

CORRECTION AGREGATION 2003 : PROBLEME

LES PLANETES EXTRA-SOLAIRES

1. Interaction gravitationnelle à deux corps

1.1 Mouvement dans un potentiel central

On applique la Relation fondamentale de la dynamique aux deux points matériels (M_1, m_1) et (M_2, m_2) :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

D'après la loi de l'Action et de la Réaction on a : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

→ En faisant la somme des deux équations précédentes on obtient :

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}) = \vec{0} \Rightarrow \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} = \vec{0}$$

On en déduit que G a un mouvement rectiligne uniforme et donc que le référentiel barycentrique est un référentiel Galiléen.

→ En faisant la différence des deux équations précédentes pour faire apparaître $\vec{r}$ on obtient :

$$\frac{d^2}{dt^2} (\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{m_1} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2 m_1} \right) \Rightarrow \frac{m_2 m_1}{m_2 + m_1} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

Cette dernière équation est identique à la relation fondamentale de la dynamique qui s'exercerait sur une particule fictive située en M telle que $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, de masse

$$\mu = \frac{m_2 m_1}{m_2 + m_1} \text{ et qui serait soumise à la force } \vec{F}_{1 \rightarrow 2}.$$

La connaissance de $\vec{r}(t)$ permet de connaître les mouvements de M_1 et M_2 , effectivement :

$$\begin{cases} \vec{r} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_2 + m_1} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_2 + m_1} \vec{r} \end{cases}$$

$\vec{r}(t)$ donne donc le mouvement de M_1 et M_2 dans le référentiel barycentrique, et puisque ce dernier est galiléen, on connaît le mouvement total.

Les trajectoires de M_1 et M_2 s'obtiennent par homothétie de rapport $-\frac{m_2}{m_2 + m_1}$ et $\frac{m_1}{m_2 + m_1}$ de la trajectoire de la particule fictive définie précédemment.

1.2 Première et deuxième lois de Kepler

Appliquons le théorème du moment cinétique au point matériel M_2 dans le repère

barycentrique : $\frac{d\vec{\sigma}_2}{dt} = \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ avec $\vec{\sigma}_2 = \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2$.

Or on a vu que $\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_2 + m_1} \vec{r}$ donc $\vec{\sigma}_2 = m_2 \left(\frac{m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \vec{r} \wedge \vec{v} = m_2 \left(\frac{m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \vec{C}$ on en

déduit : $m_2 \left(\frac{m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{m_1}{m_2 + m_1} \vec{r} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \frac{d(\mu \vec{C})}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$

Tout se passe comme si on exprimait le théorème du moment cinétique à la particule fictive qui est soumise à $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$.

Or l'énergie potentielle d'interaction est $E_p(r)$ donc les forces $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ sont portées par $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$. Donc $\vec{r} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$ et on en déduit que $\vec{C} = \text{Constante}$

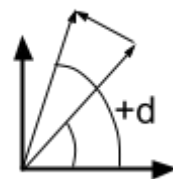
On en déduit que $\vec{r}(t)$ et $\vec{v}(t)$ restent toujours dans un plan perpendiculaire à $\vec{C}$. Le mouvement est donc plan.

On a dans le repère cylindrique tel que $\vec{C} = C\vec{k}$: $\vec{r} = r\vec{u}_r + r\theta\vec{u}_\theta$ d'où $\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v} = r^2\dot{\theta}\vec{k}$, on a donc $C = r^2\dot{\theta}$.

La signification physique de la constante C s'interprète sur le schéma ci-contre :

La surface hachurée correspond à la surface balayée par le rayon vecteur en dt . Elle s'exprime au premier ordre (dt étant aussi petit que l'on veut, on a $d\theta$ aussi petit que l'on veut) : $dS = \frac{1}{2}r^2d\theta$, on en déduit

que : $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}C$



Le fait que C soit une constante, traduit la loi de conservation appelée « Loi des Aires » qui traduit le fait que le rayon vecteur balaye des surfaces égales en des temps égaux.

1.3 Cas particulier du potentiel gravitationnel

On a vu à la question 1.1 que $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$, le potentiel est gravitationnel donc $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$. En utilisant la formule du Binet on obtient l'équation suivante :

$$-\mu \frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \vec{u}_r = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{Gm_1 m_2}{\mu C^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{C^2}$$

En posant $p = \frac{C^2}{G(m_1 + m_2)}$ on obtient $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + A \cos(\theta - \theta_0) \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$

| Si on se limite à des états liés, alors $e < 1$, la trajectoire est une ellipse.

Remarque : La formule de Binet se démontre :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \vec{u}_\theta \quad \text{or } r^2 \dot{\theta} = \text{Constante}$$

$$\text{donc } \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \vec{u}_r$$

$$\text{Or } \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\text{et donc } \ddot{r} = \frac{d}{dt} \left(-C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(-C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\text{D'autre part, } r\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^3} \quad \vec{a} = \frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \vec{u}_r$$

$$\text{D'après la loi des Aires on a (cf question 1.2) : } \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C \Rightarrow S = \frac{1}{2} CP$$

Or l'aire d'une ellipse vérifie $S = \pi ab$ et avec $p = b^2/a$ on obtient $b = \sqrt{pa}$ et $S = \pi \sqrt{pa}^{\frac{3}{2}}$ d'où :

$$S = \pi \sqrt{pa}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} CP \Rightarrow \pi^2 pa^3 = \frac{1}{4} C^2 P^2, \text{ on en déduit } \frac{a^3}{P^2} = \frac{C^2}{4\pi^2 p} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

