

### **Тема: Касательные напряжения при поперечном изгибе**

1. Возникновение касательных напряжений. Формула Журавского
2. Определение линейных и угловых перемещений

#### Основная литература:

1. Никитин Е.М. Теоретическая механика для техникумов. М.: Высшая школа, 2014
2. Олофинская В.П. Техническая механика. Сборник тестовых заданий. – Москва, Форум, Инфра М, 2014.
3. Аркуша А.И. Техническая механика. – Москва, Высшая школа, 2013.

#### Дополнительная литература:

1. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике. - М.: Высшая школа, 2012.
2. <https://www.youtube.com/watch?v=AZE70B9m2lA> вывод формулы Журавского

### **1. Возникновение касательных напряжений**

В прошлом веке при строительстве мостов широко применялись деревянные конструкции. Балки из древесины обычно имеют прямоугольное сечение и плохо работают на скалывание вдоль волокон. Это объясняется существованием продольного сдвига и касательных напряжений, которые вызывают появление продольных трещин в балках. Русский инженер-мостостроитель Д.И. Журавский является одним из основателей науки о сопротивлении материалов, создавший широко применяемую теорию распределения касательных напряжений в балках при изгибе. Им была выведена формула для вычисления касательных напряжений при поперечном изгибе балок прямоугольного сечения.

В поперечных сечениях балок, как было установлено выше, при *чистом изгибе* возникают только нормальные, а при *поперечном изгибе* — как нормальные, так и касательные напряжения.

Из закона парности касательных напряжений (касательные напряжения, возникающие в двух взаимно перпендикулярных площадках, равны друг другу по модулю и направлены либо от ребра, либо к ребру, образуемому площадками) следует, что в продольных сечениях балки, параллельных нейтральному слою, также возникают касательные напряжения (рис. 1).

Для данной точки балки касательное напряжение  $\tau_{zy}$ , возникающее на площадке поперечного сечения, равно касательному напряжению  $\tau_{yz}$ , возникающему на площадке продольного сечения, проведенного через ту же точку

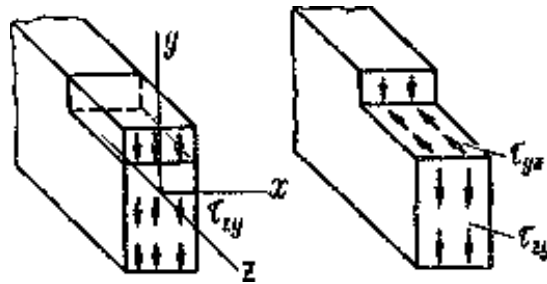


Рисунок 1- Закон парности для касательных напряжений

Наличие касательных напряжений в продольных сечениях балок подтверждается также и результатами следующего простого опыта. Представим себе две одинаково нагруженные двухопорные балки (рис.2), одна из которых состоит из ряда отдельных положенных друг на друга и ничем не скрепленных брусьев. Каждый из этих брусьев деформируется независимо от других (влияние сил трения между брусьями не учитываем), имея собственный нейтральный слой. В результате деформации отдельные брусья, составляющие балку, взаимно сдвинутся. В целой балке взаимного сдвига ее продольных слоев не происходит; это и указывает на наличие в продольных плоскостях касательных напряжений, препятствующих этим сдвигам. Попутно заметим, что прогибы целой балки будут значительно меньше, чем балки, состоящей из отдельных брусьев

