

Câu 41. [2D2-4.2-3] (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH -HỌC KÌ I-2018) Tìm tất cả các

giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m \ln x - 2}{\ln x - m - 1}$ nghịch biến trên $(e^2; +\infty)$.

A. $m \leq -2$ hoặc $m = 1$.

B. $m < -2$ hoặc $m = 1$.

C. $m < -2$.

D. $m < -2$ hoặc $m > 1$.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định $D = (0; +\infty) \setminus \{e^{m+1}\}$.

$$y' = \frac{-m^2 - m + 2}{x(\ln x - m - 1)^2}$$

Cách 1:

$$\begin{cases} -m^2 - m + 2 < 0 \\ e^{m+1} \notin (e^2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \Leftrightarrow m < -2 \\ m + 1 \leq 2 \end{cases}$$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương

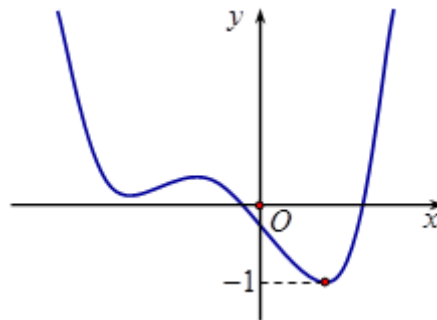
Cách 2: Đặt $t = \ln x$, ta biết rằng hàm số $f(x) = \ln x$ đồng biến trên $(e^2; +\infty)$.

Xét hàm số $g(t) = \frac{mt - 2}{t - m - 1}$ với $t \in (2; +\infty)$, ta có $g'(t) = \frac{-m^2 - m + 2}{(t - m - 1)^2}$.

Vậy hàm số ban đầu nghịch biến trên $(e^2; +\infty) \Leftrightarrow$ hàm số g nghịch biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} g'(t) < 0 \\ m + 1 \notin (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - m + 2 < 0 \\ m + 1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \Leftrightarrow m < -2 \\ m + 1 \leq 2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Câu 44. [2D2-4.2-3] (THPT Chuyên Lam-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.

Chọn D.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy $f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó xét hàm số $g(x) = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot [2^{f(x)} \cdot \ln 2 - 3^{f(x)} \cdot \ln 3]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2^{f(x)} \cdot \ln 2 - 3^{f(x)} \cdot \ln 3 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình $2^{f(x)} \cdot \ln 2 - 3^{f(x)} \cdot \ln 3 = 0$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} = \log_2 3 \Leftrightarrow f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(\log_2 3) \approx -1,4 \quad (\text{loại})$$

Do đó số điểm cực trị của hàm $g(x)$ cũng bằng số điểm cực trị của hàm $f(x)$.

Tức là hàm $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 32. [2D2-4.2-3] (THPT Triệu Sơn 3-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x). \text{ Tính đạo hàm của hàm số } y = \frac{1}{f^2(x)}$$

A. $y' = \frac{x-1}{2(x^2-2x)}$

B. $y' = \frac{-4x+4}{(x^2-2x)\ln^4(x^2-2x)}$

C. $y' = \frac{4-4x}{(x^2-2x)\ln^3(x^2-2x)}$

D. $y' = \frac{2x-2}{(x^2-2x)^2}$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y = \frac{1}{f^2(x)} = \frac{1}{\ln^2(x^2-2x)}$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{[\ln^2(x^2-2x)]'}{\ln^4(x^2-2x)} = -\frac{2(2x-2)\ln(x^2-2x)}{(x^2-2x)\ln^4(x^2-2x)} = -\frac{4x-4}{(x^2-2x)\ln^3(x^2-2x)}$$

Câu 3: [2D2-4.2-3] (THPT Kim Liên-Hà Nội năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

Chọn mệnh đề **sai**?

A. Hàm số có 1 điểm cực trị.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. $f(-1) = \frac{5}{e}$

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $f'(x) = e^x(2x - 2 + x^2 - 2x + 2) = e^x x^2$.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x x^2 = 0$ có nghiệm kép $x = 0$ và $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị.

Vậy A sai và B đúng.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Vậy C đúng.

Ta có: $f(-1) = \left[(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2 \right] e^{-1} = \frac{5}{e}$. Vậy D đúng.