1.4 Cas des orbites circulaires

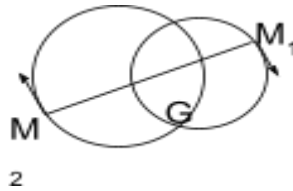
$$\text{Dans le cas d'une orbite circulaire on a } e=0, \text{ donc } r=r_0=p \Rightarrow r_0 = \frac{C^2}{G(m_1 + m_2)}$$

$$\text{On a aussi } v_0 = \frac{2\pi r_0}{P}, \quad P = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_0^3}{G(m_1 + m_2)}} \text{ et } C = r_0 v_0. \text{ On en déduit :}$$

$$r_0 = \left(\frac{G(m_1 + m_2) P^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad v_0 = \left(\frac{2\pi G(m_1 + m_2)}{P} \right)^{\frac{1}{3}}$$

r_0 et v_0 correspondent aux caractéristiques du mouvement de la particule fictive. Pour obtenir les caractéristiques des mouvements de M_1 et M_2 on utilise les résultats de la question 1.1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{m_2}{m_2 + m_1} \left(\frac{G(m_1 + m_2)P^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ r_2 = \frac{m_1}{m_2 + m_1} \left(\frac{G(m_1 + m_2)P^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{m_2}{m_2 + m_1} \left(\frac{2\pi G(m_1 + m_2)}{P} \right)^{\frac{1}{3}} \\ v_2 = \frac{m_1}{m_2 + m_1} \left(\frac{2\pi G(m_1 + m_2)}{P} \right)^{\frac{1}{3}} \end{array} \right.$$



1.5 Applications numériques

Couple Soleil-Terre :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{\text{terre}} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} \\ r_{\text{soleil}} = 4,5 \cdot 10^5 \text{ m} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{\text{terre}} = 3,0 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1} \\ v_{\text{soleil}} = 9,0 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1} \end{array} \right.$$

Couple Soleil-Jupiter :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{\text{jupiter}} = 7,9 \cdot 10^{11} \text{ m} \\ r_{\text{soleil}} = 7,9 \cdot 10^8 \text{ m} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{\text{jupiter}} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1} \\ v_{\text{soleil}} = 13 \text{ m.s}^{-1} \end{array} \right.$$

2. Détection des planètes extra-solaires par observation directe

2.1 Définition et valeur du parsec

$$\tan \theta = \frac{a}{d} \quad \text{On peut supposer que } \theta \text{ est très faible, on a donc } \tan \theta \approx \theta \text{ d'où : } \theta = \frac{a}{d}$$

On en déduit $d = a/\theta$ et la valeur du parsec : $1 \text{ pc} = 3,1 \cdot 10^{16} \text{ m} = 2,06 \cdot 10^5 \text{ u.a}$

2.2 Séparation angulaire entre l'étoile et sa planète

On applique les résultats de la question précédente $\theta = \frac{a}{D}$. En ce qui concerne les applications numériques, on peut écrire

$$\theta(\text{seconde d'arc}) = \frac{a(\text{unité astronomique})}{D(\text{parsec})} \quad \text{d'où :}$$

$$\theta(\text{Soleil - Terre}) = 0,1''$$

$$\theta(\text{Soleil - Jupiter}) = 0,5''$$

2.3 Puissance rayonnée par l'étoile

D'après la loi du rayonnement du corps noir on a : $L^* = 4\pi R^{*2} \sigma T^{*4}$

2.4 Puissance interceptée par la planète

La puissance est uniformément répartie sur une sphère de rayon R, la puissance reçue par la planète correspond au rapport des angles solides, celui sous lequel on voit la planète de l'étoile sur l'angle solide correspondant à l'ensemble de l'espace dans lequel rayonne l'étoile.

$$L = L^* \frac{\pi R^2}{4\pi a^2} \Rightarrow L = \pi \sigma R^{*2} T^{*4} \frac{R^2}{a^2}$$

$$\frac{L}{L^*} = \frac{R^2}{4a^2} \quad \text{d'où : } \frac{L}{L^*}(\text{Jupiter}) = 2,2 \cdot 10^{-9} \quad \text{et} \quad \frac{L}{L^*}(\text{Terre}) = 5,4 \cdot 10^{-10}$$

2.5 Température d'équilibre de la planète

On écrit l'équilibre thermique sur la planète : $(1 - A)L = 4\pi R^2 \sigma T^4$

$$\Rightarrow (1 - A)\pi \sigma R^{*2} T^{*4} \frac{R^2}{a^2} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad \text{d'où} \quad T = \left((1 - A) \frac{R^{*2}}{4a^2} \right)^{\frac{1}{4}} T^*$$

Application numérique :

$$T(\text{Jupiter}) = 119 \text{ K} \quad \text{et} \quad T(\text{Terre}) = 265 \text{ K}$$

Remarque : la température trouvée pour la terre est assez inférieure à la température réelle car on n'a pas tenu compte de la présence de l'atmosphère, qui par effet de serre a tendance à réchauffer la surface.

2.6 Maximum d'émission de la planète

On sait que la loi d'émission du corps noir est telle que le spectre émis a un spectre d'émission dont le maximum correspond à une longueur d'onde qui vérifie : $\lambda T = C^{\text{te}}$.

Grâce aux données sur le soleil on peut en déduire la constante : $C^{\text{te}} = \lambda^* T^* = 3000 \mu\text{m} \cdot \text{K}^{-1}$.

On en déduit les longueurs d'onde des maxima d'émission des planètes :

$$\lambda(\text{Jupiter}) = 25,2 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad \lambda(\text{Terre}) = 11,3 \mu\text{m}$$

Les planètes rayonnent donc dans l'infrarouge.

2.7 Limitations observationnelles

La résolution spatiale d'un instrument d'optique correspond à la distance minimale entre deux objets ponctuels que l'instrument d'optique peut « résoudre » (c'est à dire dont il forme deux images que l'on peut distinguer l'une de l'autre).

