

## TD 4 - Algèbre 2

## Travail en autonomie :

## Exercice 1 :

- Vérifier les 8 axiomes qui font de  $\mathbb{R}^3$  un espace vectoriel.
- Idem pour une droite  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  passant par l'origine, définie par 
$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

- Soient  $u(x; y; z); v(x'; y'; z'); w(x''; y''; z'') \in \mathbb{R}^3$ 
  - $u + v = (x + x'; y + y'; z + z') = (x' + x; y' + y; z' + z) = v + u$
  - $u + (v + w) = (x + (x' + x''); y + (y' + y''); z + (z' + z'')) = ((x + x') + x''; (y + y') + y''; (z + z') + z'') = (u + v) + w$
  - Prenons  $0 = (0; 0; 0)$  alors  $u + 0 = (x + 0; y + 0; z + 0) = (x; y; z) = u$
  - Prenons  $-u(-x; -y; -z)$  alors  $u + (-u) = (x - x; y - y; z - z) = (0; 0; 0) = 0$
  - $1.u = (1.x; 1.y; 1.z) = (x; y; z) = u$
  - $\lambda.(\mu.u) = \lambda(\mu x; \mu y; \mu z) = (\lambda\mu x; \lambda\mu y; \lambda\mu z) = \lambda\mu(x; y; z) = (\lambda\mu).u$
  - $\lambda.(u + v) = \lambda(x + x'; y + y'; z + z') = (\lambda(x + x'); \lambda(y + y'); \lambda(z + z')) = (\lambda x + \lambda x'; \lambda y + \lambda y'; \lambda z + \lambda z') = (\lambda x; \lambda y; \lambda z) + (\lambda x'; \lambda y'; \lambda z') = \lambda(x; y; z) + \lambda(x'; y'; z') = \lambda.u + \lambda.v$
  - $(\lambda + \mu).u = ((\lambda + \mu)x; (\lambda + \mu)y; (\lambda + \mu)z) = (\lambda x + \mu x; \lambda y + \mu y; \lambda z + \mu z) = (\lambda x; \lambda y; \lambda z) + (\mu x; \mu y; \mu z) = \lambda.u + \mu.u$
- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0 \text{ et } a'x + b'y + c'z = 0\}$ 
  - $u$  et  $v \in D$  et  $u + v = (x + x'; y + y'; z + z')$   
 $a(x + x') + b(y + y') + c(z + z') = ax + by + cz + ax' + by' + cz' = 0$  car  $u, v \in D$   
 $a'(x + x') + b'(y + y') + c'(z + z') = a'x + b'y + c'z + a'x' + b'y' + c'z' = 0$  car  $u, v \in D$   
donc  $u + v \in D$
  - $u + (v + w)$  a pour coordonnées  $(x + (x' + x''); y + (y' + y''); z + (z' + z''))$   
C'est associatif dans  $\mathbb{R}$  et si les trois vecteurs vérifient les deux équations alors leur somme aussi et dans n'importe quel ordre
  - Le vecteur  $(0; 0; 0)$  appartient à  $D$  et  $u + 0 = u$
  - Le vecteur  $-u(-x; -y; -z)$  est tel que  $u + (-u) = 0$  et les coordonnées vérifient les deux équations
  - $1.u = (1.x; 1.y; 1.z) = (x; y; z) = u$  et si  $u \in D$  alors  $1.u \in D$
  - $\lambda.(\mu.u) = \lambda(\mu x; \mu y; \mu z) = (\lambda\mu x; \lambda\mu y; \lambda\mu z) = \lambda\mu(x; y; z) = (\lambda\mu).u$  et si  $u \in D$  alors  $\lambda.(\mu.u) \in D$  et  $(\lambda\mu).u \in D$
  - $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$  voir 1.7, si  $u \in D, v \in D$  alors  $\lambda.(u + v) \in D$  et  $\lambda.u + \lambda.v \in D$
  - $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$  et si  $u \in D$  alors  $(\lambda + \mu).u \in D$  et  $\lambda.u + \mu.u \in D$

**Exercice 2 :** Montrer que si  $v_1, \dots, v_n$  sont des éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , alors pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , on a  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in E$ .

Par récurrence : Prédicat  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in E$  si  $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$

Initialisation : Pour  $n = 1$ , si  $v_1 \in E$  et si  $\lambda_1 \in K$  alors  $\lambda_1 v_1 \in E$  car  $E$  est un ev

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang  $n$  tel que  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in E$

Au rang  $n+1$  :  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + \lambda_{n+1} v_{n+1}$

Comme  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in E$  par hyp de récurrence et que  $\lambda_{n+1} v_{n+1} \in E$  donc la somme est dans  $E$

Conclusion : la proposition est initialisée pour  $n = 1$ , elle est héréditaire, elle est vraie pour tout  $n \geq 1$

**A faire pour préparer le TD :**

**Exercice 3 :** On note  $\mathbb{R}_+^*$  l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Montrer que les lois suivantes confèrent à  $\mathbb{R}_+^*$  une structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

$$x \oplus y := xy \quad \text{et} \quad \lambda \cdot x := x^\lambda \quad (x, y \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \in \mathbb{R}).$$

