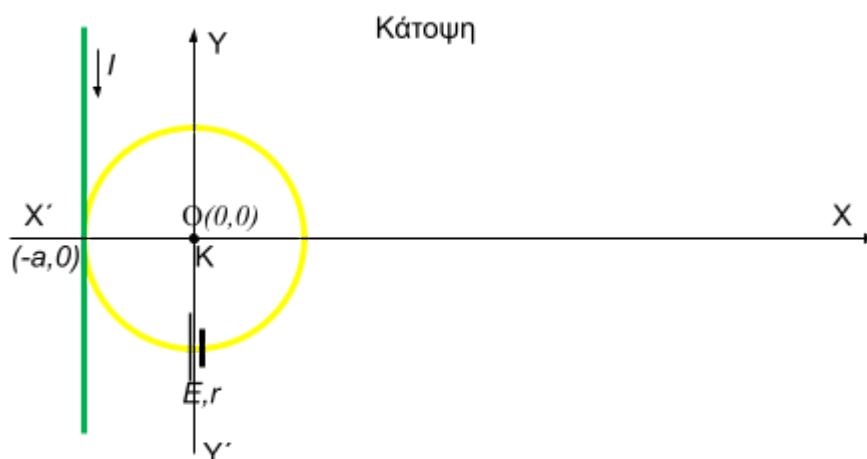


Τοποθετώντας έναν κυκλικό αγωγό σε όχημα



Πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο μπορεί να κινείται ένα πειραματικό όχημα, στην οριζόντια καρότσα του οποίου έχουμε ξαπλώσει έναν κυκλικό αγωγό με αντίσταση ανά μονάδα μήκους $R^* = 5/\pi \, \Omega/m$ και ακτίνα $a = 0,3 \, m$. Ο αγωγός τροφοδοτείται από μπαταρία με ΗΕΔ $E = 24V$ και εσωτερική αντίσταση $r = 1\Omega$, που βρίσκεται πάνω στο όχημα. Το κέντρο του Κ, βρίσκεται στην αρχή ενός συστήματος αξόνων ΧΟΥ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη θέση $x = -a$ και κατά τη διεύθυνση του άξονα Υ'Υ, βρίσκεται ακλόνητος οριζόντιος ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα ίδιας έντασης με τον κυκλικό, με φορά που φαίνεται στο σχήμα και αποτελείται από δέσμη $N = 10$ όμοιων λεπτών ευθύγραμμων συρμάτων. Κάποια χρονική στιγμή, αρχίζουμε να μετακινούμε το όχημα κατά τη θετική φορά του άξονα Χ'Χ.

Α' μέρος: Για μαθητές

α) Να υπολογίσετε το μέτρο και την κατεύθυνση της έντασης του μαγνητικού πεδίου του κυκλικού αγωγού στο κέντρο του Κ.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο και την κατεύθυνση της έντασης του μαγνητικού πεδίου, που δημιουργεί ο ευθύγραμμος αγωγός στο κέντρο Κ του κυκλικού αγωγού, σε συνάρτηση με την απόσταση x από την αρχή του άξονα Χ'Χ.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της έντασης του συνολικού μαγνητικού πεδίου στο κέντρο Κ του κυκλικού αγωγού σε συνάρτηση με τη θέση x , πάνω στον άξονα Χ'Χ. Θεωρείστε θετική τη φορά προς τον αναγνώστη. Σε ποια θέση μηδενίζεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου;

$$k_\mu = 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

Οι αγωγοί βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Δίνεται και να μη ληφθούν υπόψη τα επαγωγικά φαινόμενα, που εμφανίζονται κατά την κίνηση του κυκλικού αγωγού.

Β' μέρος: Για καθηγητές

Αλλάζουμε την πολικότητα της πηγής. Ας υπολογίσουμε τη δύναμη Laplace που δέχεται ο κυκλικός ρευματοφόρος αγωγός, από το μαγνητικό πεδίο του ευθύγραμμου, όταν το κέντρο του Κ βρίσκεται σε απόσταση $r = 2R$ από τον ευθύγραμμο.

