01 NISAN 2025

DİZİLER VE SERİLER

2.DÖNEM VİZE HAZIRLIK

CAN KAHVECI

Giriş

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1$$

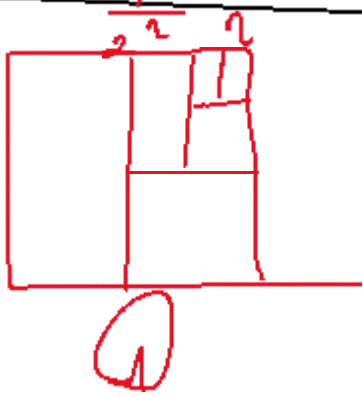
$$\frac{1}{2^n}$$

Sonsuz seri

1. Toplamları sonlu olabilir



$$\frac{1}{2^n}$$



$a + a+1 , a+2$

$1+2+3+4+5+\cdots n$ sonlu değildir

sonsuz seri

2. Sonlu olmayabilir

$$\frac{n \cdot n+1}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

sonsuz seri

3. Sonlu olup olmadığı açık olmayabilir

Diziler

terim

$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad a_n$

sayı listesi

Sonsuz sayı dizisi $TK = \mathbb{Z}^+$ olan

fonksiyondur.

$n = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$y = 2n \quad 2, 4, 6, 8, \ldots$

$y = n \quad 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

$n \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$y = 10 + 2n \quad 12, 14, 16, 18, \ldots$

