TD 4 - Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Travail en autonomie :

Exercice 1 :

1. Vérifier les 8 axiomes qui font de $\mathbb{R}^3$ un espace vectoriel.
2. Idem pour une droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine, définie par $\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & 0 \\ a'x+b'y+c'z & = & 0 \end{array}\right.$

1. Soient $u(x; y; z)$; $v(x'; y'; z')$; $w(x"; y"; z") \in \mathbb{R}^3$
   1.1. $u + v = (x + x'; y + y'; z + z') = (x' + x; y' + y; z' + z) = v + u$
   1.2. $u + (v + w) = (x + (x' + x"); y + (y' + y"); z + (z' + z"))$
   $= ((x + x') + x"; (y + y') + y"; (z + z') + z") = (u + v) + w$
   1.3. Prenons $0 = (0; 0; 0)$ alors $u + 0 = (x + 0; y + 0; z + 0) = (x; y; z) = u$
   1.4. Prenons $-u(-x; -y; -z)$ alors $u + (-u) = (x - x; y - y; z - z) = (0; 0; 0) = 0$
   1.5. $1.u = (1.x; 1.y; 1; z) = (x; y; z) = u$
   1.6. $\lambda.(\mu.u) = \lambda(\mu x; \mu y; \mu z) = (\lambda\mu x; \lambda\mu y; \lambda\mu z) = \lambda\mu(x; y; z) = (\lambda\mu).u$
   1.7. $\lambda.(u + v) = \lambda(x + x'; y + y'; z + z') = (\lambda(x + x'); \lambda(y + y'); \lambda(z + z'))$
   $= (\lambda x + \lambda x'; \lambda y + \lambda y'; \lambda z + \lambda z') = (\lambda x; \lambda y; \lambda z) + (\lambda x'; \lambda y'; \lambda z') = \lambda(x; y; z) + \lambda(x'; y'; z')$
   $= \lambda.u + \lambda.v$
   1.8. $(\lambda + \mu).u = ((\lambda + \mu)x; (\lambda + \mu)y; (\lambda + \mu)z) = (\lambda x + \mu x; \lambda y + \mu y; \lambda z + \mu z)$
   $(\lambda x; \lambda y; \lambda z) + (\mu x; \mu y; \mu z) = \lambda.u + \mu.u$

2. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0 \; et \; a'x + b'y + c'z = 0\}$
   2.1. $u \; et \; v \in D$ et $u + v = (x + x'; y + y'; z + z')$
   $a(x + x') + b(y + y') + c(z + z') = ax + by + cz + ax' + by' + cz' = 0$ car $u, v \in D$
   $a'(x + x') + b'(y + y') + c'(z + z') = a'x + b'y + c'z + a'x' + b'y' + c'z' = 0$ car $u, v \in D$
   donc $u + v \in D$
   2.2. $u + (v + w)$ a pour coordonnées $(x + (x' + x"); y + (y' + y"); z + (z' + z"))$
   C'est associatif dans $\mathbb{R}$ et si les trois vecteurs vérifient les deux équations alors leur somme aussi et dans n'importe quel ordre
   2.3. Le vecteur $(0; 0; 0)$ appartient à D et $u + 0 = u$
   2.4. Le vecteur $-u(-x; -y; -z)$ est tel que $u + (-u) = 0$ et les coordonnées vérifient les deux équations
   2.5. $1.u = (1.x; 1.y; 1; z) = (x; y; z) = u$ et si $u \in D$ alors $1.u \in D$
   2.6. $\lambda.(\mu.u) = \lambda(\mu x; \mu y; \mu z) = (\lambda\mu x; \lambda\mu y; \lambda\mu z) = \lambda\mu(x; y; z) = (\lambda\mu).u$ et si $u \in D$ alors $\lambda.(\mu.u) \in D$ et $(\lambda\mu).u \in D$
   2.7. $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$ voir 1.7, si $u \in D$, $v \in D$ alors $\lambda.(u + v) \in D$ et $\lambda.u + \lambda.v \in D$
   2.8. $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$ et si $u \in D$ alors $(\lambda + \mu).u \in D$ et $\lambda.u + \mu.u \in D$

Exercice 2 : Montrer que si $v_1, \ldots, v_n$ sont des éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in E$.