La tache de diffraction d'une pupille circulaire (tache d'Airy) a un diamètre angulaire :

$$\beta = 2 \times 1,22 \frac{\lambda}{b}$$

Les montures des miroirs du télescope constituent des pupilles diffractantes, ce sont elles qui limitent la résolution de l'instrument d'optique (surtout si les miroirs sont paraboliques car le stigmatisme est parfait ; néanmoins les turbulences dans l'atmosphère limitent aussi le pouvoir de résolution...)

La résolution intrinsèque spatiale angulaire du télescope est donc β .

On a $\beta_{0,5\mu\text{m}} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 8,7 \cdot 10^{-6} \text{ degré} = 0,031 \text{ secondes d'arc}$
 $\beta_{20\mu\text{m}} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ degré} = 1,2 \text{ secondes d'arc}$

On a calculé à la question 2.2 l'ouverture angulaire θ sous laquelle un observateur situé à 10 parsecs voit le système étoile-planète : $\theta(\text{Soleil} - \text{Terre}) = 0,1''$ $\theta(\text{Soleil} - \text{Jupiter}) = 0,5''$

Pour que le télescope sépare l'étoile de la planète il faut que $\theta > \beta$, on en déduit que, le télescope sépare l'étoile de sa planète dans le visible mais pas dans l'infrarouge. (Hélas les planètes rayonnent dans l'infrarouge cf question 2.6, mais heureusement elle réfléchissent dans le visible).

On a calculé, à la question 2.4, le rapport des intensités lumineuses émises par la planète et par l'étoile. L'ordre de grandeur est de 10^{-9} , or les détecteurs ne distinguent pas des objets dont le rapport des intensités est inférieur à 10^{-4} . On est donc loin de la limite opérationnelle (d'un facteur 10^5). On ne peut donc pas distinguer l'étoile de la planète, car cette dernière n'émet pas suffisamment de lumière comparé à son étoile.

La dynamique observationnelle des détecteurs actuellement utilisés ne permet pas de distinguer les planètes de leur étoile.

Quand on travaille dans l'infrarouge la résolution spatiale diminue d'un facteur 40, mais on peut espérer que la limite due à la dynamique du détecteur sera beaucoup plus facilement accessible : effectivement, dans l'infrarouge, l'étoile rayonne moins et la planète plus...

3. Détection indirecte des planètes via le déplacement de l'étoile

3.1 Orbite de l'étoile

$$a = \frac{m^*}{m^* + m} \left(\frac{G(m^* + m)P^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \left(\frac{Gm^*P^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

D'après la question 1.4 on a :

$$\frac{a}{a^*} = \frac{m^*}{m}$$

D'autre part :

3.2 Caractéristiques de la planète déduites par cette méthode

Le suivi au cours du temps de la position de l'étoile sur le ciel permet de déterminer la période de révolution de l'étoile sur son orbite P , ainsi que le rayon de cette orbite a^* .

D'après la question 3.1, quand on connaît P on en déduit a ; une fois a déterminé et connaissant a^* et m^* , on en déduit m .

Si l'orbite est circulaire, l'orientation de l'orbite par rapport à l'observateur la fait apparaître comme une orbite elliptique plus ou moins aplatie dans le plan perpendiculaire à la direction d'observation dont le grand axe vaut $2a^*$.

3.3 Planètes privilégiées par cette méthode

En supposant m^* connue, les incertitudes proviennent de la mesure de P et a^* on a :

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2}{3} \frac{\Delta P}{P} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta a^*}{a^*} + \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a^*}{a^*} + \frac{2}{3} \frac{\Delta P}{P}$$

Si on suppose Δa^* et ΔP indépendant de la planète, la précision des mesures est d'autant meilleure que a^* et P sont grands, donc que m et a sont grand.

Il est plus facile de détecter des planètes massives éloignées de leur étoile : Des planètes de type Jupiter.

3.4 Limitations observationnelles

Pour détecter une planète par la méthode ci-dessus, il faut observer le mouvement de l'étoile pendant une durée au moins égale à la période de révolution de la planète autour de l'étoile (plutôt plusieurs période si l'on veut une précision plus grande).

Pour détecter une planète de type Terre, il faut une observation d'au moins un an, pour une planète de type Jupiter, il en faut au moins douze.

On en déduit que pour détecter des planètes très distantes de leur étoile, il faut des temps d'observation extrêmement longs, ce qui limite l'intérêt de cette méthode.

On a $\theta^* (\text{sec onde d'arc}) = \frac{a^* (\text{unité astronomique})}{D (\text{par sec})}$ et $a^* = \frac{m}{m^*} a$ donc :

$$\theta^* (\text{Soleil/Terre}) = 3 \cdot 10^{-7}'' \quad \theta^* (\text{Soleil/Jupiter}) = 5 \cdot 10^{-4}''$$

Ces ouvertures angulaires sont bien en dessous de la limite de résolution d'un télescope de 8m de diamètre !

Si $\theta^* = 50 \cdot 10^{-6}''$ et $a = 5 \text{ u.a.} \Rightarrow D = \frac{m}{m^*} \frac{a}{\theta^*} \Rightarrow D = 100 \text{ pc} = 300 \text{ années lumière}$

Pour des planètes type Terre, on a $a^* = 3 \cdot 10^{-6} \text{ u.a.}$, donc sion atteint une résolution de $\theta^* = 10^{-6}''$, on aura pourra observer des planètes de type Terre jusqu'à : $D = 3 \text{ pc} = 9 \text{ années lumière}$

La première étoile est à quelques années lumière de la terre, donc peut détecter des planètes extra-solaires par cette méthode.