$\{b_n\}$ dizisi 6 ile başlayabilir

$b_n = 2n$

1 ile

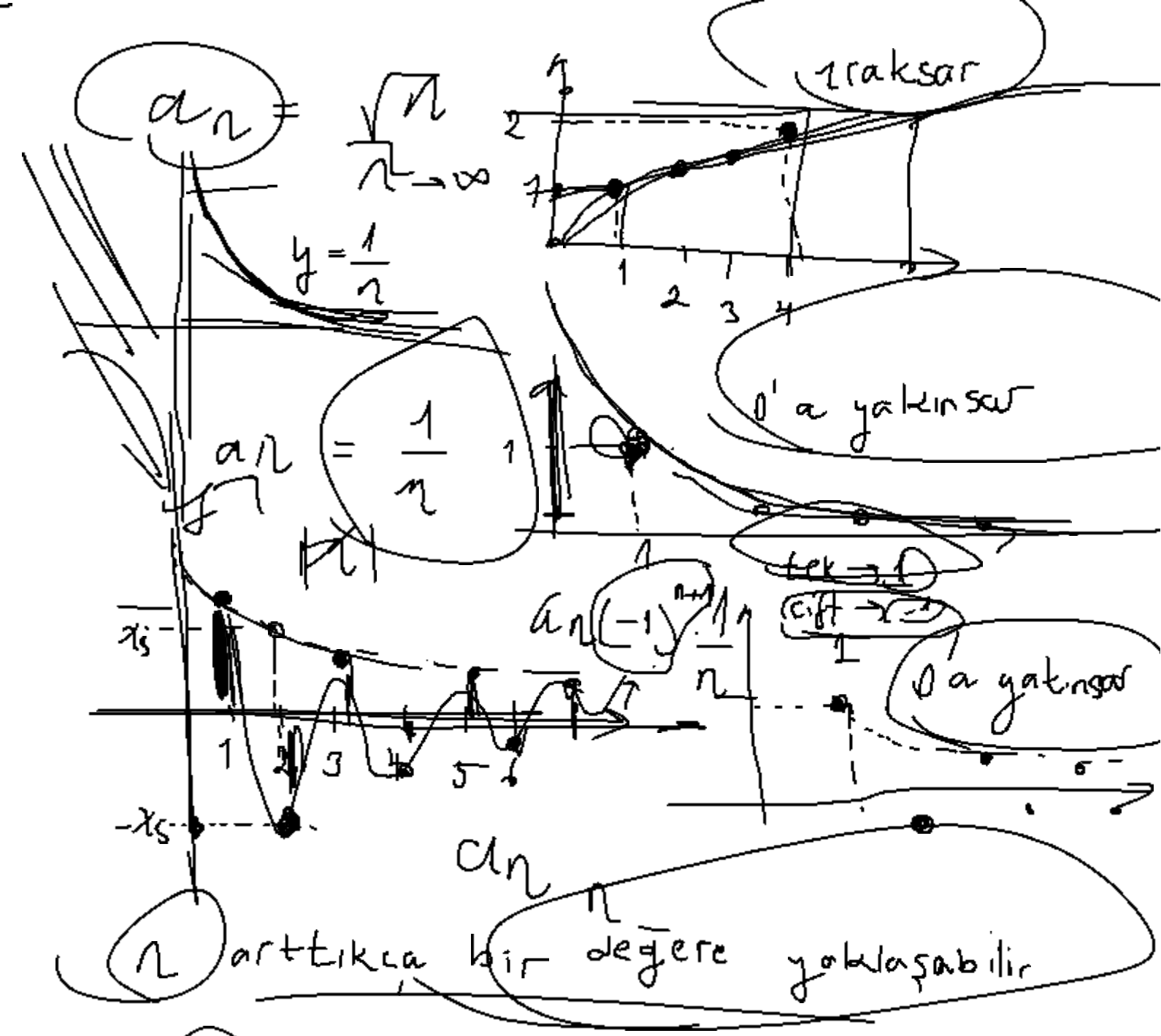
$a_n \quad 10 + 2n$

$12 \quad 14 \quad 16 \quad 18$

$12, 14, 16, 18, \ldots$

$\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$

$\sqrt{n} \Big|_{n=1}^{\infty}$



$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \left(\frac{1}{n}\right)$

0'a

$0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots, \left(\frac{n-1}{2n}\right)$

1'e

yakınsaktadır.

$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots \sqrt{n}$

n arttıkça artar

$(-1), (1), (-1), (1) \quad (-1)^{n+1}$

$-1, 1$ arasında

her M'e karşılık N'den büyük

$a_n > M$'i sağlayacak bir N sayısı

varsa sonsuza yaklaşır

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \qquad a_n \to \infty$$

her m'e karşılık $n > N$

$a_n < m$ şekilde bir N varsa

a_n eksi sonsuza yaklaşır

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty \qquad a_n \to -\infty$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

ayrı ayrı limiti olmasına gerek yok

ÖR

$\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ıraksar

$\{b_n\} = \{-1, -2, -3, \dots\}$ ıraksar

$\{a_n + b_n\} = \{0, 0, 0, \dots\}$ 0'a yakınsar

$c \neq 0$ için $\{c a_n\}$ yakınsarsa

$\{a_n\}$ yakınsar $(k = 1/c)$

(sandviç kuralı)

$\left(1/n \to 0\right)$

$\frac{\cos n}{n} \to 0$

$$\frac{1}{2^n} \to 0$$

$$(-1)^n \frac{1}{n} \to 0$$

$\alpha \geq 1$ için tanımlıdır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^{\alpha}}{n} = 0 \quad ?$$

= LOPITAL = diğerlere uygundur.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad \text{her } x \text{ için}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x|<1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\text{her } x \text{ için})$$

her n için $a_n \leq a_{n+1}$ $\{a_n\}$
artan olmayan dizidir.

$a_n = \mathbb{N}$ $1, 2, 3, \ldots$

$a_n = \frac{n}{n+1}$ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$a_n = \{1\}$ $1, 1, 1, \ldots$

her n için $a_n \leq M$ olacak şekilde
bir M varsa M üst sınırdır
(en küçük üst sınır)
?