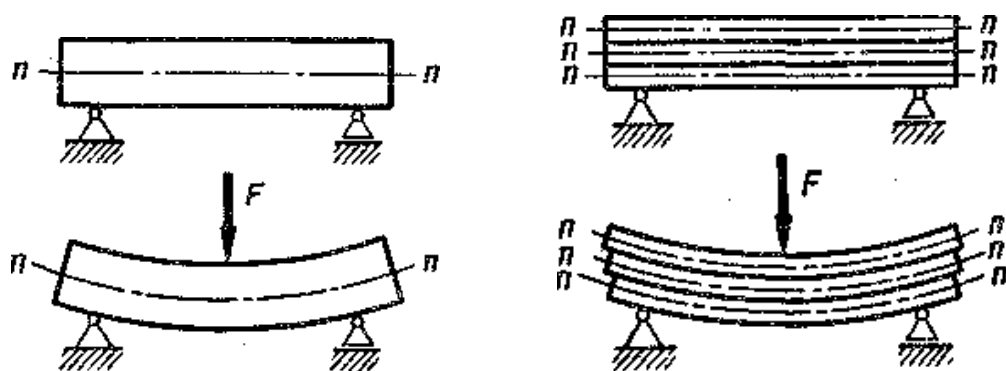


Рисунок 2 - Возникновение касательных напряжений в продольных сечениях балки

Касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения при *прямом поперечном изгибе* определяется по формуле

$$\tau = Q_y S_{\text{зотс}} / (J_x b), \quad (1)$$

где  $Q_y$  — поперечная сила, возникающая в рассматриваемом поперечном сечении бруса;  $S_{\text{зотс}}$  — статический момент относительно нейтральной оси поперечного сечения его части, расположенной по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку параллельно нейтральной оси. Эта часть сечения заштрихована на рис. 3;  $J_x$  — момент инерции всего поперечного сечения относительно его нейтральной оси;  $b$  — ширина поперечного сечения — размер в направлении, параллельном нейтральной оси (при переменной ширине сечения значение  $b$  надо брать на уровне исследуемой точки).

Эту зависимость называют *формулой Журавского*.

Применим формулу Журавского для исследования закона распределения касательных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения балки, в котором возникла поперечная сила  $Q_y$ . Момент инерции прямоугольного сечения  $J_x = (bh^3)/12$ , ширина сечения  $b = \text{const}$  по всей высоте.

Составим выражение для статического момента  $S_{\text{зотс}}$  (рис.3). Как известно, статический момент (заштрихован) равен произведению площади на координату ее центра тяжести:

$$S_{\text{зотс}} = Ay_c$$

где  $A_{\text{отс}} = b(h/2 - y_1)$ ,

а ордината центра тяжести этой площади

$$y_c = h/2 - [(h/2) - y_1]/2 = h/4 + y_1/2$$

$$S_{\text{зотс}} = b [(h/2) - y_1](1/2) [(h/2) + y_1] = (b/2)(h^2/4 - y_1^2)$$

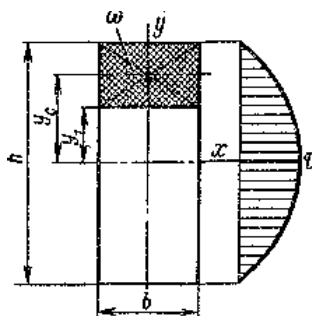


Рисунок 3- Определение статического момента

Принципиально безразлично, брать ли статический момент заштрихованной или всей остальной части сечения, так как по абсолютному значению они равны: их сумма дает статический момент всего сечения относительно оси  $x$ , который равен нулю (ось  $x$  — центральная).

Подставляя в формулу (1) значение  $S_{\text{хотс}}$  и  $J_x$ , получим

$$\tau = [6 Q_y / (bh^3)] (h^2/4 - y_1^2)$$

Переменная  $y_1$  входит в полученное выражение в квадрате, т. е.  $\tau$  изменяется по высоте сечения по параболическому закону, достигая максимума в точках нейтральной оси (рис. 1). В крайних точках сечения при  $y_1 = \pm h/2$  касательные напряжения равны нулю. Принимая  $y_1 = 0$ , найдем

$$\tau_{\max} = 3Q_y / (2bh) = 3 Q_y / (2A). \quad (2)$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение в рассматриваемом случае оказалось в полтора раза больше среднего, вычисляемого как частное от деления поперечной силы на площадь сечения.

