

PHYSIQUE

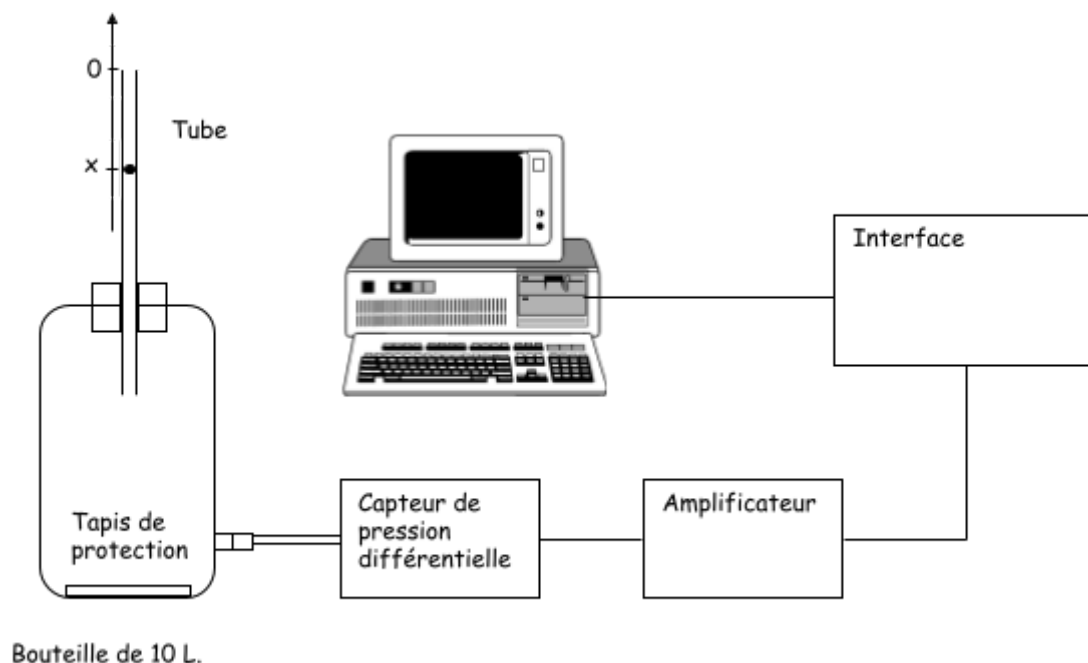
A propos de l'expérience de Rüchardt

Tout au long de ce problème, nous nous proposons d'étudier la modélisation de l'expérience de Rüchardt. L'objet de cette expérience est de mesurer le rapport des capacités thermiques à

pression et à volume constants : $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, pour un gaz. Bien au delà de cette mesure, ce problème revisite cette expérience en essayant, à partir des données expérimentales, de la modéliser de façon plus réaliste.

I - Description du dispositif expérimental.

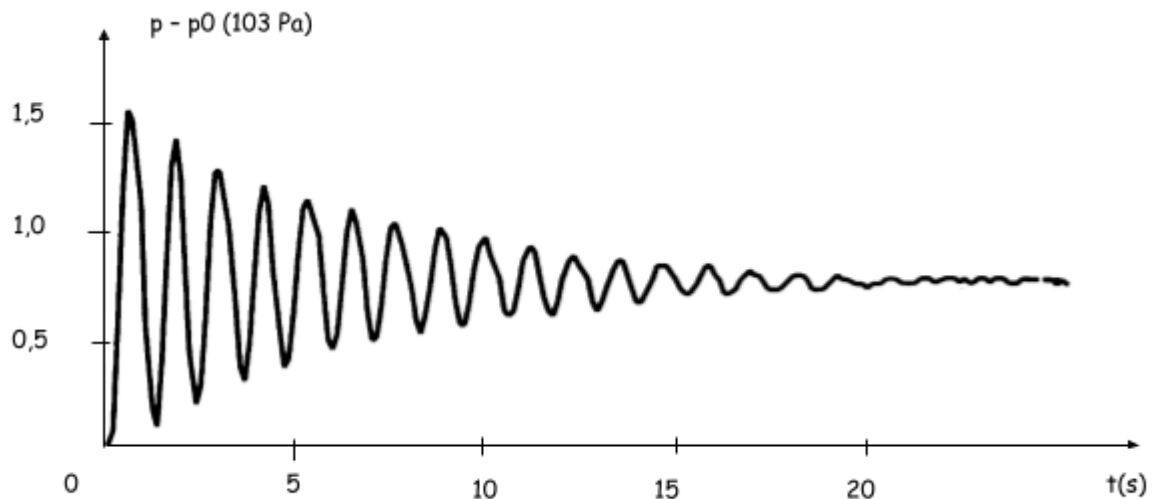
Une bille de fer peut coulisser dans un tube de verre calibré de diamètre intérieur égal à celui de la bille. Le tube est fixé sur un récipient de volume 10 L. La bille, introduite au sommet du tube et lâchée sans vitesse initiale, va effectuer des oscillations de grandes amplitudes - quelques dizaines de centimètres.