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \cdots - \cdots + a_n$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 \quad a_n$

1. kısmitoplam

$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^{n-1}}$

S_1

1. $S_1 = 1$

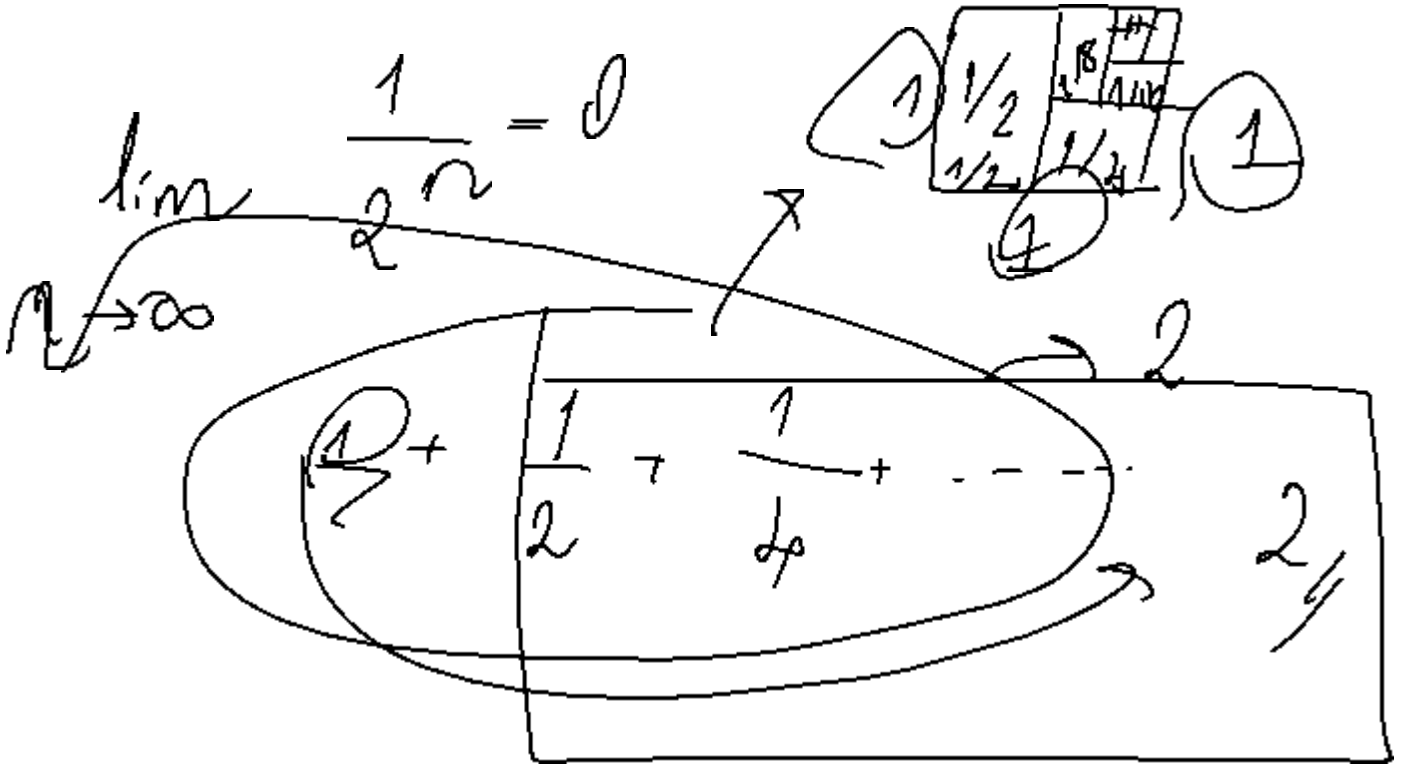
2. $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3. $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$2 - \frac{1}{1}$	1
$2 - \frac{1}{2}$	3/2
$2 - \frac{1}{4}$	7/4

1. terimi

$S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ 2'ye yakınsar



$\{a_n\}$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$

n.

