G. Requin ULM – PC – 2003 (6h)

(On peut regretter la notation des champs complexes sous la forme + cc, inhabituelle en CPGE, qui amène une complication inutile pour les candidats, signalons au concepteur du sujet des notations plus modernes pour le vecteur de Poynting !)

1 Calcul de la polarisabilité d'un atome à deux niveaux

1.1 Equations du mouvement

a) La force de rappel est d'origine mystérieuse dans un modèle classique, elle signale simplement l'existence d'un équilibre stable pour l'électron élastiquement lié et de petits mouvement. La force de friction modélise l'énergie perdue par rayonnement au cours du mouvement de l'e^-.

b) $d^2\mathbf{u}/dt^2 = -\omega_0^2\mathbf{u} - \Gamma\, d\mathbf{u}/dt$. En l'absence d'excitation la solution comporte un transitoire de constante de temps $1/\Gamma$ pour un retour à l'équilibre $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. L'atome d'hydrogène a pour rayon de Bohr $a_0 = 0.053$nm. u représente la position moyenne ou barycentrique du nuage électronique associé à l'électron élastiquement lié du modèle.

c) Classiquement tant que $du/dt \ll E/B \approx c$ jusqu'à preuve du contraire. Pour un atome d'H, on peut prendre $du/dt \approx \omega\, a_0$ et alors cela sera valable pour $\omega \ll 10^{19}$ rad.s^{-1}

d) $E(u,t) \cong E(0,t)$ si $u \ll \lambda$soit ici $a_0 \ll 2\pi c/\omega$ ce qui redonne $\omega \ll 2\pi\, 10^{19}$ rad.s^{-1} .

e) $d^2\mathbf{u}/dt^2 = -\omega_0^2\mathbf{u} - \Gamma\, d\mathbf{u}/dt + (q/m)\,\mathbf{E}(0,t)$

1.2 Régime forcé

a) $$\mathbf{u_0} = \frac{q}{m}\frac{\mathbf{E_0}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - i\Gamma\omega} + c.c.$$

b) $\mathbf{p}(t) = q\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{p_0} = q\mathbf{u_0}$

c) $$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - i\Gamma\omega}$$

d) $$\alpha(\delta) = -\frac{q^2}{m\varepsilon_0\omega_0}\frac{1}{2\delta + i\Gamma}$$

e) $P_{fr} = -m\Gamma\,(d\mathbf{u}/dt)^2 = -2\Gamma(m\varepsilon_0/q^2)\,\omega^2|\alpha|^2\,E_0^2$

f) Dans l'équation 1.1 e) sans second membre $\tau = 1/\Gamma$

1.3 Champ rayonné par l'atome

a) Toute particule chargée accélérée rayonne, ici ce sera à la pulsation ω. Ou bien l'ensemble noyau + électron élastiquement lié = dipôle rayonnant.

b) $$\mathbf{A_{rad}}(\mathbf{r},t) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi r}\mathbf{p_0}e^{-i(\omega t - kr)} + c.c.$$ avec k = ω/c. En utilisant la formule d'analyse vectorielle à bon escient ($\mathbf{C} \equiv \mathbf{p_0}$), le gradient étant supposé connu il reste : $$\mathbf{B_{rad,0}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}k\omega\frac{\mathbf{n}\,\Lambda\,\mathbf{p_0}}{r}e^{ikr}$$. Le produit vectoriel assure bien la transversalité du champ.

c) On utilise l'équation de Maxwell Faraday , $\mathbf{rot}\,\mathbf{B} = (1/c^2)\,\partial\mathbf{E}/\partial t$ et on utilise la formule d'analyse vectorielle avec $\mathbf{C} \equiv (\mathbf{n}\,\Lambda\,\mathbf{p_0})/r$ dont le rotationnel sera en $1/r^2$. il vient : $$\mathbf{E_{rad}}(\mathbf{r},t) = -\frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{n}\,\Lambda\left(\mathbf{n}\,\Lambda\,\mathbf{p_0}\right)}{r}e^{-i(\omega t - kr)} + c.c.$$ Ce champ est transverse et on vérifie que $E_{rad}/B_{rad} = c$.