1.  $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$  (Commutativité)
2.  $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus yz = xyz = (x \oplus y) \oplus z$  (Associativité)
3.  $1 \in \mathbb{R}_+^*$  et  $1 \oplus x = 1x = x$  (neutre, addition du vecteur "nul")
4. Prenons  $x^{-1} = 1/x$ ,  $1/x \oplus x = 1/x \times x = 1$ ;  $x^{-1}$  existe et appartient à  $\mathbb{R}_+^*$  car  $x \in \mathbb{R}_+^*$  (symétrique)
5.  $1 \cdot x = x^1 = x$  (multiplication par le scalaire 1)
6.  $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\mu \cdot u)^\lambda = (u^\mu)^\lambda = u^{\mu \times \lambda} = u^{\lambda \mu} = (\lambda \mu) \cdot u$  (compatibilité de  $\cdot$  avec  $\times$  du corps  $\mathbb{R}$ )
7.  $\lambda \cdot (x \oplus y) = (x \oplus y)^\lambda = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = \lambda \cdot x \oplus \lambda \cdot y$  (distributivité de  $\cdot$  par rapport à  $\oplus$ )
8.  $(\lambda + \mu) \cdot x = x^{\lambda + \mu} = x^\lambda x^\mu = \lambda \cdot x \oplus \mu \cdot x$  (distributivité de  $\cdot$  par rapport à  $\oplus$ )

**Exercice 4 :** Lesquels, parmi les ensembles suivants, sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ , de  $\mathbb{R}^3$ , de  $\mathbb{R}^\mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{R}[X]$ ? Les décrire géométriquement, lorsque ce sont des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , par exemple par une figure.

Définition du SS-ev :  $0 \in E, x + y \in E$  si  $x \in E$  et  $y \in E, \lambda \in K, \lambda \cdot x \in E$  si  $x \in E$

1.  $A_1 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, 2x + 3y = 0\}$ .

On montre que  $A_1$  est un ss-ev de  $\mathbb{R}^2$ .

- $0 \in E$  : le vecteur  $(0, 0) \in A_1$  car  $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$
- $x + y \in E$  si  $x \in E$  et  $y \in E$

On prend  $u(x, y) \in A_1$  et  $v(x', y') \in A_1$  alors  $u + v$  a pour composantes  $(x + x', y + y')$

On calcule :  $2(x + x') + 3(y + y') = 2x + 2x' + 3y + 3y' = 2x + 3y + 2x' + 3y' = 0 + 0 = 0$   
donc  $u + v \in A_1$

- $\lambda \in K, \lambda \cdot x \in E$  si  $x \in E$

On prend  $u(x, y) \in A_1$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors  $\lambda u$  a pour composantes  $(\lambda x, \lambda y)$

On calcule :  $2(\lambda x) + 3(\lambda y) = \lambda(2x + 3y) = \lambda \times 0 = 0$   
donc  $\lambda u \in A_1$

Conclusion :  $A_1$  est un ss-ev de  $\mathbb{R}^2$ , c'est une droite passant par l'origine, de coefficient directeur  $-\frac{2}{3}$ .

2.  $A_2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, 2x + 3y = 1\}$ .

C'est une droite qui ne passe pas par l'origine.

Ce n'est pas un sev de  $\mathbb{R}^2$  car il ne contient pas l'élément neutre  $(0; 0)$

3.  $A_3 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Ce n'est pas un sev de  $\mathbb{R}^2$  car il n'est pas stable par multiplication par 2 (par exemple).

Contre-exemple :  $(1, 0) \in A_3$  car  $1^2 + 0^2 = 1 \leq 1$  or  $2(1, 0) = (2, 0)$  et  $2^2 + 0^2 = 4 > 1$  donc  $(2, 0) \notin A_3$

$$4. A_4 = \{(a + b, a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

On sait que  $A_4 \subset \mathbb{R}^2$

On montre que  $\mathbb{R}^2 \subset A_4$ , soit  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ , est-ce qu'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $x = a + b$  et  $y = a - b$  ?

Ceci équivaut à  $x + y = 2a$  et  $x - y = 2b$ , il suffit de prendre  $a = \frac{x+y}{2}$  et  $b = \frac{x-y}{2}$

Donc Quels que soient  $x$  et  $y$ , on peut donc trouver  $a$  et  $b$ , donc  $\mathbb{R}^2 \subset A_4$  et  $A_4 = \mathbb{R}^2$ , qui est un sev de  $\mathbb{R}^2$ .

$$5. A_5 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x = 2\}.$$

Ce n'est pas un sev de  $\mathbb{R}^2$  car il ne contient pas l'élément neutre  $(0; 0)$

$$6. A_6 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Il s'agit de  $\mathbb{R}^2$  privé des axes, sauf de l'origine.