Απάντηση

Α' μέρος: Για μαθητές

α) Η αντίσταση του κυκλικού αγωγού είναι

$$R = R^* \cdot 2\pi a = \frac{5}{\pi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,3 = 3\Omega$$

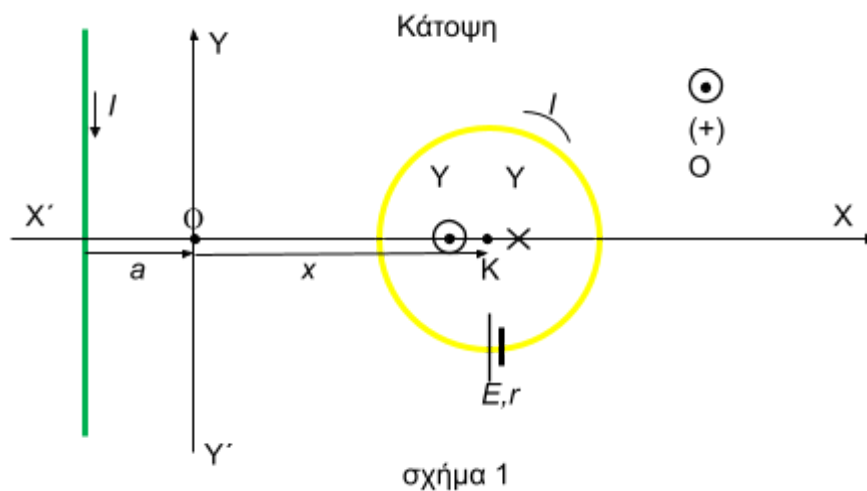
Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό θα είναι

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{24}{3 + 1} = 6\text{ A}$$

Στο κέντρο του Κ, η ένταση του μαγνητικού πεδίου θα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω και μέτρο

$$B_K = k_\mu \frac{2\pi I}{a} = 10^{-7} \frac{2\pi \cdot 6}{0,3} = 10^{-7} \cdot \frac{12\pi}{0,3} = 40\pi \cdot 10^{-7} = 4\pi \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

σταθερό και ανεξάρτητο της θέσης του οχήματος (σχήμα 1).



β) Σε μια τυχαία θέση x του κέντρου Κ του κυκλικού αγωγού, το μαγνητικό πεδίο, που δημιουργεί ο ευθύγραμμος στο σημείο Κ θα έχει ένταση

$$B_\varepsilon = k_\mu \frac{2I}{a + x} \text{ N} \Leftrightarrow B_\varepsilon = 10^{-7} \frac{2 \cdot 6}{0,3 + x} \cdot 10 \Leftrightarrow B_\varepsilon = \frac{12}{0,3 + x} \cdot 10^{-6} \quad (\text{S.I.})$$

με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα πάνω (σχήμα 1).

γ) Στην τυχαία θέση x , στο κέντρο Κ του κυκλικού αγωγού το συνολικό μαγνητικό πεδίο θα έχει ένταση

$$\vec{B} = \vec{B}_K + \vec{B}_\varepsilon \Leftrightarrow B = B_\varepsilon - B_K \Leftrightarrow$$

$$B = \frac{12}{0,3 + x} \cdot 10^{-6} - 4\pi \cdot 10^{-6} \Leftrightarrow$$

$$B = 4 \left(\frac{3}{0,3+x} - \pi \right) \cdot 10^{-6} \quad \text{με } x \geq 0 \quad (\text{S.I.})$$