В балке прямоугольного сечения максимальные касательные напряжения возникают в тех точках, где нормальные напряжения равны нулю (на нейтральной оси), и, наоборот, в крайних точках сечения, где нормальные напряжения максимальны, касательные напряжения равны нулю. Сказанное справедливо также для балок круглого сечения.

Результат, полученный для балки прямоугольного сечения, можно использовать для вычисления касательных напряжений в стенке двутавровой балки. Не останавливаясь на доказательствах, укажем, что в полках двутавровых балок возникают горизонтально направленные касательные напряжения  $\tau_{zx}$ , а вертикальные  $\tau_{zy}$  близки к нулю, при этом для вычисления последних формула Журавского неприменима. На рисунке 4 показано направление касательных напряжений в полке и стенках двутаврового профиля и дана эпюра  $\tau$  в стенке

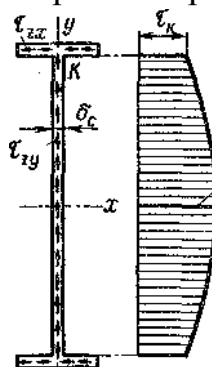


Рисунок 4. Касательные напряжения в стенке двутавровой балки

Напряжения в верхней (нижней) точке стенки найдем, подставляя в формулу (2) статический момент площади полки  $S_{xII}$  относительно нейтральной оси и принимая ширину сечения равной толщине стенки:

$$\tau_k = Q_y S_{xII} / (J_x \delta_c).$$

Максимальное касательное напряжение (возникает в точках нейтральной оси) найдем из выражения

$$\tau_{\max} = Q_y S_{xI/2сеч} / (J_x \delta_c) \quad (3)$$

где  $S_{xI/2сеч}$  - статический момент полусечения относительно нейтральной оси (в таблице ГОСТа на прокатные двутавры эта величина обозначена  $S_x$ ).

В прокатной или сварной двутавровой балке, имеющей сравнительно большую высоту, касательные напряжения могут быть значительны при условии, что балка нагружена большими сосредоточенными силами и длина ее невелика или эти силы приложены близко к опорам. В этом случае помимо основного расчета на прочность по нормальным напряжениям следует проверить максимальные касательные напряжения в том сечении, где поперечная сила имеет наибольшее значение. Обычно принимают (для стальных балок)  $[\tau] = 0,6 [\sigma]$ .

## 2. Определение линейных и угловых перемещений

В ряде случаев работающие на изгиб элементы машиностроительных и строительных конструкций должны быть рассчитаны не только на прочность (способность материала сопротивляться разрушению под действием нагрузок), но и на жесткость (способность элемента конструкции сопротивляться деформациям под действием нагрузок). К деталям, рассчитываемым на жесткость, относятся, в частности, валы зубчатых и червячных передач и многие части металлорежущих станков.

Расчет на жесткость при изгибе требует предварительного изучения вопроса о перемещениях поперечных сечений балок. Рассмотрим простую консоль, нагруженную на свободном конце силой  $F$ , линия действия которой совпадает с одной из главных осей поперечного сечения балки (рис. 5).

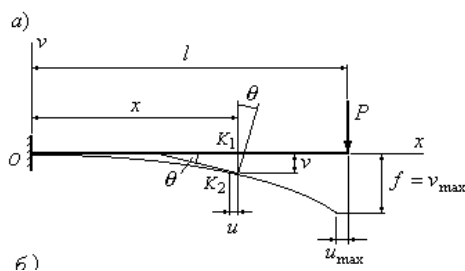


Рисунок 5- Определение линейных и угловых перемещений

Под действием внешних сил балка искривляется. При повороте поперечные сечения остаются перпендикулярными изогнутой оси бруса (что следует из гипотезы Бернулли.)

Изогнутая ось балки называется **упругой линией**.

