Дата **27.03.2023 г.** Группа ХКМ 2/1. Курс второй. Семестр IV

Тема: Касательные напряжения при поперечном изгибе

1. Возникновение касательных напряжений. Формула Журавского
2. Определение линейных и угловых перемещений

Основная литература:
1.Никитин Е.М.Теоретическая механика для техникумов. М.: Высшая школа, 2014
2.Олофинская В.П. Техническая механика. Сборник тестовых заданий. – Москва, Форум, Инфра М, 2014.
3. Аркуша А.И. Техническая механика. – Москва, Высшая школа, 2013.
Дополнительная литература:
1. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике. - М.: Высшая школа, 2012.
2. https://www.youtube.com/watch?v=AZE70B9m2lA вывод формулы Журавского

1. Возникновение касательных напряжений

В прошлом веке при строительстве мостов широко применялись деревянные конструкции. Балки из древесины обычно имеют прямоугольное сечение и плохо работают на скалывание вдоль волокон. Это объясняется существованием продольного сдвига и касательных напряжений, которые вызывают появление продольных трещин в балках. Русский инженер-мостостроитель Д.И.Журавский является одним из основателей науки о сопротивлении материалов, создавший широко применяемую теорию распределения касательных напряжений в балках при изгибе. Им была выведена формула для вычисления касательных напряжений при поперечном изгибе балок прямоугольного сечения.

В поперечных сечениях балок, как было установлено выше, при *чистом изгибе* возникают только нормальные, а при *поперечном изгибе* — как нормальные, так и касательные напряжения.

Из закона парности касательных напряжений (касательные напряжения, возникающие в двух взаимно перпендикулярных площадках, равны друг другу по модулю и направлены либо от ребра, либо к ребру, образуемому площадками) следует, что в продольных сечениях балки, параллельных нейтральному слою, также возникают касательные напряжения (рис. 1).

Для *данной точки* балки касательное напряжение τ_{zy}, возникающее на площадке поперечного сечения, равно касательному напряжению τ_{yz}, возникающему на площадке продольного сечения, проведенного через ту же точку

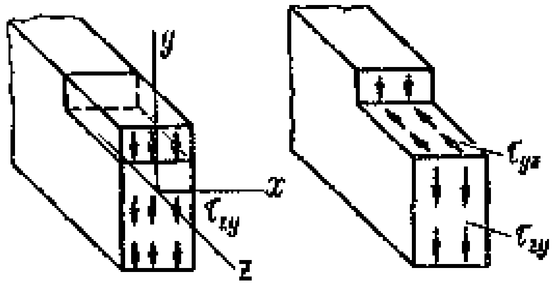


Рисунок 1- Закон парности для касательных напряжений

Наличие касательных напряжений в продольных сечениях балок подтверждается также и результатами следующего простого опыта. Представим себе две одинаково нагруженные двухопорные балки (рис.2), одна из которых состоит из ряда отдельных положенных друг на друга и ничем не скрепленных брусьев. Каждый из этих брусьев деформируется независимо от других (влияние сил трения между брусьями не учитываем), имея собственный нейтральный слой. В результате деформации отдельные брусья, составляющие балку, взаимно сдвинутся. В целой балке взаимного сдвига ее продольных слоев не происходит; это и указывает на наличие в продольных плоскостях касательных напряжений, препятствующих этим сдвигам. Попутно заметим, что прогибы целой балки будут значительно меньше, чем балки, состоящей из отдельных брусьев