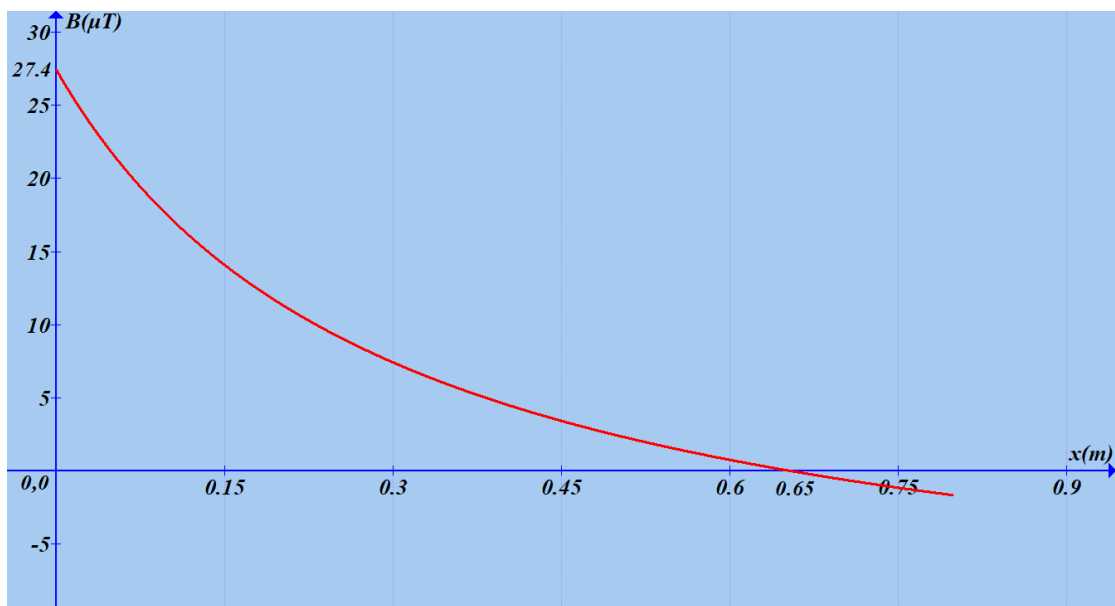
Παρατηρούμε ότι για $x = 0 \longrightarrow B = 4(10 - \pi) \mu T \approx 27,4 \mu T$

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου, μηδενίζεται όταν

$$\frac{3}{0,3+x} - \pi = 0 \Leftrightarrow 0,3\pi + \pi x = 3 \Leftrightarrow$$

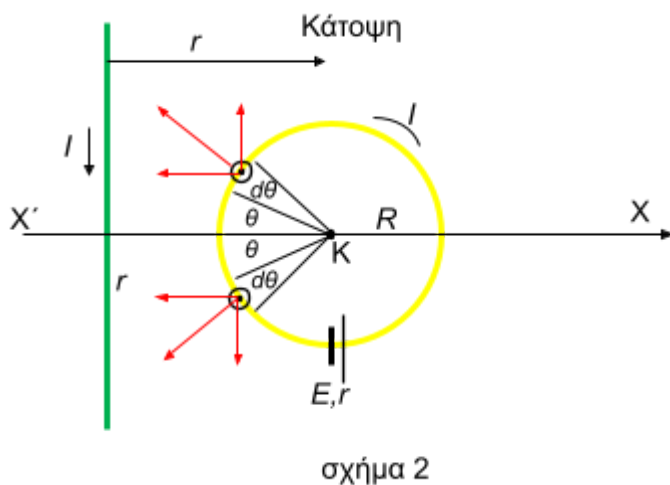
$$x = \frac{3}{\pi} - 0,3 \text{ m} \Leftrightarrow x \approx 0,65 \text{ m}$$

Η γραφική παράσταση είναι υπερβολή, όπως έχει σχεδιαστεί παρακάτω:



Μετά τη θέση $x = 0,65 \text{ m}$, η φορά της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο K, αντιστρέφεται.

