01 NISAN 2025

DİZİLER VE SERİLER

2.DÖNEM VİZE HAZIRLIK

CAN KAHVECI

Giriş

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1$$

Sonsuz Seri

1. Toplamları sonlu olabilir

$$\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{2}$$

1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/64

$a+(a+1),\ a+2$

$1+2+3+4+5+\cdots n$

Sonsuz Seri

sonlu değildir

$$\frac{n.(n+1)}{2}$$

2. Sonlu olmayabilir

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

sonsuz seri

3. Sonlu olup olmadığı açık olmayabilir

Diziler

terim

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$

sayı listesi

Sonsuz sayı dizisi TK = $\mathbb{Z}^+$ olan

fonksiyondur.

$n = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$y = 2n$ 2, 4, 6, 8, ...

1, 2, 3, 4

$y = n$ 1, 2, 3, 4, 5, ...

1 2 4 5

$y = 10 + 2n$ 12, 14, 16, 18, ...

$\{b_n\}$ dizisi 6 ile başlayabilir

1 ile

$b_n = 2n$

a_n 10 + 2n

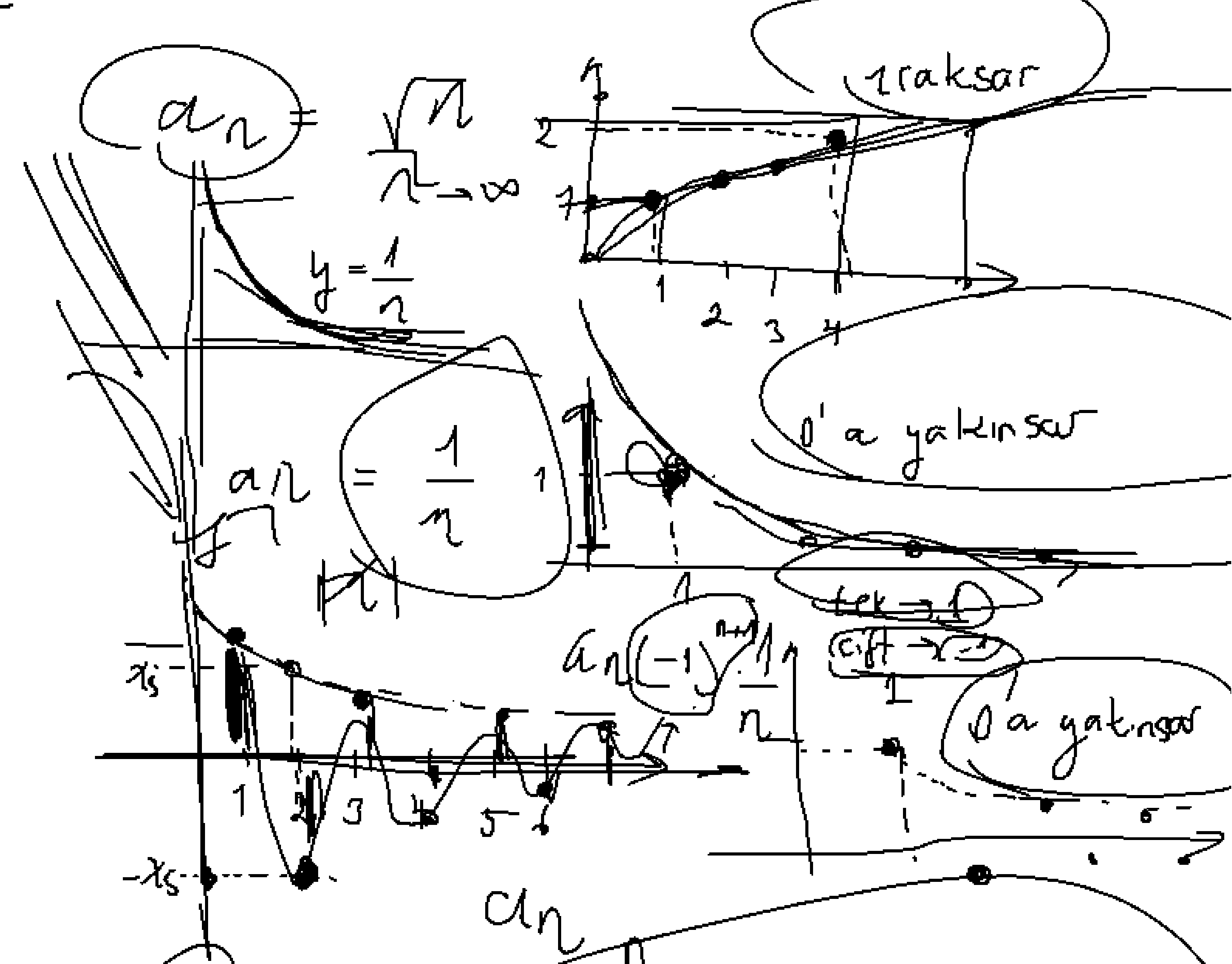
12, 14, 16, 18, ...

