

I.1.a) Pendant dt , le cation balaie un volume proportionnel à $v dt$; ce volume contient par ailleurs un nombre de molécules proportionnel à $\rho(r)$. Le nombre de chocs pendant dt est donc proportionnel à la fois à la vitesse v et à la masse volumique de l'air $\rho(r)$. Donc λ est proportionnel à $\rho(r)$.

I.1.b)
$$m \frac{dv}{dt} = +eE - \lambda v$$

I.1.c et d) En supposant E constant et uniforme, l'intégration de cette équation conduit à
$$v(t) = v_l \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$
, avec
$$v_l = \frac{e}{\lambda} E \quad \text{et} \quad \tau = \frac{m}{\lambda} \quad v_l = -\frac{e}{\lambda} E$$
, même τ . Pour un anion de charge $-e$,

I.1.e) $|v_l| = 4,8 \text{ mm.s}^{-1}$, $\tau = 9,6 \cdot 10^{-11} \text{ s}$. Ordres de grandeur de $ev_l B$: $8 \cdot 10^{-27} \text{ N}$, de mg : $5 \cdot 10^{-25} \text{ N}$, de eE et de λv_l : $2 \cdot 10^{-18} \text{ N}$. On peut donc négliger la pesanteur et l'influence du B terrestre. $|v_l| \tau = 4,6 \cdot 10^{-13} \text{ m}$; d'où une relation locale entre E et v_l (la vitesse limite est atteinte quasi-instantanément, la distance dont se déplace l'ion pendant la phase transitoire étant négligeable devant les distances caractéristiques de variation de E).

I.1.f) $k = \frac{e}{\lambda}$; $k = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ (m.s}^{-1}\text{)/(V.m}^{-1}\text{)}$.

I.2.a) Remarque : l'énoncé considère en fait des fonctions $n_+(z, t)$ et $n_-(z, t)$.

Un bilan dans une tranche d'épaisseur dz de section S du nombre de cations donne :

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} S dz dt = (q - \alpha n_+ n_-) S dz dt + v_l(z) S dt n_+(z, t) - v_l(z + dz) S dt n_+(z + dz, t)$$

soit $\frac{\partial n_+}{\partial t} S dz dt = (q - \alpha n_+ n_-) S dz dt - S dt dz \frac{\partial}{\partial z} (v_l n_+)$, ou encore $\frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (n_+ k E) = q - \alpha n_+ n_-$.

Un raisonnement similaire pour les anions conduit à $\frac{\partial n_-}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (n_- k E) = q - \alpha n_+ n_-$.

I.2.b) On fait la somme et la différence des deux équations précédentes, avec l'hypothèse $n_+(z) = n_-(z) = n(z)$ et on

obtient : $\frac{\partial}{\partial z} (n k E) = 0$ (donc $n k E$ ne dépend pas de z) et $\frac{\partial n}{\partial t} = q - \alpha n^2$ (équation d'évolution temporelle de $n(z, t)$).

I.2.c) En régime stationnaire on a donc
$$n_0(z, t) = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}$$
. Comme ni q ni α ne dépendent de z , n_0 n'en dépend pas non

plus : c'est cohérent. Par conséquent $kE = \frac{e}{\lambda} E$ ne doit pas non plus dépendre de z , donc, comme λ est proportionnel à $\rho(z)$ (**I.1.a**), $E(z)$ doit aussi être proportionnel à $\rho(z)$.

I.2.d) Par unité de volume, il y a n_0 cations et il s'en forme (ou il en disparaît, c'est la même chose en régime

$$\tau' = \frac{n_0}{q} = \frac{1}{\sqrt{\alpha q}}$$

stationnaire) q par unité de temps. Ils sont entièrement renouvelés en un temps de vie moyenne d'un ion.

I.2.e) $n_0 = 2,67 \cdot 10^9 \text{ m}^{-3}$; $\tau' = 267 \text{ s} = 4 \text{ min } 27 \text{ s} \gg \tau$: l'ion passe toute sa vie à aller à sa vitesse limite.