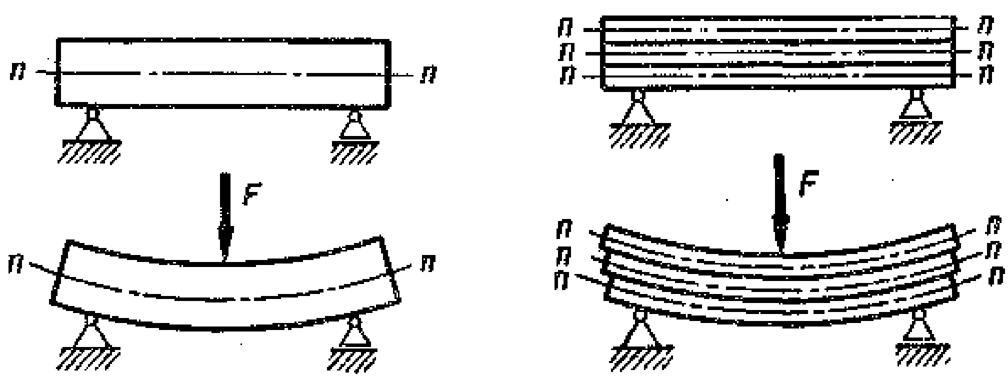


Рисунок 2 - Возникновение касательных напряжений
в продольных сечениях балки

Касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения при *прямом поперечном изгибе* определяется по формуле

$$\tau = Q_y S_{zотс} / (J_x b), \qquad (1)$$

где Q_y — поперечная сила, возникающая в рассматриваемом поперечном сечении бруса; $S_{zотс}$ — статический момент относительно нейтральной оси поперечного сечения его части, расположенной по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку параллельно нейтральной оси. Эта часть сечения заштрихована на рис. 3; J_x — момент инерции всего поперечного сечения относительно его нейтральной оси; b — ширина поперечного сечения — размер в направлении, параллельном нейтральной оси (при переменной ширине сечения значение b надо брать на уровне исследуемой точки).

Эту зависимость называют *формулой Журавского.*

Применим формулу Журавского для исследования закона распределения касательных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения балки, в котором возникла поперечная сила Q_y. Момент инерции прямоугольного сечения $J_x = (bh^3)/12$, ширина сечения b=const по всей высоте.

Составим выражение для статического момента $S_{xотс}$ (рис.3). Как известно, статический момент (заштрихован) равен произведению площади на координату ее центра тяжести:

$$S_{xотс} = Ay_c$$

где $A_{отс} = b(h/2 - y_1)$,

а ордината центра тяжести этой площади

$$y_c = h/2 - [(h/2) - y_1]/2 = h/4 + y_1/2$$

$$S_{xотс} = b\,[(h/2) - y_1](1/2)\,[(h/2) + y_1] = (b/2)(h^2/4 - y_1^2)$$

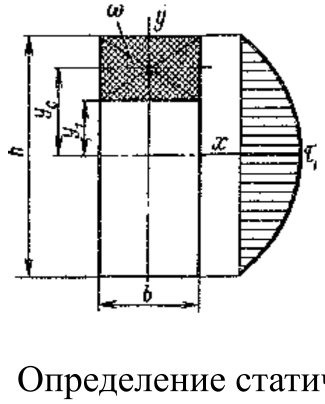


Рисунок 3- Определение статического момента

Принципиально безразлично, брать ли статический момент заштрихованной или всей остальной части сечения, так как по абсолютному значению они равны: их сумма дает статический момент всего сечения относительно оси *x,* который равен нулю (ось *x* — центральная).

Подставляя в формулу (1) значение $S_{xотс}$ и J_x, получим

$$\tau = [6\,Q_y/(bh^3)]\,(h^2/4 - y_1^{\,2})$$

Переменная y_1 входит в полученное выражение в квадрате, т. е. т изменяется по высоте сечения по параболическому закону, достигая максимума в точках нейтральной оси (рис. 1). В крайних точках сечения при $y_1 = \pm h/2$ касательные напряжения равны нулю. Принимая $y_1 = 0$, найдем

$$\tau_{\max} = 3Q_y/(2bh) = 3\,Q_y/(2A). \qquad (2)$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение в рассматриваемом случае оказалось в полтора раза больше среднего, вычисляемого как частное от деления поперечной силы на площадь сечения.