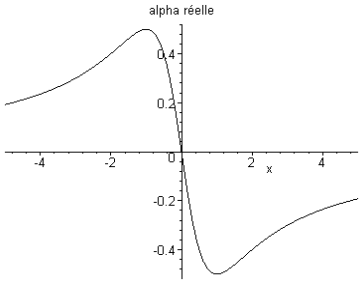
d) & e) $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E}\,\Lambda\,\mathbf{B}/\mu_0$; En passant aux réels on obtient :

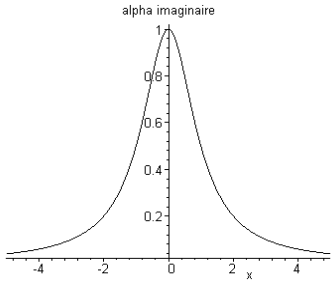
$$\langle\Pi\rangle = -\frac{4\omega^4}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\left[(\mathbf{n}.\mathbf{p_0})^2 - \mathbf{p_0}^2\right]}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\,\mathbf{n}$$

, il apparaît le $\sin^2\theta$ habituel et la valeur moyenne dans le temps plus l'intégration sur la sphère de rayon r aboutit à l'expression : $$P_{rad} = \frac{\varepsilon_0\omega^4}{3\pi c^3}|\alpha|^2\mathbf{E_0^2}$$, qui est bien l'expression habituelle sachant que E_0 est ici la demi amplitude du champ.

f) En identifiant P_{rad} et $|P_{fr}|$, comme annoncé en 1.1 a), on peut exprimer Γ et alors remplacer dans l'expression 1.2 d) de α, la quantité $(q^2/m\varepsilon_0)$ pour aboutir à

l'expression proposée. $\alpha = -\frac{3\lambda_0^3}{4\pi^2}\left(\frac{\gamma\delta}{\delta^2+\gamma^2} - i\frac{\gamma^2}{\delta^2+\gamma^2}\right)$, on pose x = δ/γ et les deux courbes qui s'en suivent sont triviales : $\alpha_R \approx -x/(x^2+1)$ et $\alpha_I \approx 1/(x^2+1)$





2 Propagation de la lumière dans un milieu dilué

2.1 Construction du paquet d'onde

a) χ(ω) est la susceptibilité électrique du milieu, caractéristique des milieux PLHI, si χ = 0 ce milieu a les propriétés du vide et il n'y a aucune réflexion, par continuité on demandera χ « 1 pour pouvoir négliger les réflexions.

b) 0< z < L : $E_\omega = E_0 \exp\{-i(\omega t - k(\omega)z)\}$ + c.c., d'après l'équation de propagation dans le milieu et la non réflexion qui conserve l'amplitude en z = 0 (k(ω) est complexe).

L < Z : $E_\omega = E_0\, e^{-Im(k).L} \exp\{-i(\omega t - k_R(\omega)L - \omega\,(z-L)/c)\}$ + c.c., pour tenir compte de la continuité en L.
L'amplitude de E_ω est différente dans les deux domaines, l'énergie manquante (ou supplémentaire) est absorbée /diffusée (ou amplifiée) par la couche de milieu actif.

c) Le milieu doit être linéaire, ce qui est déjà admis ; la pulsation ϖ est la pulsation centrale (du maximum) du paquet d'onde et σ est à peu de chose près la demi largeur à mi hauteur du paquet.
d) En remplaçant dans (15) l'expression (14), avec le changement de variable x = ω − ϖ, on trouve q = x(t − z/c) et on obtient :

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E_0} e^{-\frac{(t-z/c)^2\sigma^2}{2}} e^{-i\varpi(t-z/c)} + c.c.$$

Le maximum du paquet, situé en (t − z/c) = 0 se propage (sans déformation) à la vitesse c. L'instant d'entrée du paquet, considéré par son maximum, se situe en z = 0 soit $t_e = 0$. on peut donc faire un schéma pour $t_0 < 0$, du paquet d'onde centré en $z_c = -ct_0$, d'extension Δz_e définie par $\exp(-(\Delta z_e/2c)^2\sigma^2/2) = ½$ soit $\Delta z_e = 2\,(2\ln 2)^{1/2} c/\sigma \approx c/\sigma$ faible autour de z_c, et avec de nombreuses oscillations à l'intérieur du paquet.