I.2.f) Pendant sa vie, l'ion parcourt la distance $v_l \tau' = 1,28 \text{ m}$, sur laquelle E varie de $3,8 \cdot 10^{-3} \text{ V.m}^{-1}$, quantité négligeable par rapport à la valeur de E (15 V.m^{-1}) : l'ion est donc soumis à un champ E quasiment constant pendant toute sa vie.

I.3) Remarque : la loi donnée s'obtiendrait à partir de l'équilibre hydrostatique et de la loi de Laplace.

$$E(z) = E_0 \frac{\rho(z)}{\rho(0)} = E_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g\rho(0)}{P(0)} z \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

I.3.a) $E(z)$ est proportionnel à $\rho(z)$, donc

$$\rho(0) = \frac{P(0)M}{RT_0}, \text{ donc } E(z) = E_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{gM}{RT_0} z \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

I.3.b) $E(1000 \text{ m}) = -45,9 \text{ V.m}^{-1}$; $E(5000 \text{ m}) = -31,7 \text{ V.m}^{-1}$; $E(10000 \text{ m}) = -18,1 \text{ V.m}^{-1}$, valeurs qui apparaissent un peu trop élevées (en valeur absolue) par rapport à celles de la figure 1.

I.3.c) $\vec{j} = n_0 e k \vec{E} + n_0 (-e) (-k \vec{E}) = 2n_0 e k \vec{E}$ d'où $j_z = 2n_0 e k E(z)$. A.N. : $j_z(z=0) = -1,37 \cdot 10^{-11} \text{ A.m}^{-2}$.

I.3.d) De $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, on tire $\frac{dE}{dz} = \frac{(n_+ - n_-)e}{\epsilon_0}$ et donc $n_+ - n_- = \frac{\epsilon_0}{e} \frac{dE}{dz}$. A.N. : $n_+ - n_- = -1,7 \cdot 10^5 \text{ m}^{-3}$ (en

prenant $-3 \cdot 10^{-3} \text{ V.m}^{-2}$ pour ordre de grandeur de $\frac{dE}{dz}$, donné au **I.2.f**), valeur effectivement très petite par rapport à n_0 .

II.1.a) Dans chacun des deux régimes, lorsque la vitesse limite v_{gl} est atteinte, on a $F + \frac{4}{3} \pi R_g^3 (\rho_{\text{eau}} - \rho) g = 0$

(on pourrait négliger ρ devant ρ_{eau}). Pour un régime laminaire, on aboutit à $v_{gl} = \frac{2(\rho_{\text{eau}} - \rho) R_g^2}{9\eta} g$. Et pour un

régime turbulent à $v_{gl} = -\sqrt{\frac{8(\rho_{\text{eau}} - \rho) R_g}{3\rho C_d} g e_z}$.

II.1.b) On obtient les valeurs suivantes pour la norme de la vitesse limite v_{gl} :

	Régime laminaire	Régime turbulent
$R_g = 10 \mu\text{m}$	$0,012 \text{ m.s}^{-1} (R_e = 0,013)$	$0,76 \text{ m.s}^{-1} (R_e = 0,84)$
$R_g = 1 \text{ mm}$	$120 \text{ m.s}^{-1} (R_e = 1,3 \cdot 10^4)$	$7,6 \text{ m.s}^{-1} (R_e = 840)$

$$R_e = \frac{2\rho v_{gl} R_g}{\eta}$$

II.1.c) On a indiqué dans le tableau les valeurs correspondantes du nombre de Reynolds ; on voit que pour la goutte de rayon $10 \mu\text{m}$, l'hypothèse d'un régime turbulent conduit à une contradiction (R_e est trop petit), mais celle d'un régime laminaire donne un résultat tout à fait satisfaisant. C'est le contraire pour la goutte de rayon 1 mm . On peut donc conclure que la vitesse limite est de 12 mm.s^{-1} pour la goutte de rayon $10 \mu\text{m}$, et de $7,6 \text{ m.s}^{-1}$ pour celle de rayon 1 mm .

II.2.a) Loi de Fick $\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$.

II.2.b) En ne tenant compte que de la diffusion, et donc en négligeant les éventuelles recombinaisons entre cations et

anions, on a conservation du nombre de cations (ou d'anions) et en conséquence l'équation classique $\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$.

