

Inizio con una premessa alcune notazioni e delle considerazioni (mi serviranno poi da supporto alla presentazione che seguirà).

Premessa; interpreto il significato di una frase del problema:  
- leggo: "...ogni gruppo deve restare con almeno una crocchetta"  
(cioè *sottrazione* non è ammessa se un gruppo ne ha solo una).

Notazioni.

- "*sottrazione*", "*divisione*": i due tipi di mosse (la stessa notazione utilizzata su: le Scienze)
- "*extra*": il numero di crocchette in ogni gruppo (meno l'ultima che è quella che si deve tenere)
- $(n_1, n_2, \dots)$ : l'elenco crocchette *extra* nei gruppi [p.e. : (0,2,3) sono tre gruppi con 0,2,3 *extra*]
- " $E_0$ ": è il numero totale *extra* all'inizio gioco
- " $G_0$ ": numero complessivo gruppi ad inizio gioco
- " $E$ ", " $G$ ": totale degli *extra* e numero di gruppi (rappresentano come evolvono, durante il gioco)
- " $E_{min}$ ": *extra* nel gruppo che ne ha meno a inizio
- " $g_1$ ": giocatore che fa la prima mossa del gioco
- " $g_2$ ": giocatore che fa poi la mossa successiva.

Considerazioni:

- *divisione* riduce il totale "*extra*" di una unità
- *divisione* incrementa di uno il totale gruppi:  $G$
- *sottrazione* riduce il totale "*extra*" di  $G$  unità
- un gruppo infine rimane con una sola crocchetta
- di lì in poi, l'unica mossa ammessa è *divisione*
- perde chi si trova con *extra* a 0 in ogni gruppo (perché nei gruppi deve restare una crocchetta)
- dal momento che non si può sottrarre vince chi:
  - è il primo a muovere, ed  $E$  è un numero dispari
  - o è il secondo a muovere ed  $E$  è un numero pari
- la parità di  $E$  dopo la *sottrazione*, dipende da:
  - se  $E$  e  $G$ , prima sono pari,  $E$  dopo rimane pari
  - con  $E$  e  $G$  prima dispari,  $E$  dopo cambia a pari
  - altrimenti:  $E$  dopo una *sottrazione* è dispari.

Considerazioni su chi dei due, vincerà il gioco:

- per determinare chi vince, si deve verificare:
  - se  $E_{min}$  è uguale a 0 oppure è maggiore di zero
  - le parità iniziali; cioè quelle di:  $E_{min}, E_0, G_0$ .

Senza ripetere quanto detto, mostro chi vincerà (dopo aver motivato integro un caso di esempio:

- se  $E_0$  dispari vince  $g_1$ , infatti:
  - se  $E_{min}=0$  è ammessa solo *divisione* (e l'ultimo a poter dividere è  $g_1$ )
    - ad esempio (0, 1, 2)
  - se  $E_{min}>0$  con *divisione* riesce ad:
    - ottenere un gruppo con *extra* = 0 (e, quindi, forzare la *divisione*)
    - e nel contempo passare  $E$  pari a  $g_2$  (mettendolo in posizione perdente)
      - ad esempio (1, 1, 3)
- se  $E_0$  pari ed  $E_{min}=0$  vince  $g_2$  (per quanto già detto prima)
  - ad esempio (0, 1, 1)
- se  $E_0$  pari,  $G_0$  è dispari ed  $E_{min}>0$ , vince  $g_2$ :
  - $g_1$  perde sia con *sottrazione* che *divisione* (passa, comunque, a  $g_2$   $E$  dispari vincente)
    - ad esempio (0, 1, 2)
- se  $E_0$  pari,  $G_0$  è pari ed  $E_{min}$  dispari, vince  $g_1$ :
  - finché possono,  $g_1/g_2$  devono usare *sottrazione* (per non passare all'altro  $E$  dispari vincente)
  - l'ultimo a poterlo fare, dato  $G_0$  dispari, è  $g_1$
  - $g_2$  si trova con *divisione* ed  $E$  pari, perdente
    - ad esempio (1, 1, 2, 2)
- se  $E_0$  è pari,  $G_0$  è pari e  $E_{min}$  pari, vince  $g_2$ :
  - stesso discorso di prima a parti invertite
    - ad esempio (2, 2, 2, 2)

Riassumendo:

La strategia vincente si basa sul controllo della parità del numero totale di "extra" ( $E$ ) quando il gioco entra nella fase in cui l'unica mossa possibile è la divisione. Chi inizia la fase di divisione con un numero dispari di "extra" ha una strategia per fare l'ultima divisione e vincere.

Nella fase di sottrazione (quando  $E_{min} > 0$ ), i giocatori cercano di evitare di lasciare all'avversario un  $E$  dispari.

La parità del numero di gruppi ( $G_0$ ) gioca un ruolo cruciale nel determinare come la sottrazione influenza la parità di  $E$ .

La parità di  $E_{min}$  iniziale, con  $E_0$  e  $G_0$  pari, determina chi sarà il primo a forzare il passaggio alla fase di divisione con  $E$  pari per l'avversario.

Ho scritto un programma per verificare le deduzioni su chi vince:

<https://drive.google.com/file/d/1r7u-pHyIqmBLYSmLYaTuX-GYtGuDfptf/view?usp=sharing>

Il programma conferma per numero significativo di configurazioni:

*Ricerca terminata.*

*Nessuna contraddizione trovata in 29864 configurazioni  
(max pedoni=36, max gruppi=7) con le ipotesi previste.*

Aumentare il numero di configurazioni, richiede troppo processore.