Par récurrence : Prédicat $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \in E$ si $(v_1, ..., v_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n$

Initialisation : Pour $n = 1$, si $v_1 \in E$ et si $\lambda_1 \in K$ alors $\lambda_1 v_1 \in E$ car E est un ev

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang n tel que $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \in E$

Au rang n+1 : $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{n+1} v_{n+1} = (\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) + \lambda_{n+1} v_{n+1}$

Comme $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \in E$ par hyp de récurrence et que $\lambda_{n+1} v_{n+1} \in E$ donc la somme est dans E

Conclusion : la proposition est initialisée pour $n = 1$, elle est héréditaire, elle est vraie pour tout $n \geq 1$

A faire pour préparer le TD :

Exercice 3 : On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Montrer que les lois suivantes confèrent à $\mathbb{R}_+^*$ une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$x \oplus y := xy \quad \text{et} \quad \lambda.x := x^\lambda \quad (x, y \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \in \mathbb{R}).$$

1. $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$ (Commutativité)
2. $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus yz = xyz = (x \oplus y) \oplus z$ (Associativité)
3. $1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $1 \oplus x = 1x = x$ (neutre, addition du vecteur "nul")
4. Prenons $x^{-1} = 1/x$, $1/x \oplus x = 1/x \times x = 1$; x^{-1} existe et appartient à $\mathbb{R}_+^*$ car $x \in \mathbb{R}_+^*$ (symétrique)
5. $1.\, x = x^1 = x$ (multiplication par le scalaire 1)
6. $\lambda.(\mu.u) = (\mu.u)^\lambda = (x^\mu)^\lambda = x^{\mu\times\lambda} = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu).x$ (compatibilité de . avec $\times$ du corps $\mathbb{R}$)
7. $\lambda.(x \oplus y) = (x \oplus y)^\lambda = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = \lambda.x \oplus \lambda.y$ (distributivité de . par rapport à $\oplus$)
8. $(\lambda + \mu).x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu = \lambda.x \oplus \mu.x$ (distributivité de . par rapport à $\oplus$)

Exercice 4 : Lesquels, parmi les ensembles suivants, sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$, de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}[X]$? Les décrire géométriquement, lorsque ce sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, par exemple par une figure.

Définition du SS-ev : $0 \in E$, $x + y \in E$ si $x \in E$ et $y \in E$, $\lambda \in K$, $\lambda.x \in E$ si $x \in E$

1. $A_1 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}, 2x + 3y = 0\}$.

On montre que A_1 est un ss-ev de $\mathbb{R}^2$.

- $0 \in E$: le vecteur $(0,0) \in A_1$ car $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$
- $x + y \in E$ si $x \in E$ et $y \in E$

On prend $u(x,y) \in A_1$ et $v(x',y') \in A_1$ alors $u + v$ a pour composantes $(x + x', y + y')$

On calcule : $2(x + x') + 3(y + y') = 2x + 2x' + 3y + 3y' = 2x + 3y + 2x' + 3y' = 0 + 0 = 0$
donc $u + v \in A_1$

- $\lambda \in K$, $\lambda.x \in E$ si $x \in E$

On prend $u(x,y) \in A_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λu a pour composantes $(\lambda x, \lambda y)$

On calcule : $2(\lambda x) + 3(\lambda y) = \lambda(2x + 3y) = \lambda \times 0 = 0$
donc $\lambda u \in A_1$

Conclusion : A_1 est un ss-ev de $\mathbb{R}^2$, c'est une droite passant par l'origine, de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$.

2. $A_2 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}, 2x + 3y = 1\}$.

C'est une droite qui ne passe pas par l'origine.

Ce n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ car il ne contient pas l'élément neutre (0; 0)

3. $A_3 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ce n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par multiplication par 2 (par exemple).

<u>Contre-exemple :</u> $(1,0) \in A_3$ car $1^2 + 0^2 = 1 \leq 1$ or $2(1,0) = (2,0)$ et $2^2 + 0^2 = 4 > 1$ donc $(2,0) \notin A_3$

4. $A_4 = \{(a+b, a-b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

On sait que $A_4 \subset \mathbb{R}^2$

On montre que $\mathbb{R}^2 \subset A_4$, soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, est-ce qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x = a + b$ et $y = a - b$?

Ceci équivaut à $x + y = 2a$ et $x - y = 2b$, il suffit de prendre $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$

Donc Quels que soient x et y, on peut donc trouver $a$et b, donc $\mathbb{R}^2 \subset A_4$et $A_4 = \mathbb{R}^2$, qui est un sev de $\mathbb{R}^2$.

5. $A_5 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x = 2\}$.

Ce n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$car il ne contient pas l'élément neutre $(0; 0)$

6. $A_6 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

Il s'agit de $\mathbb{R}^2$privé des axes, sauf de l'origine.