e) Pour z > L le calcul donne $\mathbf{E}(t,z) = \mathbf{E_0} e^{-\frac{\left(t-k'L-\left(\frac{z-L}{c}\right)\right)^2\sigma^2}{2}} e^{-i\left(\varpi t - k(\varpi)L - \frac{\varpi(z-L)}{c}\right)}$;

f) On sépare dans k(ϖ) et k'(ϖ) les parties réelles et imaginaires et on obtient :

$$f(z,t) = \mathbf{E_0} e^{-\frac{\left[\left(t-k'_R L-\left(\frac{z-L}{c}\right)\right)^2 - k'^2_I L^2\right]\sigma^2}{2}} e^{-k_I(\varpi)L}$$

g) La fonction ∂f/∂z est nulle pour $z_c = c\,[t - k'_R L\,] + L$, le maximum se déplace donc à la vitesse c et en $z_c = L$, on définit $t_s = k'_R L$.
h) $v = [(t_s - t_e)/L\,]^{-1} = k'^{-1}_R$; si le milieu est non absorbant $k'_R = k'$ et on retrouve la vitesse de groupe.

i) Pour avoir $f(L, t_s) < f(0, t_e)$ il faut que : $\sigma^2 \le 2\frac{k_I(\varpi)}{k'^2_I(\varpi)L}$

j) La variable z intervenant avec le même degré dans l'expression de l'enveloppe du paquet d'onde, celui ci aura la même extension en c/σ. A l'ordre suivant dans le développement de k on fait apparaître un terme en $(\omega-\varpi)^2 k''L$ qui compliquerait l'intégration de la formule (16) sauf si ce terme est très inférieur à $(\omega-\varpi)^2/2\sigma^2$, on traduit en $\sigma^2 k''L$ « 1.

k) Après calcul : $\mathbf{E}(t,z) = \mathbf{E_0} e^{-\frac{(t-k'_R z - ik'_I z)^2\sigma^2}{2}} e^{-i(\varpi t - k_R r)} e^{-k_I z} + c.c.$ et la fonction enveloppe réelle : $f(t,z) = \mathbf{E_0} e^{-\frac{\left[(t-k'_R z)^2 - (k'_I z)^2\right]\sigma^2}{2}} e^{-k_I z}$. En faisant l'hypothèse que le facteur d'absorption est constant sur l'étendue du paquet d'onde soit : $k_I(\varpi)\Delta z_m$ « 1, on écrit la condition de demi largeur à mi hauteur pour $\Delta z_m/2$ et on aboutit à une équation : $\Delta z_m^2(k'^2_R - k'^2_I) - 4\,\Delta z_m\, k'_I\,(k'_R + k'_I)\, z_c = 8 \ln 2\,/\sigma^2$, ce qui montre la déformation du paquet d'onde en fonction de son avancement z_c. A la limite $k_I = k'_I = 0$, on trouve $\Delta z_m^2\, k'^2_R = 8 \ln 2\,/\sigma^2 = \Delta z_e^2/c^2$ soit $\Delta z_m/\Delta z_e = v/c$. Dans un milieu non absorbant, la durée du paquet d'onde est la même dans les deux milieux ??

2.2 Application au cas d'un gaz d'atomes à deux niveaux

a) $\chi(\omega) = \rho\alpha$; comme $\chi(\omega)$ est faible on écrira $k = (1 + \chi/2)\omega/c$

b) $\alpha(0) = i\, 3\lambda_0^3/(4\pi^2)$ et $\rho\alpha(0) = i\ 7.76\ 10^{-2}$, valeur effectivement inférieure à 1. L'erreur sur k est d'ordre $(\rho\alpha)^2/8$ soit $7.5\ 10^{-4}$ en valeur relative à la fois sur la partie réelle et sur la partie imaginaire mais pas dans le même sens.

c) $k = \omega/c + \omega\chi(\omega)/2c$ et $k' \cong 1/c + \omega\chi'(\omega)/2c$, en effet $d\alpha/d\omega = d\alpha/d\delta = -\alpha/(\delta+i\gamma)$ et le terme $\omega\chi'(\omega) \approx \omega\rho\alpha/\delta \gg \rho\alpha = \chi$ au voisinage de ω_0.On calcule ensuite $\chi'(\omega)$ et on sépare les parties réelles et imaginaires de k' :

