

Per risolvere il problema ho impostato un sistema con una equazione e disequazioni. Il sistema calcola il numero di partecipanti (N) e il punteggio degli N-2 primi (P). Per comodità ho usato "x" per indicare il doppio del punteggio dei primi ($x = 2P$) (così da lavorare con numeri interi dato che i punti possono essere anche "mezzi"). L'equazione che ho impostato è questa:

$$[(N-2)(N-3)/2 + (2(N-1) - 1 - 4*2)] / (N-2) = x/2$$

- $(N-2)(N-3)/2$: i punti cumulativi degli N-2 primi a pari merito giocando tra loro
- $2(N-1) - 1$: i punti totali in palio dei due secondi in tutti i loro incontri (-1: in quanto, altrimenti, calcolerei due volte l'incontro tra i due secondi)
- $4*2$: i punti che hanno ottenuto in totale i due secondi a pari merito
- $(2(N-1) - 1 - 4*2)$: i punti cumulati ottenuti dagli N-2 primi ai due secondi
- $[(N-2)(N-3)/2 + (2(N-1) - 1 - 4*2)]$: i punti cumulati totali degli N-2 primi
- $/ (N-2)$: per calcolare i punti che hanno ottenuto ognuno degli N-2 primi.

Ora i passaggi per giungere alla soluzione del problema:

- semplifico il numeratore:

$$(N-3)/2 + (2N-11)/(N-2) = x/2$$

- scompongo la seconda frazione per isolare il valore di N:

$$(N-3)/2 + [2(N-2) - 7] / (N-2) = x/2$$

- semplifico nuovamente per giungere a isolare dove può esserci in valore decimale:

$$(N-3)/2 + 2 - 7/(N-2) = x/2$$

- moltiplico tutto per 2 per eliminare le frazioni e trovare x:

$$N - 3 + 4 - 14/(N-2) = N + 1 - 14/(N-2) = x$$

Per avere un risultato "x" intero, il numero 14 deve essere divisibile per (N-2).

I divisori di 14 sono 1, 2, 7 e 14:

- escludo 1 e 2 che, ovviamente, non portano a valori di N ammissibili

- con 7:

-- $N-2 = 7$, quindi $N = 9$

-- $x = 9 + 1 - (14/7) = 8$

-- con $x=8$ il punteggio dei primi P sarebbe 4

-- 4 è il punteggio dei secondi, ma i primi non possono avere i loro stessi punti

- con 14:

-- avrei $N-2 = 14$, quindi $N = 16$

-- $x = 16 + 1 - (14/14) = 16$

-- con $x=16$ il punteggio dei primi P è 8.

Conclusione:

- i giocatori erano **16**

- i 14 primi hanno totalizzato 8 punti ciascuno

- i Doc e Rudy hanno totalizzato 4 punti ciascuno

- il totale dei punti "quadra":

-- $(14 * 8) + (2 * 4) = 112 + 8 = 120$ punti

-- che corrisponde alle partite giocate da 16 scacchisti: $(16 * 15) / 2 = 120$.

Si è dimostrato che solo nel caso di 14 giocatori primi a 8 punti e 2 giocatori secondi a 4 punti sono rispettati i vincoli del problema.
Resta quindi da verificare se esiste effettivamente una tabella degli incontri che produca tale risultato.

Con l'aiuto di un programma e procedendo per tentativi, ho individuato una configurazione che soddisfa tutte le condizioni richieste:

<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1fY-UlWBc0XN2UOmWbiz5c-PdNRRN03gZ/edit>

La tabella presenta una struttura fortemente simmetrica nei risultati:

- i 14 primi pareggiano sempre tra loro
- ciascun primo ottiene una vittoria e un pareggio contro i due secondi
- ciascun secondo perde con sette primi e pareggia con gli altri sette
- per ogni primo, quando un secondo perde l'altro pareggia, e viceversa
- i due secondi pareggiano tra loro.

Nonostante vari tentativi, non sono riuscito a trovare una configurazione diversa che conduca allo stesso risultato finale.

Questo mi ha portato a chiedermi se la soluzione trovata sia l'unica possibile e se esista una motivazione matematica che spieghi tale rigidità.

Il ragionamento che segue non è rigoroso, ma intende fornire una spiegazione plausibile del perché la soluzione sembri sostanzialmente unica.

Quanto espongo è il risultato di ricerche in rete a cui man mano ponevo le mie "farneticazioni" (ho cercato di riassumere quanto mi è parso significativo delle risposte che ho ottenuto).

I due secondi giocano complessivamente 15 partite ciascuno: 14 contro i primi e una tra di loro.