Ce n'est **pas un sev** de $\mathbb{R}^2$car il n'est pas stable par addition :

$(-2; -2) \in A_6$

$(3; 2) \in A_6$

$(-2; -2) + (3; 2) = (1; 0) \notin A_6$

7. $A_7 = \{(x, 2x+5, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Ce n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$, car l'origine n'appartient pas à A_7

8. $A_8 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, xyz = 0\}$.

$A_8 = \{(x, y, z)\ tq\ x = 0\ ou\ y = 0\ ou\ z = 0\}$

Il s'agit de l'union des trois plans déterminés par les axes de $\mathbb{R}^3$.

Ce n'est **pas un sev** de $\mathbb{R}^3$car il n'est pas stable par addition :

$(1, 1, 0) \in A_8$

$(0, 0, 1) \in A_8$

$(1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1) \notin A_8$

9. $A_9 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x + y = y + z = z + x\}$.

$A_9 = \{(x, y, z)\ tq\ x = z\ et\ x = y\} = \{(x, x, x)\ avec\ x \in \mathbb{R}\}$

C'est un sev de $\mathbb{R}^3$, plus précisément une droite passant par l'origine
(intersection de deux plans non parallèles).

10. $A_{10} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est paire}\}$.

C'est un sev de $\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ car :

La fonction nulle est paire

la somme de deux fonctions paires est une fonction paire

tout multiple d'une fonction paire est paire.

11. $A_{11} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ f \text{ est impaire}\}$.

Idem que pour "paire"

12. $A_{12} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) + 2\}$.

Ce n'est pas un sev car il ne contient pas l'élément neutre $f = 0$.

13. $A_{13} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$.

Ce n'est pas un sev car il n'est pas stable par passage à l'opposé.

14. $A_{14} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = 0\}$.

C'est un sev de $\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ car :

Ensemble non vide : la fonction nulle appartient à A_{14}

Stabilité par addition : la somme de deux telles fonctions est une telle fonction

l'opposée d'une telle fonction est une telle fonction

Stabilité avec la 2e loi : tout multiple d'une telle fonction est une telle fonction

15. $A_{15} = \{P \in \mathbb{R}[X] |\ deg(P) = 7\}$.

Ce n'est pas un sev car il ne contient pas l'élément neutre $P = 0$.

16. $A_{16} = \{P \in \mathbb{R}[X] |\ deg(P) \leq 3\}$.

- Ensemble non vide : A_{16} contient le polynôme nul, $P(X) = 0$
- Stabilité par addition : la somme de deux polynômes de deg inférieur à 3 est un polynôme de degré inférieur à 3
- Stabilité pour la 2e loi : le produit d'un polynôme de degré inférieur à 3 par un scalaire λ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

C'est un sev de l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$

17. $A_{17} = \{P \in \mathbb{R}[X] |\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$.

- Ensemble non vide : A_{16} contient le polynôme nul, $P(X) = 0$, on a bien que $P(1) = P(2) = P(3) = 0$
- Stabilité par addition : la somme de deux polynômes P et Q tels que $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ et $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$ est un polynôme tel que $P + Q(1) = P + Q(2) = P + Q(3) = 0$
- Stabilité pour la 2e loi : le produit d'un polynôme tel que $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ par un scalaire λ est un polynôme λP tel que $\lambda P(1) = \lambda P(2) = \lambda P(3) = 0$

C'est un sev de $\mathbb{R}[X]$

Exercice 5 : Soit E un espace vectoriel, soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. Dessiner des exemples et des contre-exemples dans $\mathbb{R}^3$.

<u>Prop Réciproque</u> :

Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$

Comme G est un ss-ev de E, $F \cup G$ est un ss-ev de E

Idem pour $G \subset F$

<u>Prop Directe</u> : On veut montrer que si $F \cup G$ est un ev alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Par l'absurde.

On suppose que $F \cup G$ est un ss-ev de E et que F n'est pas inclus dans G et G n'est pas inclus dans F.

Soit $x \in F \backslash G \subset F \cup G$ et $y \in G \backslash F \subset F \cup G$, alors $x + y \in F \cup G$ car on a supposé que $F \cup G$ est un ss-ev de E

- soit $z = x + y \in F$, comme $x \in F$ et que F est un ss-ev de E alors $y = z - x \in F$, contradiction car $y \in G \backslash F$
- soit $z = x + y \in G$, comme $y \in G$ et que G est un ss-ev de E alors $x = z - y \in G$, contradiction car $x \in F \backslash G$

Par conséquent si $F \cup G$ est un ss-ev de E alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

<u>Contre-exemples dans $\mathbb{R}^3$:</u>

Prenons l'ensemble $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \; et \; y = 0\} = \{(0, 0, z)\}$

et $D' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0 \; et \; z = 0\} = \{(x, 0, 0)\}$