Β' μέρος: Για καθηγητές



Θεωρούμε δύο στοιχειώδεις επίκεντρες γωνίες $d\theta$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2, συμμετρικές ως προς τον άξονα $X'X$. Αυτές αποκόπτονται από τον κυκλικό αγωγό στοιχειώδη τμήματα μήκους dl , που ισαπέχουν από τον ευθύγραμμο αγωγό αποστάσεις

$$x = r - R \sin \theta = 2R - R \sin \theta = R(2 - \sin \theta)$$

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου του ευθύγραμμου αγωγού, σε κάθε ένα από αυτά τα στοιχειώδη τμήματα θα έχει μέτρο

$$dB = k_{\mu} \frac{2I}{x} N \Leftrightarrow dB = k_{\mu} \frac{2NI}{R(2 - \sin \theta)} \quad (1) \text{ με φορά προς τα πάνω.}$$

Η στοιχειώδης δύναμη Laplace, που δέχεται κάθε τμήμα θα είναι

$$dF = dB \cdot I \cdot dl \xrightarrow{(1)} dF = k_{\mu} \frac{2NI}{R(2 - \sin \theta)} \cdot I \cdot R \cdot d\theta \Leftrightarrow$$

$$dF = k_{\mu} \frac{2NI^2}{2 - \sin \theta} d\theta \quad (2)$$

με φορά προς τα «έξω».

Αν αναλύσουμε αυτές τις δυνάμεις σε δύο συνιστώσες, οι dF_y , $-dF_y$ εξουδετερώνονται και η «καθαρή» στοιχειώδης δύναμη στον αγωγό θα έχει μέτρο

$$dF_{o\lambda} = 2dF_x \Leftrightarrow dF_{o\lambda} = 2dF \cdot \sin \theta \xrightarrow{(2)} dF_{o\lambda} = k_{\mu} \frac{4NI^2}{2 - \sin \theta} \cdot \sin \theta \cdot d\theta \Leftrightarrow$$

$$dF_{o\lambda} = 4k_{\mu} NI^2 \cdot \frac{\sin \theta}{2 - \sin \theta} \cdot d\theta \quad (3)$$

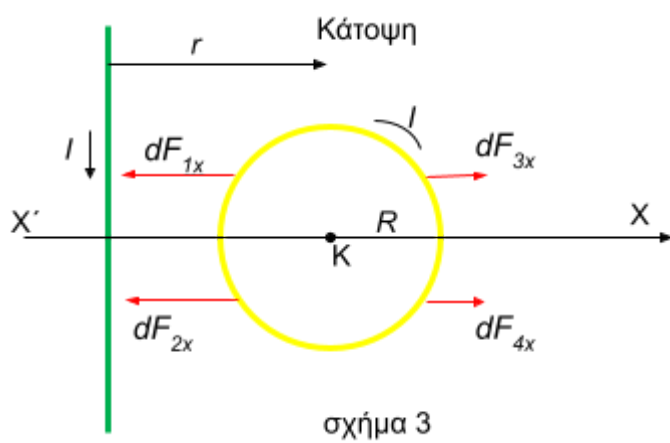
Η συνισταμένη δύναμη στον κυκλικό αγωγό θα προκύψει από την ολοκλήρωση της σχέσης (3)

$$\Sigma F = \int_0^{\pi} dF_{o\lambda} \xrightarrow{(3)} \Sigma F = \int_0^{\pi} 4k_{\mu} NI^2 \cdot \frac{\sin \theta}{2 - \sin \theta} \cdot d\theta \Leftrightarrow \Sigma F = 4k_{\mu} NI^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta}{2 - \sin \theta} \cdot d\theta$$

Με τη βοήθεια π.χ. της WolframAlpha, βρίσκουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα και τελικά:

$$\Sigma F = 4\pi k_{\mu} NI^2 \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Η δύναμη αυτή είναι ελκτική τελικά, αφού η κατανομή των δυνάμεων στον άξονα $X'X$ είναι σαφώς υπέρ της ...έλξης, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.



Ανδρέας Ριζόπουλος