Per terminare il torneo con 4 punti a testa, devono ottenere in totale 8 punti complessivi:

- mezzo punto ciascuno deriva necessariamente dal pareggio nel loro scontro diretto
- restano quindi 7 punti che i primi devono concedere ai secondi nelle 28 partite primo-secondo.

Ogni primo deve terminare con esattamente 8 punti.

Se i 14 primi pareggiano sempre tra loro, ciascuno ottiene 6,5 punti dagli scontri diretti.

Per arrivare a 8 punti, mancano quindi esattamente 1,5 punti, che devono provenire dagli incontri con i due secondi.

Questo è possibile solo se ogni primo ottiene una vittoria e un pareggio contro i secondi.

Se anche un solo primo vincesse una partita contro un altro primo invece di pareggiare, salirebbe a 8,5 punti.

Per tornare a 8, dovrebbe perdere mezzo punto contro un secondo.

Ma quel mezzo punto in più farebbe salire un secondo oltre i 4 punti, rompendo l'equilibrio della classifica.

Si innescherebbe così un effetto domino che coinvolgerebbe altri incontri, rendendo impossibile mantenere contemporaneamente quattordici primi a 8 punti e due secondi a 4.

Il pareggio tra i due ultimi in classifica non è quindi una scelta dettata dalla "cortesìa", ma una necessità matematica.

Se uno dei due secondi vincesse il derby, salirebbe a 4,5 punti e l'altro scenderebbe a 3,5.

Per riportare il vincitore a 4 punti, sarebbe necessario fargli perdere mezzo punto contro un primo, ma ciò aumenterebbe il punteggio di quel primo a 8,5, rompendo nuovamente l'equilibrio del gruppo di testa.

Il pareggio tra i due secondi è dunque l'unico modo per fissare definitivamente le loro posizioni a 4 punti senza interferire con la distribuzione dei punteggi dei primi.

La tabella degli incontri è antisimmetrica rispetto alla diagonale principale:

- il risultato di un incontro e quello del suo simmetrico sommano sempre a 1
- se A vince con B nella cella (A,B) c'è 1 e nella cella (B,A) c'è 0
- un pareggio corrisponde a due valori 0,5 nelle due celle simmetriche.

Si può inoltre verificare che la matrice 16x16 associata ai risultati ha rango massimo.

Questo indica che il sistema è estremamente rigido: ogni risultato contribuisce in modo essenziale al punteggio finale e non è possibile modificare localmente un incontro senza che l'effetto si propaghi all'intera struttura.

In questo senso, la configurazione trovata rappresenta un caso limite in cui il sistema è stato "spinto in un angolo": o si mantiene esattamente questa struttura, oppure i vincoli sui punteggi non possono più essere soddisfatti.

Risultati teorici sui tornei, come il teorema di Landau sulle sequenze di punteggi, suggeriscono che distribuzioni estreme di questo tipo saturano i gradi di libertà del sistema

(se ne parla in: <https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/usopen-matematica-2025/>).

Nel nostro caso, la presenza di quattordici punteggi massimi uguali e due minimi uguali rende la soluzione quasi forzata.

Ma i primi devono per forza pareggiare tutti?

È interessante notare che la "rigidità" del sistema non obbliga necessariamente ogni singola partita tra i primi a finire in pareggio.

Il sistema permette infatti un certo "dinamismo interno" senza che il risultato finale cambi.

Si potrebbe immaginare, ad esempio, una configurazione in cui i primi si scambiano vittorie e sconfitte in modo ciclico: il giocatore P1 batte P2, P2 batte P3, e così via fino a P4 che batte P1.

In questo scenario (tecnicamente un *ciclo Hamiltoniano*), ogni giocatore guadagna un punto da una vittoria ma ne perde uno da una sconfitta.

Il bilancio finale per ciascun giocatore rimane identico a quello che avrebbe ottenuto con due pareggi

(e la matrice 16x16 associata a questa nuova configurazione dei risultati ha sempre rango massimo).

Questa variante conferma ulteriormente la solidità del modello: finché lo scambio di punti avviene esclusivamente all'interno del "blocco dei primi", l'equilibrio generale non viene alterato.

Tuttavia, non appena si prova a rompere questa compensazione interna o a coinvolgere i punteggi dei secondi, il sistema perde la sua stabilità e i conti smettono di tornare.

La soluzione "armoniosa" con tutti pareggi resta quindi lo stato fondamentale, il punto di riferimento più semplice per descrivere questo complesso incastro matematico.

I cicli di vittorie e sconfitte sono possibili solo all'interno del gruppo dei primi, che costituisce un sistema chiuso dal punto di vista del bilancio dei punti; i due secondi, invece, non dispongono di alcun meccanismo di compensazione interna, e ogni deviazione dal pareggio tra loro si riflette inevitabilmente sui punteggi dei primi, rompendo l'equilibrio complessivo.