Câu 32: [2D2-4.2-3] (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = e^{10x+20}. \text{ Tìm } f^{(2018)}(x).$$

A. $f^{(2018)}(x) = 200 \cdot e^{10x+20}$

B. $f^{(2018)}(x) = 10^{2018} \cdot 20^{1009} \cdot e^{10x+20}$

C. $f^{(2018)}(x) = 10! \cdot e^{10x+20}$

D. $f^{(2018)}(x) = 10^{2018} \cdot e^{10x+20}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có

$$f'(x) = (e^{10x+20})' = (10x+20)' e^{10x+20} = 10e^{10x+20};$$

$$f''(x) = [f'(x)]' = (10e^{10x+20})' = 10^2 e^{10x+20};$$

$$f'''(x) = [f''(x)]' = (10^2 e^{10x+20})' = 10^3 e^{10x+20};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(2018)}(x) = 10^{2018} e^{10x+20}$$

Câu 45: [2D2-4.2-3] (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN-LẦN 4-2018) Viết phương trình tiếp

tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

A. $y = 4x - 4$

B. $y = (4 \ln 2)x - 8 \ln 2 + 4$

C. $y = 4(1 + \ln 2)x - 8 \ln 2 - 4$

D. $y = 2x$

Lời giải

Chọn C.

Hàm số $y = f(x) = x^x$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $y = f(x) = x^x \Rightarrow \ln f(x) = \ln x^x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln x$.

Lấy đạo hàm hai vế, ta có

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 + \ln x \Rightarrow f'(x) = f(x)(1 + \ln x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^x (1 + \ln x) \Rightarrow f'(2) = 2^2 (1 + \ln 2) = 4(1 + \ln 2)$$

Ta có $f(2) = 2^2 = 4$.

Vậy, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ bằng 2 là

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) \text{ hay } y = 4(1 + \ln 2)x - 8 \ln 2 - 4.$$

Câu 39: [2D2-4.2-3] (THPT CAN LỘC HÀ TĨNH-2018) Cho hàm số $y = \left(\frac{2017}{2018}\right)^{-e^{5x} + (m+3)e^x + 2}$. Biết rằng $\forall m \leq a.e^b + c$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$) thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; 5)$. Tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 7$.

B. $S = 9$.

C. $S = 8$.

D. $S = 10$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y' = \ln \frac{2017}{2018} (-5e^{5x} + (m+3)e^x) \left(\frac{2017}{2018}\right)^{-e^{5x} + (m+3)e^x + 2}$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; 5)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (2; 5)$

$$\Leftrightarrow -5e^{5x} + (m+3)e^x \leq 0, \forall x \in (2; 5) \Leftrightarrow m \leq 5e^{4x} - 3, \forall x \in (2; 5) \Leftrightarrow m \leq 5e^8 - 3$$

Vậy $\begin{cases} a = 5 \\ b = 8 \\ c = -3 \end{cases}$. Suy ra $S = a + b + c = 10$.

Câu 49: [2D2-4.2-3] (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ-LẦN 5-2018) Tính đạo hàm cấp n ($n \in \mathbb{N}^*$) của hàm số $y = \ln|2x-3|$.

A. $y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{2}{2x-3}\right)^n$.

B. $y^{(n)} = (n-1)! \left(\frac{2}{2x-3}\right)^n$.

C. $y^{(n)} = (-1)^n (n-1)! \left(\frac{2}{2x-3}\right)^n$.

D. $y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{1}{2x-3}\right)^n$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y = \ln|2x-3| \Rightarrow y' = \frac{2}{2x-3}$

$$\Rightarrow y'' = 2^2 \cdot \frac{(-1) \cdot 1}{(2x-3)^2}$$

$$\Rightarrow y''' = 2^3 \cdot (-1)^2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{(2x-3)^3} = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{2}{2x-3}\right)^n$$

Giả sử $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \left(\frac{2}{2x-3}\right)^n$ (1). Ta chứng minh công thức (1) đúng. Thật vậy:

Với $n=1$ ta có: $y' = \frac{2}{2x-3}$.

Giả sử (1) đúng đến $n=k$, $2 \leq k \in \mathbb{N}^*$ tức là $y^{(k)} = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \left(\frac{2}{2x-3}\right)^k$.

Ta phải chứng minh (1) đúng đến $n = k + 1$, tức là chứng minh $y^{(k+1)} = (-1)^k \cdot k! \left(\frac{2}{2x-3} \right)^{k+1}$.

Ta có:
$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \left[\left(\frac{2}{2x-3} \right)^k \right]' = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot 2^k \cdot \frac{(-1)2k(2x-3)^{k-1}}{(2x-3)^{2k}}$$
$$= (-1)^k \cdot k! \cdot \frac{2^{k+1}}{(2x-3)^{k+1}} = (-1)^k \cdot k! \left(\frac{2}{2x-3} \right)^{k+1}$$

Vậy
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \left(\frac{2}{2x-3} \right)^n$$

Câu 7. [2D2-4.2-3] (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC -LẦN 1-903-2018) Tính đạo hàm cấp một của

hàm số $y = \log_2(2x+1)$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty \right)$.

A. $\frac{2}{(2x+1)\ln x}$

B. $\frac{2}{(2x+1)\ln 2}$

C. $\frac{2\ln 2}{2x+1}$

D. $\frac{2}{(x+1)\ln 2}$

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \left(-\frac{1}{2}; +\infty \right)$.

$$y' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2} = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}$$