(fig. 1)

Le matériel permettant d'enregistrer la différence de pression entre l'air extérieur, notée p_0 et l'air intérieur à la bouteille, notée p , est décrit ci-dessus. Le capteur de pression différentielle fournit une tension proportionnelle à la différence : $p - p_0$, soit $V_s = A.(p - p_0)$.

- A partir de l'étude de l'enregistrement (fig. 2), justifier la présence d'un amplificateur



(fig. 2)

II - Modèle simplifié : détermination de γ .

Nous adopterons les notations suivantes pour un gaz parfait diatomique :

masse de la bille :	$m = 16,6 \text{ g}$;
diamètre interne du tube :	$d = 16 \text{ mm}$;
section interne du tube calibré :	$s = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$;
surface latérale du système (tube et bouteille) :	$S = 0,232 \text{ m}^2$;
volume avec le tube :	$V_0 = 10,14 \text{ L}$;
pression atmosphérique :	$p_0 = 10^5 \text{ Pa}$;
pression régnant à l'intérieur du flacon :	p ;
masse volumique du gaz sous 10^5 Pa et à 293 K :	ρ_0 ;
masse volumique du gaz :	ρ ;
accélération de la pesanteur :	$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$;
capacité thermique molaire à pression constante :	$C_p = 7/2 R$;
capacité thermique molaire à volume constant :	$C_v = 5/2 R$;
quantité de matière :	n ;
	$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$;
rapport des capacités thermiques :	
Température ambiante :	$T_0 = 293 \text{ K}$;
Température du gaz dans le récipient à t	T ;
Position de la bille à t	x ;
Vitesse de propagation du son dans l'air à 293 K	$c = 341 \text{ m.s}^{-1}$
Viscosité cinématique de l'air à 293 K sous un bar	ν ;
Viscosité dynamique de l'air à 293 K sous un bar	$\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$;

On considèrera que la transformation du gaz enfermé dans le récipient est isentropique, sauf dans la partie V.

II - 1 Exprimer la pression dans le récipient lorsque la bille à atteint sa position d'équilibre. On notera p_e la pression à l'équilibre. Evaluer, à partir de la (fig. 2), la valeur numérique de cette pression.

II - 2 On se place maintenant dans une situation où la bille est hors équilibre. On cherche à déterminer l'équation différentielle du mouvement.

a - Montrer que la variation de pression $p - p_0$ peut s'écrire :

$$p - p_0 = -\frac{\gamma x p_0 S}{V_0}$$

b - En déduire d'une part l'équation différentielle du mouvement de la bille, et d'autre part, l'équation différentielle régissant la pression à l'intérieur du récipient.

c - L'oscillation de la bille prévue par ce modèle est-elle harmonique ? Justifier.

d - Déterminer la pulsation d'oscillation ω_0 , et toujours à partir de l'enregistrement (fig. 2), donner une valeur du rapport des capacités thermiques : γ . Conclusion.

e - En supposant un faible amortissement qui amène lentement la bille à la position d'équilibre, dont on ne tiendra pas compte dans les calculs, déterminer cette position d'équilibre x_e de la bille. Expérimentalement, on mesure $x_e = -41$ cm. Conclusion.