4. Détection indirecte des planètes via la vitesse de l'étoile

4.1 Vitesse orbitale de l'étoile

Toujours d'après les résultats du 1.4 appliqués avec $m^* \gg m$ on obtient :

$$V = \left(\frac{2\pi G m^*}{P} \right)^{\frac{1}{3}}$$

On en déduit aussi : $\frac{V}{V^*} = \frac{m^*}{m}$

Application numérique : $V^*(\text{Soleil/Jupiter}) = 13 \text{ m.s}^{-1}$ $V^*(\text{Soleil/Terre}) = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$

4.2 Vitesse longitudinale de l'étoile

4.2.1 On a $U(t)$ est la projection de $\vec{V}^*$ sur la direction étoile-observateur (qui puisque que l'observateur est très loin reste la même quelle que soit la position de l'étoile).

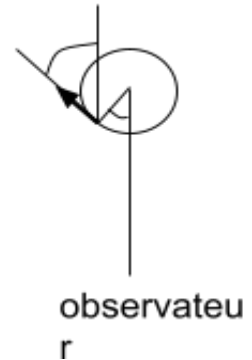
D'après le schéma ci-contre on a donc $U(t) = V^* \cos(\pi/2 - \theta)$ or $\theta = \frac{2\pi}{P}t + \theta_0$, on peut choisir une origine des temps qui permette d'annuler θ_0 .

$$U(t) = V^* \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right)$$

On obtient donc :

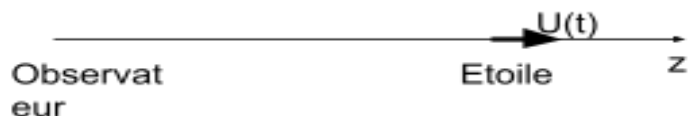
4.2.2 Si le système est vu sous une inclinaison i , on projette d'abord dans le plan de la question précédente pour pouvoir réutiliser les résultats. On en déduit, puisque l'angle entre le plan de l'orbite et le plan de la question précédente est $\pi/2 - i$:

$$U(t) = V^* \sin(i) \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right)$$



4.3 Effet Doppler longitudinal

Soit (Oz) l'axe de l'observateur vers l'étoile.



Si l'étoile est en z à l'instant t , elle est en $z + UT$ en $t + T$ (en supposant P suffisamment petit devant le temps de variation de $U(t)$, ce qui est toujours vérifié puisque T est la période d'une onde lumineuse et donc $T \approx 10^{-14} \text{ s}$! ! !).

Le signal émis en z en t arrive en O à l'instant $t + z/c$. Le signal émis en $z + dz$ en $t + T$ arrive en O à l'instant $t + T + (z + UT)/c$.

On en déduit la période vue par l'observateur : $T' = (t + T + (z + UT)/c) - (t + z/c)$ d'où :

$$T' = T \left(1 + \frac{U}{c}\right) \Leftrightarrow v' = \frac{v}{1 + \frac{U}{c}} \Leftrightarrow v' \approx v \left(1 - \frac{U}{c}\right)$$

$$\Delta v = v' - v = -v \frac{U}{c}$$

La fréquence apparente est plus faible que la fréquence émise si l'étoile s'éloigne de l'observateur (la longueur d'onde est plus grande, il y a décalage vers le rouge, on parle de redshift...)

4.4 Caractéristiques de la planète déduites par cette méthode

Les variations de $\Delta v(t)$ sont sinusoïdales de période P , la mesure des variations du décalage Doppler dans le temps permet donc de déterminer P . Connaissant m^* , la connaissance de P , permet de déterminer a (cf. question 3.1).

D'autre part, d'après la question 4.1, on a
$$V^* = \frac{m}{m^*} \left(\frac{2\pi G m^*}{P} \right)^{\frac{1}{3}}$$
, or l'amplitude des variations de $\Delta v(t)$ est égale à :
$$\Delta v_{\max} = v \frac{V^* \sin(i)}{c}$$
, $\sin(i)$ étant toujours inférieur à 1, on a donc
$$\frac{m}{m^*} \left(\frac{2\pi G m^*}{P} \right)^{\frac{1}{3}} > c \frac{\Delta v_{\max}}{v}$$
 d'où :

$$m > m^* c \frac{\Delta v_{\max}}{v} \left(\frac{P}{2\pi G m^*} \right)^{\frac{1}{3}} = m_{\min}$$

Si l'orientation i de l'orbite par rapport à l'observateur est égale à 0, le mouvement de l'étoile se fait dans un plan perpendiculaire à la direction d'observation, la vitesse longitudinale est donc constamment nulle, il n'y a donc pas de variations du décalage Doppler, la méthode de mesure présentée dans cette partie n'est donc pas applicable.

4.5 Planètes privilégiées par cette méthode

On a
$$a = \left(\frac{G m^* P^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$
 et
$$V^* = \frac{m}{m^*} \left(\frac{2\pi G m^*}{P} \right)^{\frac{1}{3}}$$
 donc :
$$V^* = \frac{m}{m^*} \sqrt{\frac{G m^*}{a}}$$

On en déduit
$$\frac{\Delta v_{\max}}{v} = \frac{V^* \sin(i)}{c} = \frac{m}{m^*} \sqrt{\frac{G m^*}{a}} \frac{\sin(i)}{c} = \frac{m \sin(i)}{c} \sqrt{\frac{G}{a m^*}}$$

Or plus $\Delta v_{\max}$ est grand plus la détection est facile. On en déduit que les planètes les plus aisées à détecter sont telles que : - m est grand, - a est petit, - i proche de $\pi/2$.

On détecte donc de grosses planètes, près de l'étoile, c'est le cas de la première exoplanète découverte.

5. Limitations des détections par mesure de l'effet Doppler du spectre stellaire

5.1 Résolution du spectrographe

5.1.1 Par définition le pouvoir de résolution d'un spectrographe est
$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$
.

On a donc
$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R}$$
 ce qui donne $\Delta\lambda = 10^{-11} \text{ m} = 10^{-5} \mu\text{m}$.