Sonsuz seri

a_n n. terim

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\{S_n\}$ kısmi top. dizisi

S_n sayısı n. kısmi toplam

L limitine yakınsıyorsa

Seri yakınsaktır. toplamının L olduğunu

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

* Seri yakınsamıyorsa ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad , \quad \sum a_n$$

Geometrik Seri:

$$a + a.r + a.r^2 + a.r^3 + \dots \quad ar^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$$

r oranı.

pozitif

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

r oranı negatif

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$$

$r = 1$ ise n. kısmi toplamı

$$S_n = a + a.1 + a.1^2 + \cdots + a.1^{(n-1)}$$

$n.a$

seri ıraksar

$\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$

$r = -1$ seri ıraksar

kısmi toplam a ve 0 arasında salınır.

$|r| \neq 1$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n$$

$$S_n - rS_n = \underbrace{a - ar^n}$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a.(1-r^n)}{1-r}$$ $r \neq 1$ ise S_n'i bulabiliriz

$\underbrace{|r| < 1}$ $\quad |x|<1$

$n \to \infty \quad r^n \to 0 \qquad \lim_{n\to\infty} x^n = 0$

$|r|<1$

$$S_n \to \frac{a}{1-r} \Rightarrow \text{yakınsar.}$$

$|r|>1$

$|r| > 1 \quad |r^n| \to \infty$ Seri ıraksar

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaksa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ de n. kısmi top.

$\int$ seri toplamı

a_n sıfıra yakındır çünkü

hem S_n hemde S_{n-1} 'e yakındır

ve farkları, a_n'dir ki a_n terimi neredeyse 0'dır

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$S - S = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsarsa $a_n \to 0$ olacaktır.

$\lim_{n\to\infty} a_n$ yoksa veya 0'a eşit değilse $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksayacaktır.

ÖR

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ $\quad n^2 \to \infty$ 0'dan farklı, ıraksak

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ $\quad 1+\frac{1}{n} \to 1$ 0'dan farklı, ıraksak

* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ ıraksak $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ yoktur

(sıçramadan)

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+5} = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \neq 0$ ıraksaktır.

$a_n \to 0$ fakat seri ıraksar.

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2\text{ terim}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4\text{ terim}} + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{2^n\text{ terim}}$$

seri ıraksar

* seri terimleri 0'a yakınsar.

Seri Birleştirme

* 2 yakınsak seri

$\sum a_n = A$ ve $\sum b_n = B$

$\sum a_n + b_n = A + B$

Irak serinin $(k \neq 0)$ o Imak üzere katları da ıraksayacaktır.

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ ıraksakken $\sum (a_n + b_n)$ yakınsayabilir.

* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsar'se $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$'de yakınsar $(k > 1)$

Seri yeniden indisleme

İndisin baz değerini k birim yükseltmek için a_n'in formülünde n yerine $n-k$ yazalım

İR

Bir geometrik seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}$, $\sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}$ a_n'in her n için $a_n \geq 0$ sonsuz seri ele alalım

her kısmi toplam ya önceğine eşit ya da büyük olur böylece azalmayan bir dizi oluşturmuş oluruz

$*S_{n+1} = S_n + a_n$

$* S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq S_4 \leq S_5 \leq \ldots \leq S_n \leq \ldots$

* eğer kısmi toplamları üstten sınırlı ise yakınsar.

Harmonik Seri (Özel Durum)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Harmonik seri ıraksar çünkü kısmi toplamların üst sınırı yoktur.

İntegral Testi:

harmonik seri ile ilişkili n. terim $1/n$ değilde $1/n^2$ olan seriyi ele alalım

* yakınsar mı?