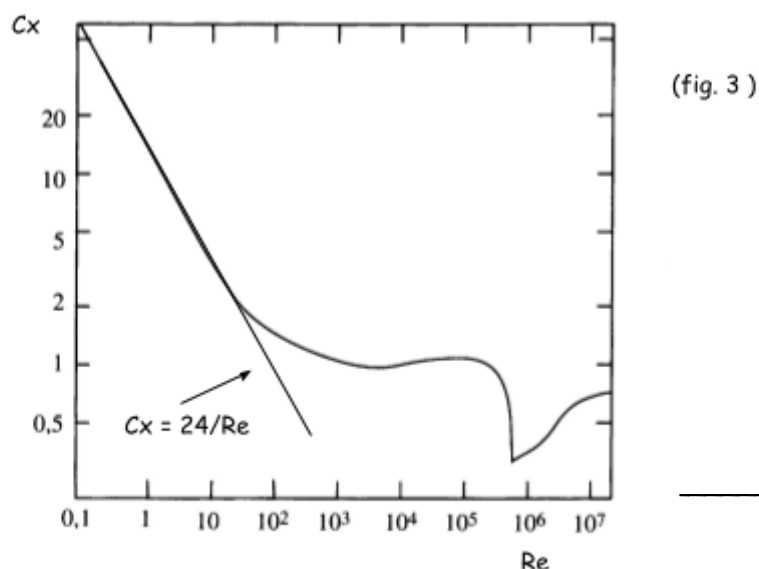
III - Première modélisation de la transformation réelle : amortissement par frottement fluide.

III - 1 - Montrer que le nombre de Reynolds notée Re , est définit par $Re = \frac{vd}{\nu}$.

d désigne une longueur caractéristique de l'écoulement fluide, v la vitesse de l'écoulement et ν la viscosité cinématique du fluide. Déterminer la dimension de Re .

III - 2 - La forme générale de la force de frottement visqueux pour une sphère s'écrit :

$\vec{F} = -\frac{1}{2} \rho v^2 S_e C_x (Re) \frac{\vec{v}}{v}$ où C_x est le coefficient de traînée et S_e le maître couple (ou surface projetée). A partir de la (fig. 3), montrer que pour les faibles nombres de Reynolds, la force de



viscosité peut s'écrire : $\vec{F} = -6\pi\eta \frac{d}{2} \vec{v}$: (formule de Stoke).

III - 3 Etablir l'équation différentielle du mouvement de la bille.

On posera $2\lambda_1 = 6\pi \frac{d}{2} \eta/m$.

III - 4 Déterminer la dimension de λ_1 .

III - 5 Expérimentalement, on trouve $\lambda_1 = 0,167$ SI. Comparer à la valeur théorique.

III - 6 Retour à l'expérience : analyse de résultats expérimentaux.

A l'aide des résultats précédents ainsi que des données du tableau suivant - qui regroupent les résultats de deux expériences -, donner deux arguments qui ne valident pas l'utilisation de l'amortissement fluide.

V_0 (L)	λ_1 (SI)	ω_0 (rad.s ⁻¹)
0,69	0,561	20,9
10	0,167	5,59

IV - Deuxième modélisation : forces de viscosité dans le gaz.

L'amortissement de la bille peut être attribuée à des forces de viscosité produites au sein du gaz. En oscillant, la bille va engendrer une onde sonore qui est absorbée par le gaz.

IV - 1 Etablir l'équation locale de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4)$$

IV - 2 Rappeler l'équation d'Euler pour le mouvement d'un fluide non-visqueux. Donner la signification de chacun des termes.

IV - 3 Pour tenir compte de la viscosité du gaz on ajoute aux forces volumiques une force

volumique supplémentaire : $\eta \vec{\Delta} \vec{v}$. Montrer que l'équation du mouvement d'une particule de fluide, ici l'air, peut s'écrire :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p + \eta \vec{\Delta} \vec{v} \quad (5)$$

$\vec{v}$ désigne le champ des vitesses du gaz et $\vec{\Delta}$ désigne le laplacien vectoriel. On négligera la force volumique de pesanteur.