On a
$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{U}{c} \quad v = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta v = -\frac{c \Delta\lambda}{\lambda^2} = -v \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{U}{c} \quad \text{d'où :}$$

$$U_{\min} = \frac{c}{R} \quad \text{A.N. : } U_{\min} = 6 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

5.1.2 On suppose que les mesures sur chaque raies suivent une loi de probabilité quelconque. Soit U_i les mesures de vitesses.

On pose $S_N = \sum_{i=1}^N U_i$. S_N est une gaussienne (théorème de la limite centrale) et si on appelle ΔS_N et σ les écarts types respectifs des variables S_N et U_i alors on a $\Delta S_N = \sqrt{N}\sigma$.

On en déduit que $|S_N - \bar{S}| \leq \Delta S_N = \sqrt{N}\sigma \Rightarrow \left| \frac{S_N}{N} - \frac{\bar{S}}{N} \right| = \left| \frac{S_N}{N} - \bar{U} \right| \leq \frac{\sqrt{N}\sigma}{N} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

On voit donc qu'on a divisé l'incertitude sur la mesure de la vitesse par $\sqrt{N}$.

Donc pour pouvoir mesurer une vitesse de 10 m.s^{-1} il faut faire des mesures sur N raies, telles

$$\text{que : } \frac{6 \cdot 10^3}{\sqrt{N}} = 10 \Rightarrow N = 360\,000 !!!$$

Ce résultat paraît un peu extravagant, l'énoncé parle de « méthode de corrélation croisée », cela doit être une technique statistique plus efficace !

5.2 Limitation intrinsèque à l'étoile

$$5.2.1 \text{ On a } r = R^* + \delta R^* \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \text{ donc } V_r = -\frac{2\pi\delta R^*}{\tau} \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$$

5.2.2 V_r étant la vitesse de la surface de l'étoile, elle correspond toujours à une vitesse longitudinale par rapport à l'observateur, et elle induit un décalage Doppler supplémentaire.

$$\left(\frac{\Delta v}{v}\right)_{\text{supplémentaire}} = \frac{2\pi\delta R^*}{\tau c}$$

L'amplitude de ce décalage Doppler supplémentaire est :

Pour que ce décalage supplémentaire ne se confonde pas avec l'effet perturbateur d'une planète il faut que son amplitude soit négligeable devant la vitesse longitudinale de

l'étoile sur son orbite. Cela donne $\frac{2\pi\delta R^*}{\tau} = 16 \text{ m.s}^{-1}$ (pour une étoile de type soleil). Cette vitesse doit être négligeable devant la vitesse longitudinale de l'étoile. Ce n'est pas toujours le cas.

5.2.3 On a T^* qui reste constante donc $L^* = 4\pi(R^* + \delta R^*)^2 \sigma T^{*4}$. On peut donc vérifier que l'on a à faire à une étoile pulsante en étudiant la puissance rayonnée :

$$L^* = 4\pi R^{*2} \left(1 + \frac{\delta R^*}{R^*}\right)^2 \sigma T^{*4} \Rightarrow \frac{\delta L^*}{L^*} = 2 \frac{\delta R^*}{R^*} = 2\%$$

Une variation de 2% de la luminosité de l'étoile est mesurable (cf dynamique observationnelle question 2.7). On peut donc déterminer si l'étoile est pulsante ou pas.

6. Transit de la planète devant son étoile

6.1 Condition de transit

Si on travaille dans le plan perpendiculaire à la direction étoile-observateur, l'étoile apparaît comme un disque de rayon R^* .

Dans le même plan, la projection de l'orbite de la planète est une ellipse de grand axe a et de petit axe $a \cos(i)$.

On dit qu'il y a transit quand la planète passe intégralement devant l'étoile il faut donc que :

$$a \cos(i) + R < R^* \Leftrightarrow a \cos(i) < R^* - R$$

6.2 Probabilité de transit

La probabilité P_0 pour que i soit inférieur à i_0 donné, est égale au rapport de l'angle solide qui correspond à un cône d'angle au sommet i_0 , sur l'angle solide correspondant à l'ensemble des orientations possible de l'orbite, c'est à dire puisque $i < \pi/2$ à l'angle solide

$$P_0 = \frac{2\pi(1 - \cos(i_0))}{2\pi} \Rightarrow P_0 = 1 - \cos(i_0)$$

correspondant à un demi-espace :

Il y a transit si $i \geq \arccos\left(\frac{R^* - R}{a}\right) = i_0$ on en déduit que $P_{\text{transit}} = 1 - P_0$

$$P_{\text{transit}} = 1 - \left(1 - \cos\left(\arccos\left(\frac{R^* - R}{a}\right)\right)\right) = \cos\left(\arccos\left(\frac{R^* - R}{a}\right)\right) \Rightarrow P_{\text{transit}} = \frac{R^* - R}{a}$$

d'où pour les valeurs proposées : $P_{\text{transit}} = 8,4 \cdot 10^{-2} = 8,4\%$

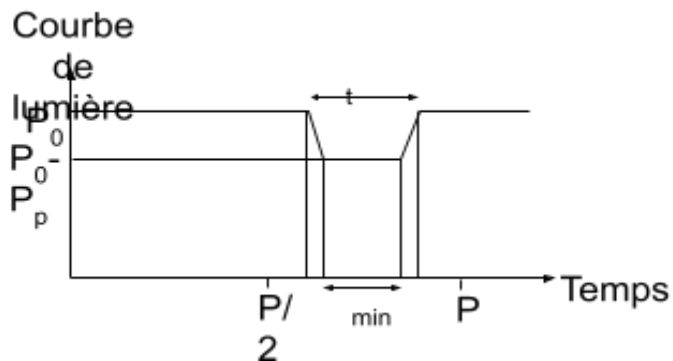
6.3 Courbe de lumière de l'étoile lors d'un transit de la planète

Il y a trois cas pour la puissance émise par l'étoile et reçue par l'observateur :

- La planète n'est pas entre l'observateur et l'étoile, la puissance reçue vaut P_0 .
- La planète est entièrement devant l'étoile, la puissance reçue vaut $P_0 - P_p$.
- Quand la planète est en train de pénétrer dans le cône sous lequel l'observateur voit l'étoile, la puissance décroît de P_0 à $P_0 - P_p$.