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки, называется **прогибом балки** в данной точке или сечении ( $f$ ), а наибольший прогиб — называется **стрелой прогиба** —  $f_{max}$

Угол  $\theta$ , на который поворачивается по отношению к своему первоначальному положению сечение, называется **углом поворота** данного сечения.

Из математики известно, что радиус кривизны кривой  $y = f(z)$  в любой точке определяется по формуле

$$\rho = [1 + (y')^2]^{3/2} / y'' ,$$

где  $y' = dy/dx = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $y'' = d^2y / dx^2$ .

Ввиду малости деформаций  $(y')^2$  пренебрегаем (т.к. она намного меньше 1), тогда

$$\rho \approx 1 / y'' . \quad (4)$$

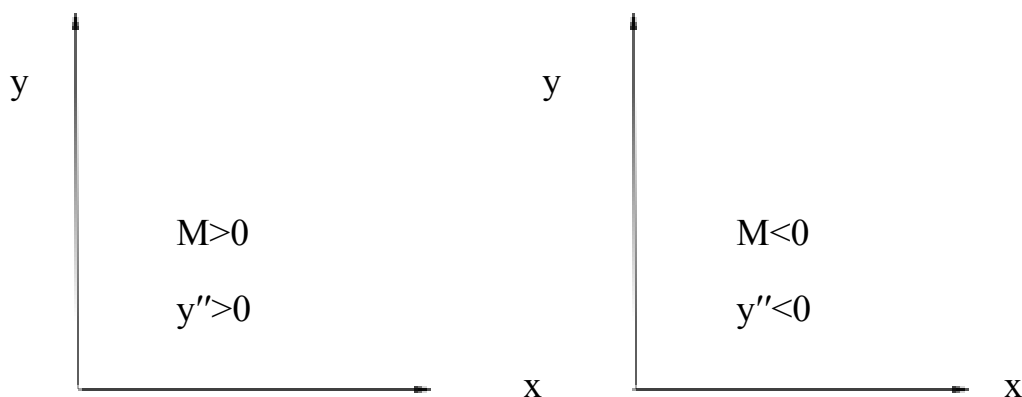
Кривизна балки определяется по формуле

$$\kappa = 1/\rho = M / EJ . \quad (5)$$

Подставим (1) в (2)

$$\pm y'' = M / EJ \quad (6)$$

Получили приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки или упругой линии. Знаки устанавливают по *правилу знаков для изгибающих моментов* (изгиб вверх «-», изгиб вниз «+»)



Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки для данной системы координат

$$y'' = M / EJ$$

Существует несколько способов определения перемещений в балках при изгибе: аналитический, методом начальных параметров, с помощью интеграла Мора.

Рассмотрим *аналитический способ* определения перемещений в балках- он заключается в последовательном интегрировании дифференциального уравнения изогнутой оси балки.

Проинтегрировав это уравнение один раз - получим уравнение **угла поворота**:

$$y' = \theta = \int (M / EJ) dx + C_1$$

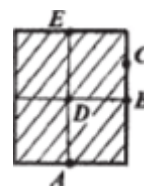
Проинтегрировав это уравнение второй раз - получим уравнение **прогибов**:

$$y = f = \int dx \int (M / EJ) dx + C_1 x + C_2$$

$C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, определяются из граничных условий.

### Контрольные вопросы

1. Почему при поперечном изгибе в продольных сечениях балки возникают касательные напряжения?
2. В какой точке поперечного сечения касательные напряжения при поперечном изгибе максимальны?
3. Какие напряжения возникают в поперечном сечении балки при чистом изгибе? При поперечном изгибе?



### Задание для самостоятельной работы:

1. Краткий конспект лекции. Ответить на контрольные вопросы письменно
  2. Фотографию выполненной работы прислать в личном сообщении ВК <https://vk.com/id139705283>
- На фотографии вверху должна быть фамилия, дата выдачи задания, группа, дисциплина. Например: «Иванов И.И, 27.03.2023, группа ХКМ 2/1, Техническая механика»