12 14 16 18

$\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$

$\sqrt{n}$ ∞

$n = 1$



n arttıkça bir değere yaklaşabilir

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \; \ldots$

$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad \left(\frac{n-1}{2n}\right)$

0'a

$0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots\ldots 1 - \frac{1}{n}$

1'e yaklaşmaktadır.

$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots \sqrt{n}$

n arttıkça artar

$(-1), (1), (-1), (1) \quad (-1)^{n+1}$

$-1, 1$ arasında

her M'e karşılık N'den büyük

$a_n > M$'i sağlayacak bir N sayısı

varsa sonsuza ıraksar

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \qquad a_n \to \infty$$

her m'e karşılık $n > N$

$a_n < m$ şekilde bir N varsa

a_n eksi sonsuza ıraksar

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty \qquad a_n \to -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(a_n + b_n)}_{\substack{\text{ayrı ayrı} \\ \text{limiti olmasına} \\ \text{gerek yok}}} = A + B$$

ÖRN

$\{a_n\} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ıraksar

$\{b_n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ ıraksar

$\{a_n + b_n\} = \{0, 0, 0, \ldots\}$ 0'a yakınsar

$c \neq 0$ için $\{c \cdot a_n\}$ yakınsarsa

$\{a_n\}$ yakınsar ($k = 1/c$)

(sandviç kuralı)

$$\left(1/n \to 0 \right)$$

$$\frac{\cos n}{n} \to 0$$

$\frac{1}{2^n} \to 0$

$(-1)^n \frac{1}{n} \to 0$

=LOPITAL=

$\alpha \geq 1$ için tanımlıdır. diğerlere uygundur.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$?

$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ her x için

$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x|<1)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (her x için)

her n için $a_n \leq a_{n+1}$ $\{a_n\}$

azalmayan dizidir.

$a_n = N$ $1, 2, 3, \ldots$

$a_n = \frac{n}{n+1}$ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$a_n = \{3\}$ $3, 3, 3, \ldots$

her n için $a_n \leq M$ olacak şekilde

bir M varsa M üst sınırdır.

(en küçük üst sınır)

?

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \cdots + a_n$

1\. 2. 3. n.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 \quad a_n$

1\. kısmi toplam

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots \frac{1}{2^{n-1}}$

S_1

1\. $S_1 = 1$ $\qquad 2 - \frac{1}{1} \qquad 1$

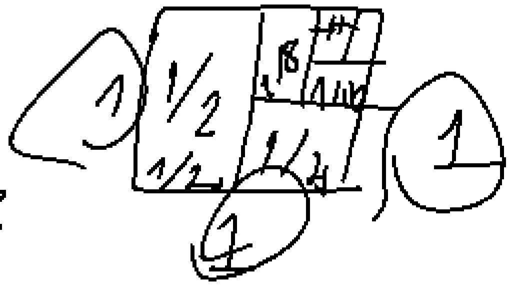
2\. $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad 2 - \frac{1}{2} \qquad 3/2$

3\. $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \qquad 2 - \frac{1}{4} \qquad 7/4$

1\. terimi

$S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ 2'ye yakınsar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \to 2$$

$$\{a_n\}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + \overset{n.}{a_n} + \cdots$$

sonsuz seri

a_n n. terim

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\{S_n\}$ kısmi top. dizisi

S_n sayısı n. kısmi toplam

L limitine yakınsıyorsa

Seri yakınsaktır. toplamının L olduğunu

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

* Seri yakınsamıyorsa ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, , \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, , \quad \sum a_n$$

Geometrik Seri:

$$a + a.r + a.r^2 + a.r^3 + \ldots \; ar^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$$

pozitif

r oranı

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \;----\; \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

r oranı negatif

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

r = 1 ise n. kısmi toplamı

$$S_n = a + \underbrace{a.1 + a\,1^2 + \cdots}_{n.a} + a.1^{(n-1)}$$

seri ıraksar

$\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$

r = −1 seri ıraksar

kısmi toplam a ve 0 arasında salınır.

$|r| \neq 1$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n$$

$$S_n - rS_n = \underbrace{a - ar^n}$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad r \neq 1 \text{ ise } S_n\text{'i} \longrightarrow \text{bulabiliriz}$$

$$\underbrace{|r| < 1}$$

$$n \to \infty \quad r^n \to 0$$

$$|x| < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

$$|r| < 1$$

$$S_n \longrightarrow \frac{a}{1-r} \Rightarrow \text{yakınsar}$$

$$|r| > 1$$

$$|r| > 1 \quad |r^n| \to \underbrace{\infty} \quad \text{Seri ıraksar}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ yakınsaksa } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \text{'de } n.\ \text{kısmi top.}$$

S seri toplamı

a_n sıfıra yakındır çünkü

hem S_n hemde S_{n-1} S'e yakındır

ve farkları a_n dir ki a_n terimi

neredeyse 0'dır

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \boxed{S - S = 0}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsarsa $a_n \to 0$ olacaktır.

$\lim_{n\to\infty} a_n$ yoksa veya 0'a eşit değilse

$\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ ıraksayacaktır.