La symétrie sphérique impose $n(r,t)$ et donc $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rn)$. Et donc, en régime stationnaire, $\frac{d^2}{dr^2} (rn) = 0$.

$$n(r) = n_0 \left(1 - \frac{R_g}{r} \right)$$

En intégrant avec les conditions aux limites fournies :

II.2.c) Alors, $\vec{j}_n = -\frac{Dn_0 R_g}{r^2} \vec{e}_r$ soit, à la surface de la goutte, $\vec{j}_n(r = R_g) = -\frac{Dn_0}{R_g} \vec{e}_r$. Le nombre A_g de cations (ou d'anions) absorbés par unité de temps par la goutte est alors

$$A_g = - \oint_{\text{surface de la goutte}} \vec{j}_n \cdot d\vec{S} = 4\pi Dn_0 R_g$$

(ou d'anions) absorbés par unité de temps par la goutte est alors

II.2.d) On suppose que l'on peut se considérer en régime stationnaire *au voisinage* de chacune des gouttes d'eau, et donc utiliser les résultats des deux questions précédentes, même si la densité d'ions au sein du nuage n'est pas stationnaire. Un bilan du nombre de cations (ou d'anions) dans un volume V donne alors, toujours en négligeant les

recombinaisons éventuelles entre cations et anions : $\frac{dn_0}{dt} V = qV - (NV) 4\pi Dn_0 R_g$, où NV est le nombre de gouttes d'eau présentes dans le volume V , chacune absorbant A_g cations (ou anions) par unité de temps. D'où l'équation

d'évolution temporelle $\frac{dn_0}{dt} = q - 4\pi NDn_0 R_g$. La constante de temps d'évolution correspondante est alors

$$\tau_D = \frac{1}{4\pi ND R_g} \quad n_D = \frac{q}{4\pi ND R_g}$$

Et la valeur atteinte en régime permanent est

II.2.e) $\tau_D = 8,0$ s, négligeable devant le temps d'évolution d'un nuage (au minimum quelques minutes) : la densité d'ions s'adapte donc « instantanément » à l'évolution du nuage (en particulier à la valeur de N). $n_D = 8,0 \cdot 10^7 \text{ m}^{-3} \approx n_0/30$: il y a donc beaucoup moins d'ions à l'intérieur d'un nuage que dans une atmosphère sans nuages ; la

recombinaison par paires se ferait avec un taux volumique $\alpha n_D^2 \approx 9 \cdot 10^3 \text{ m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui est effectivement négligeable par rapport aux autres termes de l'équation d'évolution temporelle du **II.2.d**.

Remarque : on constate que $n_D \approx N$, ce qui, rétrospectivement, fait douter de la validité de la méthode utilisée au **II.2.b** : on a considéré une goutte seule entourée d'ions qui diffusent, ce qui semble difficilement applicable si, en moyenne, il n'y a à peu près qu'un ion par goutte d'eau...

II.2.f) $\vec{j}_n(r = 2R_g) = -\frac{Dn_D}{4R_g} \vec{e}_r$ d'où $\|\vec{j}_n(r = 2R_g)\| = 2,0 \cdot 10^7 \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. La densité de courant de convection des

cations (ou des anions) est, elle, donnée par $\vec{j}_C = n_D \vec{v}_l = n_D kE$ d'où $\|\vec{j}_C\| = 3,8 \cdot 10^5 \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ pour $|E| = 15 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Il semble donc légitime de négliger le courant de convection par rapport au courant de diffusion.

II.3.a1) $\langle Q \rangle = 0$.

II.3.a2) A l'extérieur de la goutte (dont la répartition de charges a la symétrie sphérique), $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$ (champ

créé par la goutte), et le potentiel vaut (en le prenant nul à l'infini) $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$. Le potentiel de la goutte

(uniforme puisqu'elle est considérée comme un conducteur parfait) est donc égal à celui de sa surface $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_g}$.