В балке прямоугольного сечения максимальные касательные напряжения возникают в тех точках, где нормальные напряжения равны нулю (на нейтральной оси), и, наоборот, в крайних точках сечения, где нормальные напряжения максимальны, касательные напряжения равны нулю. Сказанное справедливо также для балок круглого сечения.

Результат, полученный для балки прямоугольного сечения, можно использовать для вычисления касательных напряжений в стенке двутавровой балки. Не останавливаясь на доказательствах, укажем, что в полках двутавровых балок возникают горизонтально направленные касательные напряжения τ_{zx}, а вертикальные τ_{zy} близки к нулю, при этом для вычисления последних формула Журавского неприменима. На рисунке 4 показано направление касательных напряжений в полке и стенках двутаврового профиля и дана эпюра τ в стенке

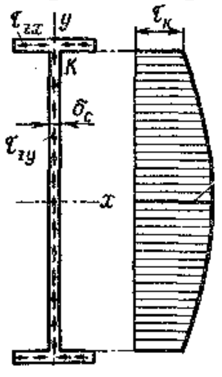


Рисунок 4. Касательные напряжения в стенке двутавровой балки

Напряжения в верхней (нижней) точке стенки найдем, подставляя в формулу (2) статический момент площади полки $S_{xП}$ относительно нейтральной оси и принимая ширину сечения равной толщине стенки:

$$\tau_к = Q_y S_{xП} / (J_x \delta_c).$$

Максимальное касательное напряжение (возникает в точках нейтральной оси) найдем из выражения

$$\tau_{\max} = Q_y S_{x1/2сеч} / (J_x \delta_c) \quad (3)$$

где $S_{x1/2сеч}$ - статический момент полусечения относительно нейтральной оси (в таблице ГОСТа на прокатные двутавры эта величина обозначена S_x).

В прокатной или сварной двутавровой балке, имеющей сравнительно большую высоту, касательные напряжения могут быть значительны при условии, что балка нагружена большими сосредоточенными силами и длина ее невелика или эти силы приложены близко к опорам. В этом случае помимо основного расчета на прочность по нормальным напряжениям следует проверить максимальные касательные напряжения в том сечении, где поперечная сила имеет наибольшее значение. Обычно принимают (для стальных балок) [τ] = 0,6 [σ].

2. Определение линейных и угловых перемещений

В ряде случаев работающие на изгиб элементы машиностроительных и строительных конструкций должны быть рассчитаны не только на прочность (способность материала сопротивляться разрушению под действием нагрузок), но и на жесткость (способность элемента конструкции сопротивляться деформациям под действием нагрузок). К деталям, рассчитываемым на жесткость, относятся, в частности, валы зубчатых и червячных передач и многие части металлорежущих станков.

Расчет на жесткость при изгибе требует предварительного изучения вопроса о перемещениях поперечных сечений балок. Рассмотрим простую консоль, нагруженную на свободном конце силой F, линия действия которой совпадает с одной из главных осей поперечного сечения балки (рис. 5).

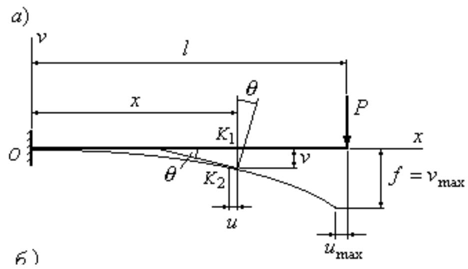


Рисунок 5- Определение линейных и угловых перемещений

Под действием внешних сил балка искривляется. При повороте поперечные сечения остаются перпендикулярными изогнутой оси бруса (что следует из гипотезы Бернулли.)

Изогнутая ось балки называется **упругой линией**.

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки, называется **прогибом балки** в данной точке или сечении (f), а наибольший прогиб — называется **стрелой прогиба —** f_{max}

Угол θ, на который поворачивается по отношению к своему первоначальному положению сечение, называется **углом поворота** данного сечения.