ÖR

* $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ $\quad n^2 \to \infty$ 0'dan farklı ıraksak

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ $\quad 1 + \frac{1}{n} \to 1$ ($\frac{1}{n} \to 0$) 0'dan farklı ıraksak

* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ ıraksak $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ yoktur (sıçramadan)

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n+5}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+5} = \frac{-1}{2}$

$\frac{-1}{2} \neq 0$ ıraksaktır.

$a_n \to 0$ fakat seri ıraksar.

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ terim}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4 \text{ terim}} + \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ terim}}$$

seri ıraksar

* seri terimleri 0'a yakınsar.

Seri Birleştirme

* 2 yakınsak seri

$\sum a_n = A$ ve $\sum b_n = B$

$\sum a_n + b_n = A + B$

Irak serinin $(k \neq 0)$ olmak üzere katları da ıraksayacaktır.

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ ıraksakken

$\sum (a_n + b_n)$ yakınsayabilir.

* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsar'sa $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$'de yakınsar
$(k > 1)$

Seri Yeniden İndisleme

İndisin baş değerini h birim yükseltmek için a_n'in formülünde n yerine $n-h$ yazalım

Bir geometrik seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}, \quad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$'in her n için $a_n \geq 0$ sonsuz seri ele alalım

her kısmi toplam ya öncekine eşit ya da büyük olur böylece azalmayan bir dizi oluşturmuş olursunuz.

$$S_{n+1} = S_n + a_n$$

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq S_4 \leq S_5 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$$

★ eğer kısmi toplamları üstten ★ sınırlı ise yakınsar.

Harmonik Seri (Özel Durum)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}$$

Harmonik seri ıraksar çünkü kısmi toplamların üst sınırı yoktur.

İntegral Testi:

harmonik seri ile ilişkili n. terim $1/n$ değil de $1/n^2$ olan seriyi ele alalım yakınsar mı?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

bunu $\int^{\infty}_{1} (1/x^2)\,dx$ integrali ile

karşılaştırarak belirleyebiliriz.

$f(x) = 1/x^2$ olarak düşünelim

$y = 1/x^2$ eğrisi altında kalan

grafiği

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots f(n)$$

$$< f(1) + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}\,dx}_{1} \quad a^1 = n$$

→ integrasyon tek.

$$1 + 1$$

$S_n < 2$ ile sınırlıdır.

a_n $\mathbb{Z}^+$ terimli bir dizi olsun.

f, her $x \geq N$ $(N \in \mathbb{Z}^+)$ için sürekli, pozitif ve azalan bir fonksiyonudur.

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ serisi} \qquad \int_N^{\infty} f(x)\,dx \text{ integralinin}$$

ya ikisi de yakınsar ya da ıraksar.

ÖR: bir p serisi;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

$p>1$ ise yakınsar $p \leq 1$ ise ıraksar olduğunu gösterin.

$p>1$ ise; $f(x) = 1/x^p$, x'in pozitif azalan bir fonksiyonu olur.

devamı integrasyon tekniklerinde

Karşılaştırma testi

$\sum a_n$ negatif terim içermeyen bir seri;

a) $N \in \mathbb{Z}$ her $n > N$ için $a_n \leq c_n$ olacak şekilde bir $\sum c_n$ serisi var ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır

b) $N \in \mathbb{Z}$ $n > N$ için $a_n \geq d_n$ olacak şekilde ıraksak bir $\sum d_n$ var ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ serisi ıraksaktır.

n. terimi

$$\frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

Iraksak olan harmonik serinin n. teriminden büyüktür.

Limit Karşılaştırma Testi:

her $n \geq N$ $(N \in \mathbb{Z})$ $a_n > 0$ ve $b_n > 0$ olsun.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ise, $\sum a_n$ ve $\sum b_n$'in ikisi birden yakınsak veya ıraksak.

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ise $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır.

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ise $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$'de ıraksaktır.

ÖR/

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$$

$$a_n \to \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \qquad b = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2$$

n. terimi harmonik n. terimden büyük.

ÖR
$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\dots\frac{1}{2^n-1}+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1} \qquad a_n=\frac{1}{2^n} \text{ gibi davranır}$$

$$b_n=\frac{1}{2^n} \text{ alalım.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \text{ yakınsaktır.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{2^n-1}=\frac{1}{1-\cancel{(1/2^n)}}\right)$$

$\lim \Rightarrow 1$ dur.

a_n de yakınsaktır.

Oran Testi

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ büyüme oranı ölçer

geometrik dizilerde sbt "r" 'dir.

$\sum a_n$ pozitif terimli seri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$$

- $p < 1$ ise [illegible]
- $p > 1$ ise veya $p = \infty$ ise [illegible]
- $p = 1$ ise [illegible]

ÖR 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}+5/3^{n+1}}{2^n+5/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1}+5}{2^n+5}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2 + 5\cdot 2^{-n}}{1 + 5\cdot 2^{-n}} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{3} = 2/3$$

$2/3 < 1$ yakınsaktır

Kök testi

$$a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ tek} \\ 1/2^n, & n \text{ çift} \end{cases}$$

$\sum a_n$ yakınsar mı?

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \dots$$

$n \to \infty$ n. terim $\to 0$