II.3.a3) $W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R_g}$ donc $\langle W \rangle = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 R_g} \langle Q^2 \rangle \approx k_B T$. En considérant que $\langle Q^2 \rangle$ et $\langle |Q| \rangle^2$ ont

même ordre de grandeur, on aboutit à $\langle |Q| \rangle \approx \sqrt{8\pi\epsilon_0 R_g k_B T}$. A $T = 270 \text{ K}$, on trouve $2,9 \cdot 10^{-18} \text{ C}$ (soit 18 e) pour $R_g = 10 \text{ } \mu\text{m}$ et $2,9 \cdot 10^{-17} \text{ C}$ (soit 180 e) pour $R_g = 1 \text{ mm}$.

II.3.b1) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V_E$ et, du fait de l'invariance par rotation autour de l'axe Oz , V_E ne dépend que de r et θ . Donc

$$\begin{cases} \frac{\partial V_E}{\partial r} = -E \cos \theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_E}{\partial \theta} = E \sin \theta \end{cases} \quad \text{Par intégration, on obtient } V_E(r, \theta, \varphi) = -Er \cos \theta + c^{\text{te}}.$$

II.3.b2) A la surface de la goutte (conductrice parfaite), le potentiel total est constant et on en tire

$R_g^n g(\theta) - E R_g \cos \theta = c^{\text{te}}$ ou $g(\theta) = \frac{c^{\text{te}} + E R_g \cos \theta}{R_g^n}$. Le potentiel V_g doit satisfaire l'équation de Laplace pour $r > R_g$ (espace sans charges), ce qui permet de montrer que $n = -2$. Le fait que $Q = 0$ implique que la constante présente dans $g(\theta)$ est nulle... (sinon V_g contiendrait un terme en fait relatif à une charge totale non nulle, voir question

$$g(\theta) = \frac{E \cos \theta}{R_g^{n-1}} = R_g^3 E \cos \theta$$

suivante). Donc

II.3.b3) Si $Q = 0$, on ajoute le potentiel d'une charge ponctuelle $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ pour obtenir

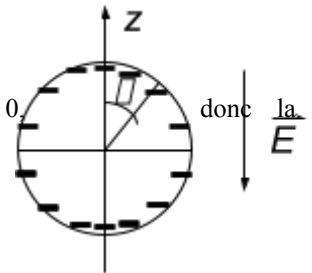
$$V_{\text{tot}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{E R_g^3 \cos \theta}{r^2} - E r \cos \theta$$

II.3.b4) La condition de passage pour $\vec{E}$ à la surface de la goutte donne $\vec{E}_s - 0 = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \vec{e}_r$: puisque la goutte est supposée parfaitement conductrice, le champ en son sein est nul. Donc $\vec{E}_s = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \vec{e}_r$. Avec $\vec{E} = -\text{grad} V_{\text{tot}}$, on

$$\sigma(\theta) = \frac{Q}{4\pi R_g^2} + 3\epsilon_0 E \cos \theta$$

aboutit en $r = R_g$ à :

II.3.b5) Pour une goutte globalement neutre, $\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E \cos \theta$. Avec $E < 0$, donc la



II.4.a) La densité surfacique de charges est la plus grande (en valeur algébrique) à la base

$$\sigma(\theta = \pi) = \frac{Q}{4\pi R_g^2} - 3\epsilon_0 E$$

de la goutte et vaut

. La disparition de toute charge positive à

la surface de la goutte se produit donc quand $\sigma(\theta = \pi)$ atteint la valeur 0, ce qui se produit lorsque $Q = 12\pi\epsilon_0 R_g^2 E$.

Donc $|Q|_{\text{max}} = 12\pi\epsilon_0 R_g^2 |E|$. A.N. : $|Q|_{\text{max}} = 3,34 \cdot 10^{-18} \text{ C}$ ($\approx 21 e$) pour $R_g = 10 \mu\text{m}$, $|Q|_{\text{max}} = 3,34 \cdot 10^{-14} \text{ C}$ ($\approx 2,1 \cdot 10^5 e$) pour $R_g = 1 \text{ mm}$. La première valeur (« petite » goutte) est très similaire à celle trouvée au **II.3.a3**, la seconde (« grosse » goutte) est, elle, très supérieure : une petite goutte peut atteindre cet état de « saturation » spontanément, grâce aux fluctuations statistiques de sa charge, c'est impossible pour une grosse goutte, qui ne pourra atteindre cet état que grâce à un processus particulier.

