gana Santi

i) $p(M) = p(A) + p(A^c)p(B^c) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12} \cong 0,5833 = 58,33\%$

$p(S) = p(A^c)p(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \cong 0,4167 = 41,67\%$

i) $p(B) = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$

Para la 2ª pregunta, Santi saca par en los 18 casos siguientes 12, 14, 16, 22, 26, 26, 32, 34, 36, 42, 44, 46, 52, 54, 56, 62, 64, 66. De estos 18 casos sólo gana Milena en 3 casos 62, 64, 66.

Por la regla de Laplace, $p(M/B) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \cong 0,1667 = 16,67\%$

Para la 3ª pregunta, Milena gana en 21 de los 36 resultados posibles. De esos resultados favorables a que gane Milena están los resultados 62, 64, 66 en los que Santi saca par.

Por la regla de Laplace, $p(B/M) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} \cong 0,1429 = 14,29\%$

3.2. La estatura de las niñas de 3 años en España sigue una distribución normal de media 95 cm. Si nos dicen que una niña que mide 102 cm está en el percentil 97 (es decir, es más alta que el 97% de las niñas de su edad), ¿cuál es la desviación típica de la variable? [1,75 puntos] Se toma una muestra aleatoria independiente de 25 niñas de tres años. ¿Cuál es la media y la desviación típica de su estatura promedio? [0,75 puntos]

Resolución

$X = \text{estatura} \rightarrow N(95, \sigma)$. Tipificando, $Z = \frac{X-95}{\sigma} \rightarrow N(0, 1)$.

Nos dicen que $97\% = 0,97 = p(X < 102) = p\left(\frac{X-95}{\sigma} < \frac{102-95}{\sigma}\right) = p\left(Z < \frac{7}{\sigma}\right)$.

Usando la tabla de la $N(0, 1)$, $\frac{7}{\sigma} = 1,88 \Rightarrow \sigma = \frac{7}{1,88} \cong 3,72$

Para la 2ª parte, sabemos, por el teorema central del límite que si $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$ y $\bar{X}$ = media de las muestras de tamaño n , entonces $\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. En este caso $\mu = 95$, $\sigma = 3,72$ y $n = 25$

Luego, la media es $\mu = 95$ y la desviación típica es $\frac{3,72}{\sqrt{25}} = 0,744$

3.3. En un gran yacimiento arqueológico se estudian 36 cráneos, cuyo perímetro medio servirá para datar aproximadamente la época de ocupación. La media resulta ser igual a 56,2 cm. Si consideramos como desviación típica el valor 1,5 cm, ¿qué intervalo de confianza obtenemos para situar la media, con nivel de confianza 0,95? [1,25 puntos] ¿Qué desviación típica deberíamos asumir para obtener el mismo intervalo si lo calculamos con el 90% de confianza? [1,25 puntos]

Resolución

$X = \text{perímetro} \rightarrow N(\mu, 1,5)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza de 0,95 para el perímetro medio, μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x} = 56,2$ la media de una muestra de tamaño $n = 36$

y $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975$ usando la tabla de la $N(0, 1) \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Sustituyendo, $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{36}} = 0,49$;

$I_c = (56,2 - 0,49 ; 56,2 + 0,49) = (55,71 ; 56,69)$

Para la 2ª parte, ahora $z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,9}{2} = 0,95$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,95$ usando la tabla de la $N(0, 1)$ por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$

Como queremos obtener el mismo intervalo de confianza el error debe ser el mismo, 0,49

$$\text{Luego, } E = 0,49 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{0,49 \sqrt{n}}{z_{\alpha/2}} = \frac{0,49 \sqrt{36}}{1,645} \Rightarrow \sigma \cong 1,79 \text{ cm}$$