D'où la courbe ci-contre :

Où τ_t est le temps de transit de la planète devant l'étoile (les échelles n'étant pas respectées puisque $\tau_t \ll P$).



La fraction maximale de puissance interceptée par la planète lors de son transit correspond à la situation où la planète est entièrement dans le cône sous lequel l'observateur voit l'étoile.

On a $D \gg a$ donc on peut supposer au premier ordre que l'ombre de la planète sur l'étoile correspond à la section droite de la planète (πR^2). Si on suppose d'autre part que la puissance émise par unité de surface de la section droite de l'étoile dans la direction de l'observateur est une constante. On obtient en faisant une règle de trois sur les surfaces (ou les angles solides) :

$$\frac{L_{\text{occulté}}}{L_{\text{reçue}}} = \frac{\pi R^2}{\pi R^{*2}} = \frac{R^2}{R^{*2}}$$

Pour déterminer le temps total de transit on utilise la loi des Aires :
le transit commence quand le bord de la planète pénètre dans le cône d'angle θ . Le centre de gravité de la planète est en $\theta' = (R^* + R)/a$

Le temps de transit correspond au temps que le centre de gravité de la planète met pour parcourir la distance $2a\theta'$ sur son orbite. C'est à dire que le rayon vecteur a balayé une surface $\theta'^2 a^2$. En appliquant la loi des Aires on obtient :

$$\begin{cases} \theta'^2 a^2 \leftrightarrow \tau_t \\ \pi a^2 \leftrightarrow P \end{cases} \Leftrightarrow \tau_t = P \frac{\theta'}{\pi}$$

Or θ' est défini par $\sin \theta' = (R^* + R)/a$ et si on suppose que $R^* + R \ll a$ alors $\theta' \approx (R^* + R)/a$. On en déduit :

$$\tau_t = P \frac{R^* + R}{\pi a}$$

La durée du minimum de la courbe de lumière correspond à la durée où l'étoile est entièrement dans le cône, donc quand le centre de gravité de la planète est dans le cône défini par $\theta'' = (R^* - R)/a$, donc :

$$\tau_{\min} = P \frac{R^* - R}{\pi a}$$

Les mesures des caractéristiques du transit permettent de déterminer le rayon de l'étoile.

7. Propriétés des planètes détectées

7.1 Un «Jupiter chaud» typique : la planète de l'étoile HD209458

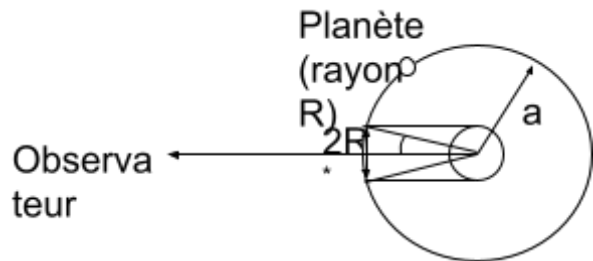
7.1.1 La courbe donnant la vitesse longitudinale en fonction du temps à l'allure d'une sinusoïde comme le prévoyait l'étude théorique (cf. question 4.2.1). On en déduit la période :

$$P = 3,5 \text{ jours}$$

La valeur moyenne de la sinusoïde correspond à la vitesse moyenne d'éloignement de l'étoile par rapport à l'observateur (l'univers est en expansion).

L'amplitude de la sinusoïde donne la vitesse longitudinale maximale de l'étoile due à son orbite :

$$U_{\max} = 0,08 \text{ km.s}^{-1} = 80 \text{ m.s}^{-1}$$



7.1.2 On a d'après les questions 4.4 et 4.5 les résultats suivants : $a = \left(\frac{Gm^*P^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ et

$$m_{\min} = m^* c \frac{\Delta v_{\max}}{v} \left(\frac{P}{2\pi Gm^*} \right)^{\frac{1}{3}} = c \frac{U_{\max}}{c} \left(\frac{Pm^{*2}}{2\pi G} \right)^{\frac{1}{3}} = U_{\max} \left(\frac{Pm^{*2}}{2\pi G} \right)^{\frac{1}{3}}$$

On en déduit : $a = 6,99 \cdot 10^9 \text{ m}$ et $m_{\min} = 1,21 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Les incertitudes sont sur m^* , $U_{\max}$ et P , on a donc :

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{3} \frac{\Delta m^*}{m^*} + \frac{2}{3} \frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{3} \frac{0,1}{1,1} + \frac{2}{3} 0,0001 = 3 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{\Delta m_{\min}}{m_{\min}} = \frac{\Delta U_{\max}}{U_{\max}} + \frac{2}{3} \frac{\Delta m^*}{m^*} + \frac{1}{3} \frac{\Delta P}{P} = 0,02 + \frac{2}{3} \frac{0,1}{1,1} + \frac{1}{3} 0,0001 = 8 \cdot 10^{-2}$$

On obtient les résultats suivants :

$$a = (7,0 \pm 0,2) \cdot 10^9 \text{ m} \quad m_{\min} = (1,2 \pm 0,1) \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

7.1.3 On peut déduire R de deux façons (on calculera les incertitudes dans les deux cas pour vérifier que les résultats sont compatibles) :