II.4.b1) La goutte qui tombe à sa face « avant » chargée positivement : elle va donc repousser les cations et attirer les anions qui se trouvent sur son chemin. Elle va donc absorber davantage les anions que les cations et par conséquent se charger négativement.

II.4.b2) La base du nuage se charge donc négativement, ce qui accroît le champ électrique par rapport à la situation sans nuage. Les cations vont donc être attirés vers la base du nuage (à travers celui-ci), et les anions venant du bas sont repoussés. Plus le champ est intense, plus les cations ont une vitesse élevée ; on atteint la limite du processus lorsqu'ils atteignent une vitesse voisine de celle de la goutte : le champ électrique ne peut alors plus augmenter. La limite est donc atteinte pour $v_g = v_l = k|E_c|$. Pour des gouttes de 1 mm de rayon, on obtient $E_c \approx -24 \text{ kV.m}^{-1}$.

II.4.b3) A l'équilibre la base du nuage est chargée négativement et le sommet positivement. Les valeurs observées sont compatibles avec la valeur de E_c obtenue au **II.4.b2**.

$$N_c = \frac{M_c}{\rho_{\text{eau}} \frac{4}{3} \pi R_g^3}$$

III.1.a) $\approx 2,39 \cdot 10^{12}$ gouttes. D'après **II.4.a**, $Q_{\text{max}} = 12\pi\epsilon_0 R_g^2 E \approx -3,34 \cdot 10^{-12} \text{ C}$. Donc

$$Q_l = N_c Q_{\text{max}} \approx -8,0 \text{ C}.$$

III.1.b) Pour $r > R_C$, le champ électrique et le potentiel sont le même que si toute la charge était concentrée au centre de

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_t}{r}$$

la sphère. D'où si le potentiel est pris nul à l'infini. Le potentiel à la surface de la sphère est donc

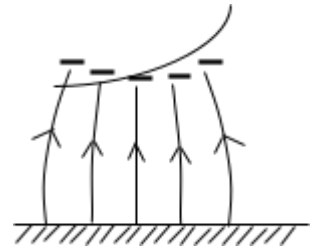
$$V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_t}{R_C}, \text{ soit } -7,16 \cdot 10^7 \text{ V pour } R_C = 1 \text{ km.}$$

III.1.c) L'ordre de grandeur du champ électrique entre le sol et la base du nuage est donc de

$$|E| = \frac{|V_C|}{d} \approx 71 \text{ kV.m}^{-1}.$$

Il est très supérieur à celui qui existe par beau temps (de l'ordre de 50 V.m^{-1}), et est de plus en sens inverse, dirigé du sol vers la base du nuage. On a représenté

ci-contre quelques lignes de champ de $\vec{E}$. Si on considère que le flux de $\vec{E}$ se conserve dans les tubes de champ (ce qui est quasiment le cas), on voit que le champ sera plus intense à proximité du nuage (à cause de sa courbure, en fait).



III.2.a) On obtient bien au **III.1.c** une valeur du champ $\vec{E}$ compatible avec la formation d'un coup de foudre dans un air humide, puisque supérieure à 50 kV.m^{-1} . On peut d'ailleurs expliquer que la décharge parte du nuage, puisque c'est près du nuage que le champ est le plus intense.

$$|I| = \frac{|Q_t|}{\Delta t} \approx 80 \text{ kA.}$$

III.2.b) Si le nuage se décharge totalement en $100 \mu\text{s}$, l'intensité correspondante est $I_0 = 1000 Q_t \approx 8 \text{ kA}$. Il s'agit d'un courant allant du sol vers les nuages. La densité moyenne de courant

$$j_{\text{foudre}} = \frac{I_0}{4\pi R_T^2} \approx 1,6 \cdot 10^{-11} \text{ A.m}^{-2}.$$

correspondante est donc $\approx 1,6 \cdot 10^{-11} \text{ A.m}^{-2}$. Par beau temps (question **I.3.c**), on avait une densité de courant, dans l'autre sens, de $1,4 \cdot 10^{-11} \text{ A.m}^{-2}$, donc tout à fait du même ordre de grandeur. Il semble donc que la foudre assure le « retour » des charges qui sont transférées en régime permanent par beau temps.