IV - 4 On note ρ , p et $\vec{v}$ les valeurs instantanées respectivement de la masse volumique, de la pression et de la vitesse d'une particule de fluide, ρ_0 , p_0 et $\vec{v}_0 = \vec{0}$ les valeurs moyennes de ces mêmes grandeurs à l'équilibre et ρ' , p' et $\vec{v}'$ les écarts, du premier ordre par rapport aux valeurs moyennes.

Linéariser, en négligeant les termes du second ordres, les équations (4) et (5).

IV - 5 L'hypothèse isentropique étant toujours retenue, montre qu'elle se traduit par :

$$\rho' = \frac{\rho_0 p'}{\gamma p_0} \quad (6)$$

IV - 6 En déduire que l'équation de propagation de la variation de pression, p' , peut

s'écrire :

$$\Delta p' + \tau_2 \frac{\partial(\Delta p')}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

On indique que $\text{div}(\vec{\Delta v}) = \Delta(\text{div } v)$ et que $\text{div}(\text{grad } A) = \Delta A$ où Δ est le laplacien scalaire.

IV - 7 Exprimer τ_2 et c . Déterminer leur dimension physique respective.

IV - 8 On cherche une équation de propagation de p' sous la forme :

$$p'(x, t) = p'_0 \exp(i(k \cdot x - \omega t))$$

avec $\underline{k}$ le vecteur d'onde complexe. Etablir la relation de dispersion.

IV - 9 Montrer que pour le domaine des basses fréquences, la relation de dispersion s'exprime par la relation suivante : $\underline{k} = k_2' + i k_2''$. On exprimera k_2' en fonction de ω et c , et k_2'' en fonction de η , ω , ρ_0 et c .

IV - 10 En déduire la vitesse de phase de cette onde. Le milieu est-il dispersif ? Justifier.

IV - 11 Toujours dans le domaine des basses fréquences, déterminer la longueur caractéristique d'amortissement de l'onde sonore, δ . En déduire le temps caractéristique de l'amortissement. Que peut-on conclure quant à l'importance de cette hypothèse dans le phénomène d'amortissement ?

V -

Troisième modélisation : échanges thermiques au niveau de la paroi.

On supposera dans toute cette partie que la température du gaz emprisonné dans la bouteille, considéré comme un gaz parfait, est uniforme à chaque instant, comme toutes les variables d'état du gaz.

V - 1 Comparer qualitativement la conductivité thermique du verre et celle d'un gaz tel que l'air.

V - 2 Pour tenir compte de l'ensemble des transferts thermiques entre le gaz et les parois du récipient, on adopte la loi de Newton :

INCORPORER Equation.DSMT4 (8)

T_0 représente la température, supposée constante, du verre constituant la bouteille, T la température du gaz qu'elle contient, S la surface de verre en contact avec le gaz dans la bouteille et h le coefficient qui rend compte des différentes formes d'échanges thermiques.

a - A partir du premier principe de la thermodynamique, montrer que $\dot{Q}$ peut s'écrire :

INCORPORER Equation.DSMT4 (9)

b - A l'aide des équations (8) et (9), de l'équation dynamique de la bille, et de l'équation d'état du gaz, montrer que la pression à l'intérieur de la bouteille est solution de l'équation différentielle suivante :

INCORPORER Equation.DSMT4 (10)

On exprimera $\ddot{x}$ en fonction de h , S , T_0 , p_0 , V_0 et $\text{INCORPORER Equation.DSMT4}$ en fonction de ρ , p_0 , s , m et V_0

c - Montrer que l'équilibre thermique et l'équilibre mécanique existent simultanément.

d - Expérimentalement, on trouve $\gamma = 0,167$ SI. En déduire la valeur de h .

e - On admet, que pour de l'air peu agité en contact avec du verre, h est compris entre 6 et 30 W.m-2K-1. Conclusion.

f - Les résultats expérimentaux regroupés dans le tableau suivant vous permettent-ils de conclure quant à la validité du modèle développé.

$V_0(L) \neq (SI) \neq 0 \text{ (rad.s}^{-1} \text{)S}$

$(m^2) \neq V_0/SV_0. \neq 020,690,5620,90,0497,8.10^{-4}301100,175,560,2327,2.10^{-4}312$

Fin de la partie Physique

CHIMIE

A propos du Zinc

Le zinc est présent dans l'écorce terrestre à raison de 80 parties par million en masse