Ce n'est **pas un sev** de  $\mathbb{R}^2$  car il n'est pas stable par addition :

$$(-2; -2) \in A_6$$

$$(3; 2) \in A_6$$

$$(-2; -2) + (3; 2) = (1; 0) \notin A_6$$

$$7. A_7 = \{(x, 2x + 5, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Ce n'est pas un sev de  $\mathbb{R}^3$ , car l'origine n'appartient pas à  $A_7$

$$8. A_8 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, xyz = 0\}.$$

$$A_8 = \{(x, y, z) \mid x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } z = 0\}$$

Il s'agit de l'union des trois plans déterminés par les axes de  $\mathbb{R}^3$ .

Ce n'est **pas un sev** de  $\mathbb{R}^3$  car il n'est pas stable par addition :

$$(1, 1, 0) \in A_8$$

$$(0, 0, 1) \in A_8$$

$$(1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1) \notin A_8$$

$$9. A_9 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x + y = y + z = z + x\}.$$

$$A_9 = \{(x, y, z) \mid x = z \text{ et } x = y\} = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

C'est un sev de  $\mathbb{R}^3$ , plus précisément une droite passant par l'origine (intersection de deux plans non parallèles).

$$10. A_{10} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est paire}\}.$$

C'est un sev de  $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  car :

La fonction nulle est paire

la somme de deux fonctions paires est une fonction paire

tout multiple d'une fonction paire est paire.

$$11. A_{11} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}.$$

Idem que pour "paire"

$$12. A_{12} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) + 2\}.$$

Ce n'est pas un sev car il ne contient pas l'élément neutre  $f = 0$ .

$$13. A_{13} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}.$$

Ce n'est pas un sev car il n'est pas stable par passage à l'opposé.

$$14. A_{14} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = 0\}.$$

C'est un sev de  $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  car :

Ensemble non vide : la fonction nulle appartient à  $A_{14}$

Stabilité par addition : la somme de deux telles fonctions est une telle fonction  
l'opposée d'une telle fonction est une telle fonction

Stabilité avec la 2e loi : tout multiple d'une telle fonction est une telle fonction

$$15. A_{15} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 7\}.$$

Ce n'est pas un sev car il ne contient pas l'élément neutre  $P = 0$ .

$$16. A_{16} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 3\}.$$

- Ensemble non vide :  $A_{16}$  contient le polynôme nul,  $P(X) = 0$
- Stabilité par addition : la somme de deux polynômes de deg inférieur à 3 est un polynôme de degré inférieur à 3
- Stabilité pour la 2e loi : le produit d'un polynôme de degré inférieur à 3 par un scalaire  $\lambda$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

C'est un sev de l'ensemble des polynômes  $\mathbb{R}[X]$

$$17. A_{17} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}.$$

- Ensemble non vide :  $A_{17}$  contient le polynôme nul,  $P(X) = 0$ , on a bien que  $P(1) = P(2) = P(3) = 0$
- Stabilité par addition : la somme de deux polynômes  $P$  et  $Q$  tels que  $P(1) = P(2) = P(3) = 0$  et  $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$  est un polynôme tel que  $P + Q(1) = P + Q(2) = P + Q(3) = 0$
- Stabilité pour la 2e loi : le produit d'un polynôme tel que  $P(1) = P(2) = P(3) = 0$  par un scalaire  $\lambda$  est un polynôme  $\lambda P$  tel que  $\lambda P(1) = \lambda P(2) = \lambda P(3) = 0$

C'est un sev de  $\mathbb{R}[X]$

**Exercice 5 :** Soit  $E$  un espace vectoriel, soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
Montrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .  
Dessiner des exemples et des contre-exemples dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Prop Réciproque :**

Si  $F \subset G$  alors  $F \cup G = G$

Comme  $G$  est un ss-ev de  $E$ ,  $F \cup G$  est un ss-ev de  $E$

Idem pour  $G \subset F$

**Prop Directe :** On veut montrer que si  $F \cup G$  est un ev alors  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

Par l'absurde.

On suppose que  $F \cup G$  est un ss-ev de  $E$  et que  $F$  n'est pas inclus dans  $G$  et  $G$  n'est pas inclus dans  $F$ .

Soit  $x \in F \setminus G \subset F \cup G$  et  $y \in G \setminus F \subset F \cup G$ , alors  $x + y \in F \cup G$  car on a supposé que  $F \cup G$  est un ss-ev de  $E$

- soit  $z = x + y \in F$ , comme  $x \in F$  et que  $F$  est un ss-ev de  $E$  alors  $y = z - x \in F$ , contradiction car  $y \in G \setminus F$

- soit  $z = x + y \in G$ , comme  $y \in G$  et que  $G$  est un ss-ev de  $E$  alors  $x = z - y \in G$ , contradiction car  $x \in F \setminus G$

Par conséquent si  $F \cup G$  est un ss-ev de  $E$  alors  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

**Contre-exemples dans  $\mathbb{R}^3$  :**

Prenons l'ensemble  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \text{ et } y = 0\} = \{(0, 0, z)\}$

et  $D' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0 \text{ et } z = 0\} = \{(x, 0, 0)\}$