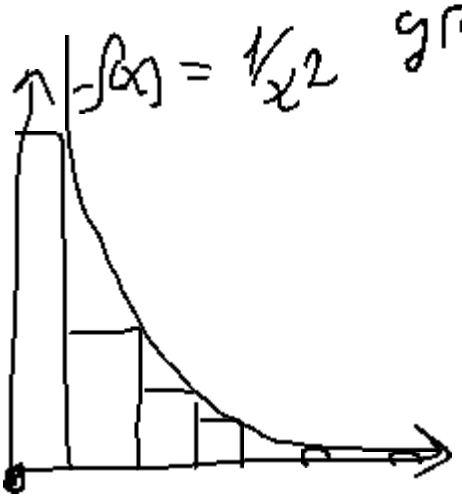
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

bunu $\int_1^{\infty} (1/x^2)\,dx$ integrali ile karşılaştırarak belirleyebiliriz.

$f(x) = 1/x^2$ olarak düşünelim

$y = 1/x^2$ eğrisi altında kalan;

$f(x) = 1/x^2$ grafiği



$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots f(n)$$

$$< f(1) + \int \frac{1}{x^a}\,dx \qquad a^2 = n$$

$\xrightarrow{1}$ integrasyon tek

$$1 + 1$$

$S_n < 2$ ile sınırlıdır.

a_n $\mathbb{Z}^+$ terimli bir dizi olsun.

f, her $x \geq N$ $(N \in \mathbb{Z}^+)$ için

sürekli, pozitif ve azalan bir

fonksiyondur.

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ integralinin

ya ikisi de yakınsar ya da ıraksar.

ÖR

bir p serisi;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

$p > 1$ ise yakınsar $p \leq 1$ ise ıraksar

olduğunu gösterin.

$p > 1$ ise: $f(x) = 1/x^p$, x'in pozitif

azalan bir fonksiyonu olur.

devamı integrasyon tekniği ile

Karşılaştırma testi

$\sum a_n$ negatif terim içermeyen bir seri;

a) $N \in \mathbb{Z}$ her $n > N$ için $a_n \leq c_n$ olacak şekilde bir $\sum c_n$ serisi var ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır

b) $N \in \mathbb{Z}$ $n > N$ için $a_n \geq d_n$ olacak şekilde ıraksak bir $\sum d_n$ var ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$$ serisi ıraksaktır.

n. terimi

$$\frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

Iraksak olan harmonik serinin n. teriminden büyüktür.

Limit Karşılaştırma Testi:

her $n \geq N$ $(N \in \mathbb{Z})$ $a_n > 0$ ve $b_n > 0$ olsun.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ise, $\sum a_n$ ve $\sum b_n$'in ikisi birden yakınsak veya ıraksak.

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ise $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır.

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ise $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$'de ıraksaktır.

ÖR $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$

$a_n \rightarrow \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ $\quad b = \frac{1}{n}$

n.terimi harmonik n.terimden büyük.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2$$

ÖR $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} + \cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ $a_n = \frac{1}{2^n}$ gibi davranır.

$b_n = \frac{1}{2^n}$ alalım.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yakınsaktır.

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^n}{2^{n-1}} = \frac{1}{1 - (1/2^n)} \right)$

$\lim \to 1$ dir.

a_n de yakınsaktır.

Oran Testi

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ büyüme oranı ölçer geometrik dizilerde sbt "r" 'dir.

$\sum a_n$ pozitif terimli seri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$$

- $p < 1$ ise [redacted]
- $p > 1$ ise veya $p = \infty$ ise [redacted]
- $p = 1$ ise [redacted]

Örn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}+5/3^{n+1}}{2^{n+5}/3^n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^{n+1}+5}{1\,2^n+5}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2+5\,2^{-n}}{1+5\,2^{-n}} \to \frac{2}{3} = 2/3$$

$2/3 < 1$ yakınsaktır

Kök testi

$$a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ tek} \\ 1/2^n, & n \text{ çift} \end{cases}$$

$\sum a_n$ yakınsar mı?

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{7}{2^7}+\cdots$$

$n \to \infty$ n. terim $\to 0$