- A partir de la formule $\frac{L_{\text{occulté}}}{L_{\text{reçue}}} = \frac{R^2}{R^{*2}} \Rightarrow R = R^* \sqrt{\frac{L_{\text{occulté}}}{L_{\text{reçue}}}}$ d'où :

$$R = 1,2 \times 7 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{1-0,985}{1}} = 1,03 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Avec l'incertitude $\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R^*}{R^*} + \frac{1}{2} \frac{\Delta L_{\text{occulté}}}{L_{\text{occulté}}} + \frac{1}{2} \frac{\Delta L_{\text{reçue}}}{L_{\text{reçue}}} = \frac{0,1}{1,2} + \frac{1}{2} \frac{2 \times 0,003}{0,015} + \frac{1}{2} \frac{0,003}{1} = 0,28$

Et donc $R = (1,0 \pm 0,3) \cdot 10^8 \text{ m}$

- A partir de $\tau_t = P \frac{R^* + R}{\pi a}$ et $\tau_{\min} = P \frac{R^* - R}{\pi a} \Rightarrow \tau_t - \tau_{\min} = P \frac{2R}{\pi a} \Rightarrow R = \pi a \frac{\tau_t - \tau_{\min}}{2P}$

$$R = \pi \times 7 \cdot 10^9 \frac{10,8 \cdot 10^3 - 7,7 \cdot 10^3}{2 \times 3 \cdot 10^5} = 1,13 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Avec l'incertitude $\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta P}{P} + \frac{2\Delta\tau}{\tau_t - \tau_{\min}} = 3 \cdot 10^{-2} + 0,0001 + \frac{2 \times 250}{3300} = 0,18$

Et donc $R = (1,1 \pm 0,2) \cdot 10^8 \text{ m}$

Les deux méthodes donnent des résultats compatibles on pourra retenir l'ordre de grandeur $R \approx 10^8 \text{ m}$

$$7.1.4 \quad \rho_{\min} = \frac{m_{\min}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \rho_{\min} = 286 \text{ kg.m}^{-3} \quad \text{avec}$$

$$\frac{\Delta \rho_{\min}}{\rho_{\min}} = \frac{\Delta m_{\min}}{m_{\min}} + 3 \frac{\Delta R}{R} = 8 \cdot 10^{-2} + 0,25 \approx 0,3$$

D'où : $\rho_{\min} = 290 \pm 80 \text{ kg.m}^{-3}$ (On rappelle que $\rho_{\text{Jupiter}} = 1300 \text{ kg.m}^{-3}$)

L'étoile est donc plutôt de nature gazeuse.

$$T = \left((1-A) \frac{R^{*2}}{4a^2} \right)^{\frac{1}{4}} T^*$$

7.1.5 D'après les questions 2.4 et 2.5 on a

Application numérique : $T = 1351 \text{ K}$

$$\text{Avec l'incertitude} \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta a}{a} + \frac{1}{2} \frac{\Delta R^*}{R^*} + \frac{\Delta T^*}{T^*} = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^{-2} + \frac{1}{2} \frac{0,1}{1,2} + \frac{140}{6030} = 0,08$$

Et donc $T = 1350 \pm 110 \text{ K}$

7.1.6 On appelle ce genre de planète des Jupiter chaud car elles ont une masse proche de celle de Jupiter mais une température beaucoup plus élevée.

7.2 Etude statistique des propriétés des 50 premières planètes détectées

7.2.1 On lit : $P \in [P_{\min} = 3,2 \text{ jours} ; P_{\max} = 2500 \text{ jours} \approx 7 \text{ ans}]$

et $V \in [V_{\min} = 10 \text{ m.s}^{-1} ; V_{\max} = 560 \text{ m.s}^{-1}]$

Les limites observationnelles empêchent d'avoir des points dans les zones de faibles vitesses ($V < 10 \text{ m.s}^{-1}$, la résolution spectrale n'est plus suffisante pour mesurer le décalage doppler), et de grande période ($P \gg 7 \text{ ans}$, car la durée d'acquisition est très longue, on devrait pouvoir repousser cette limite avec le temps sans que la technique de mesure n'évolue, mais il faut encore patienter...).

$$a = \left(\frac{Gm^*P^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

7.2.2 D'après la question 3.1 d'où $\text{Log}(a) = \frac{2}{3} \text{Log}(P) + C^{\text{te}}$, on a bien une relation linéaire entre $\text{Log}(a)$ et $\text{Log}(P)$; la pente expérimentale est de $0,65 \approx \frac{2}{3}$. Or la constante de la loi ci-dessus dépend de m^* . On en déduit que toutes les étoiles dont on a découvert des planètes ont des masses très proches.

$$7.2.3 \text{ On a } m_{\min} = U \left(\frac{Pm^{*2}}{2\pi G} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad a = \left(\frac{Gm^*P^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$m_{\min} = U \left(\frac{am^*}{G} \right)^{\frac{1}{2}} = C\sqrt{a}$$

Si $U = C^{\text{te}}$ alors $\Rightarrow \text{Log}(a) = 2\text{Log}(m_{\min}) + C^{\text{te}}$, où la constante est une fonction décroissante de U .

Si $P = C^{te}$ alors $a = C^{te} \Rightarrow \text{Log}(a) = C^{te}$, où la constante est une fonction croissante de P .

Les zones correspondant aux limitations observationnelles sont donc : U faibles correspond à une zone en haut à gauche du graphique, au-dessus d'une droite de pente 2 et d'ordonnée à l'origine C^{te} ($U_{\min} = 10 \text{ m.s}^{-1}$).

P grand correspond au haut du graphique, au-dessus d'une droite horizontale correspondant à $a(P_{\max} = 7a_n)$.

7.2.4 Si l'on admet que la cohésion d'une planète est uniquement due aux forces gravitationnelles, en dessous d'une certaine valeur $a_{\min}$ du rayon de son orbite autour de l'étoile, le terme de marée conduit à la désintégration de la planète : C'est ce qu'on appelle la limite de Roche.