Из математики известно, что радиус кривизны кривой $y = f(z)$ в любой точке определяется по формуле

$$\rho = [1 + (y')^2]^{3/2} / y'' ,$$

где $y' = dy/dx = \mathrm{tg}\alpha$, $y'' = d^2y / dx^2$.

Виду малости деформаций $(y')^2$ пренебрегаем (т.к она намного меньше 1), тогда

$$\rho \approx 1 / y''. \qquad (4)$$

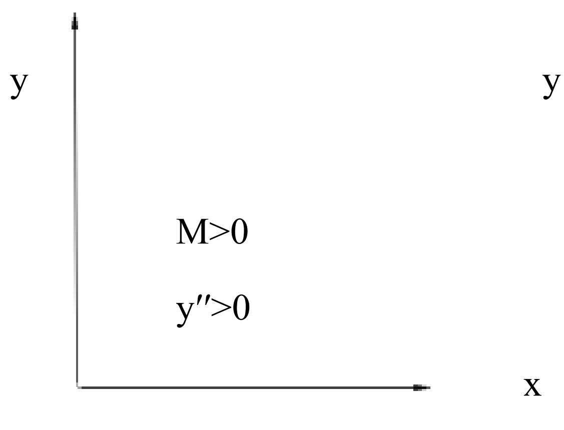
Кривизна балки определяется по формуле

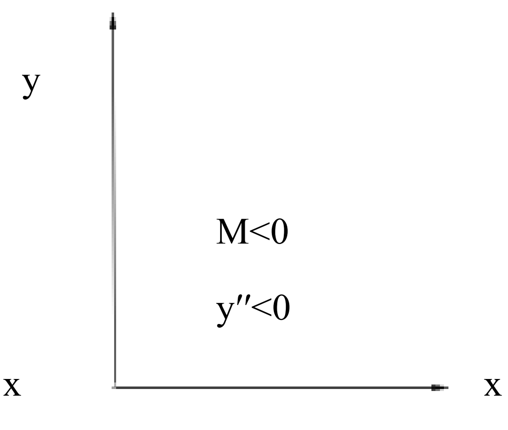
$$\kappa = 1/\rho = M / EJ. \qquad (5)$$

Подставим (1) в (2)

$$\pm\, y'' = M / EJ \qquad (6)$$

Получили приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки или упругой линии. Знаки устанавливают по *правилу знаков для изгибающих моментов* (изгиб вверх «-», изгиб вниз «+»)





Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки для данной системы координат

$$y'' = M / EJ$$

Существует несколько способов определения перемещений в балках при изгибе: аналитический, методом начальных параметров, с помощью иетенграла Мора.

Рассмотрим ***аналитический способ*** определения перемещений в балках- он заключается в последовательном интегрировании дифференциального уравнения изогнутой оси балки.

Проинтегрировав это уравнение один раз - получим уравнение **угла поворота**:

$$y'' = \theta = \int (M / EJ)\, dx + C_1.$$

Проинтегрировав это уравнение второй раз - получим уравнение **прогибов:**

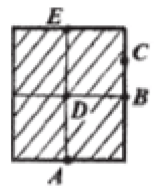
$$y' = f = \int dx \int (M / EJ)\, dx + C_1 x + C_2$$

C_1 и C_2 –постоянные интегрирования, определяются из граничных условий.

Контрольные вопросы

1. Почему при поперечном изгибе в продольных сечениях балки возникают касательные напряжения?

2. В какой точке поперечного сечения касательные напряжения при поперечном изгибе максимальны?



3. Какие напряжения возникают в поперечном сечении балки при чистом изгибе? При поперечном изгибе?

Задание для самостоятельной работы:

1. Краткий конспект лекции. Ответить на контрольные вопросы письменно
2. Фотографию выполненной работы прислать в личном сообщении ВК https://vk.com/id139705283

На фотографии вверху должна быть фамилия, дата выдачи задания, группа, дисциплина. Например: «Иванов И.И, 27.03.2023, группа ХКМ 2/1, Техническая механика»