La limite de Roche correspond à la désintégration de la planète, montrons que cela correspond au cas où la force gravitationnelle de cohésion est inférieure au terme de marée :

On appelle M_p la masse de la planète et R son rayon et M_e la masse de l'étoile. a est le rayon de l'orbite de la planète.

Soit une masse δm posée à la surface de la planète sur l'axe étoile-planète (δm est à la position la plus éloignée de l'étoile possible, on verra si ce cas est le plus défavorable). Cette

masse subit la force de gravitation de la planète égale à $-G \frac{\delta m M_p}{R^2}$ et la force de gravitation

de l'étoile qui est égale à $-G \frac{\delta m M_e}{(a+R)^2}$.

Appliquons la Relation Fondamentale de la Dynamique à la masse δm :

$$\delta m A = -G \frac{\delta m M_e}{(a+R)^2} - G \frac{\delta m M_p}{R^2} + N$$
, A est l'accélération de δm et N est la réaction de la planète sur δm . Il y a désintégration quand δm n'est plus en contact avec la planète, donc quand $N=0$.

Pour déterminer A , on suppose que le mouvement de la planète est circulaire uniforme donc $A = -(a+R)\omega^2$, or en appliquant la RFD à la planète on obtient :

$$-M_p a \omega^2 = -G \frac{M_p M_e}{a^2} \Leftrightarrow \omega^2 = G \frac{M_e}{a^3} \quad \text{d'où} \quad A = -G \frac{(a+R)M_e}{a^3}$$

$$-\delta m G \frac{(a+R)M_e}{a^3} = -G \frac{\delta m M_e}{(a+R)^2} - G \frac{\delta m M_p}{R^2} + N$$

On en déduit :

Ce qui donne :

$$N = \delta m G \left(\frac{M_p}{R^2} - \left(\frac{(a+R)M_e}{a^3} - \frac{M_e}{(a+R)^2} \right) \right) = \delta m G \left(\frac{M_p}{R^2} - \left(\frac{(a+R)}{a^3} - \frac{1}{(a+R)^2} \right) M_e \right)$$

On voit donc que N est proportionnel à la différence de deux termes, le premier correspondant à la force gravitationnelle de cohésion, le second à un terme de marée.

$$N > 0 \Rightarrow \frac{M_p}{R^2} > \left(\frac{(a+R)}{a^3} - \frac{1}{(a+R)^2} \right) M_e$$

$$\frac{M_p}{R^2} > \left(\frac{1 + \frac{R}{a}}{a^2} - \frac{1}{a^2} \left(1 - 2 \frac{R}{a} \right) \right) M_e = \frac{3R}{a^3} M_e \Leftrightarrow a^3 > 3R^3 \frac{M_e}{M_p}$$

Si $R \ll a$ on en déduit

$$a_{\min} = R \sqrt[3]{3 \frac{M_e}{M_p}}$$

On en déduit :

Pour une étoile du type HD209458 et pour une planète de type Jupiter chaud on a $M_e = 2,2 \cdot 10^{30}$ kg, $M_p = 2 \cdot 10^{27}$ kg, et $R \in [10^8, 7 \cdot 10^8]$ m (cf question 7.1.3 et rayon de Jupiter), on obtient :

Application Numérique : $a_{\min} \in [1,5, 10,5] \cdot 10^9$ m = $[1, 7] \cdot 10^{-2}$ u.a

Pour des planète de type Jupiter chaud, autour d'une étoile de type HD209458, l'orbite minimale est de l'ordre de quelques 10^{-2} u.a.

Remarque : Si on prend δm sur la planète, mais tel que sa distance à l'étoile soit $a-R$ on trouve en appliquant la RFD :

$$-\delta m G \frac{(a-R)M_e}{a^3} = -G \frac{\delta m M_e}{(a-R)^2} + G \frac{\delta m M_p}{R^2} - N$$

$$N > 0 \Rightarrow \left(\frac{(a-R)}{a^3} - \frac{1}{(a-R)^2} \right) M_e > -\frac{M_p}{R^2}$$

$$\left(\frac{1 - \frac{R}{a}}{a^2} - \frac{1}{a^2} \left(1 + 2 \frac{R}{a} \right) \right) M_e = -\frac{3R}{a^3} M_e > -\frac{M_p}{R^2} \Leftrightarrow 3R^3 \frac{M_e}{M_p} < a^3$$

avec $R \ll a$

On retrouve le même résultat.

Si on prend δm à l'intérieur de la planète, la force de cohésion est plus faible, cela donne, si δm est à $a + \alpha R$ avec $\alpha \in [-1 ; +1]$:

$$-\delta m G \frac{(a + \alpha R)M_e}{a^3} = -G \frac{\delta m M_e}{(a + \alpha R)^2} - G \frac{\delta m \alpha^3 M_p}{(\alpha R)^2} + \frac{|\alpha|}{\alpha} N$$

$$\frac{|\alpha|}{\alpha} N = \delta m G \left(\frac{\alpha M_p}{R^2} - \left(\frac{(a + \alpha R)M_e}{a^3} - \frac{M_e}{(a + \alpha R)^2} \right) \right)$$

$$\frac{\alpha M_p}{R^2} > \left(\frac{(a + \alpha R)}{a^3} - \frac{1}{(a + \alpha R)^2} \right) M_e$$

Si $\alpha > 0$ alors $N > 0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{1 + \alpha \frac{R}{a}}{a^2} - \frac{1}{a^2} \left(1 - 2\alpha \frac{R}{a} \right) \right) M_e = \frac{3\alpha R}{a^3} M_e < \frac{\alpha M_p}{R^2} \Leftrightarrow 3R^3 \frac{M_e}{M_p} < a^3$$

avec $R \ll a$

On retrouve le même résultat.