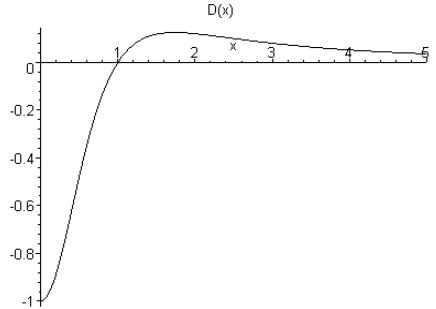
$$k'(\varpi) = \frac{1}{c} + \frac{\varpi}{2c}\frac{3\rho\lambda_0^3}{4\pi^2}\frac{\delta^2-\gamma^2}{\left(\delta^2-\gamma^2\right)^2+4\delta^2\gamma^2} - i\frac{\varpi}{2c}\frac{3\rho\lambda_0^3}{4\pi^2}\frac{2\gamma\delta}{\left(\delta^2-\gamma^2\right)^2+4\delta^2\gamma^2},$$

alors : $$v = \frac{1}{k'_R} = \frac{c}{\frac{1}{c} + \frac{\varpi}{2c}\frac{3\rho\lambda_0^3}{4\pi^2}\frac{\delta^2-\gamma^2}{\left(\delta^2-\gamma^2\right)^2+4\delta^2\gamma^2}}$$. L'échelle de variation de $\alpha(\delta,)$ c'est γ comme on l'a vu en 1.3 f) donc $\sigma \ll \gamma$, assure que le développement limité de $k(\omega)$ est le même pour toutes les pulsations du paquet d'onde.

d) $$v(\delta = 0) = \frac{c}{1 - \frac{\varpi}{2}\frac{3\rho\lambda_0^3}{4\pi^2}\frac{1}{\gamma^2}} > c$$ comme on voit. L'application numérique donne $\omega_0 = \varpi = 9.6\ 10^{15}$, $v = 1.6c$ et $t_s - t_e = 2.1\ 10^{-13}$s. La vitesse de groupe supérieure à c dans un milieu absorbant (et pas simplement dispersif) ou de dispersion anormale, je renvoie à la discussion de cet hiver sur le forum UPS. Le facteur d'at-ténuation de l'amplitude en z = L vaut $\exp(-k_I L)$ et $k_I(\omega) = \frac{\omega}{2c}\frac{3\rho\lambda_0^3}{4\pi^2}\frac{\gamma^2}{\left(\delta^2+\gamma^2\right)}$, pour $\omega = \varpi$ soit $\delta = 0$, on obtient e^{-124} ce qui n'est pas grand chose ! Il y a atténuation comme prévu au 1.2 i) car $k'_I = 0$ pour $\delta = 0$.

e) Dans l'expression de la vitesse v il faut examiner la fonction D(x) :

$\frac{x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2+4x^2}$ où on pose $x = \delta/\gamma$. Cette fonction admet un maximum égal à 0.125



pour $x = \sqrt{3}$, et alors $v_{min} = 0.995c$. C'est pour $\delta < \gamma$ qu'on obtient des vitesses supraluminiques, en revanche ce modèle ne prévoit pas de vitesse très inférieure à c.
Le facteur k_I est divisé par $(1 + x^2) = 4$ et le facteur d'atténuation est encore e^{-31}, l'absorption est toujours très forte.

f) Le facteur $3\rho\lambda_0^3/(4\pi^2)$ vaut maintenant $7.76\ 10^{-9}$, l'absorption est maintenant bien négligeable sur la distance L, car $k_I(\varpi)L \approx 1.2\ 10^{-7}$, on aura toujours une vitesse supraluminique tant que $\delta < \gamma$.

3 Cas d'atomes à trois niveaux

3.1 Polarisabilité de l'atome à trois niveaux

a) $\mathbf{f}_{s\to u} = -\,\mathbf{grad}_{\mathbf{u}}\, V = -\, m\omega_0\Omega\, \mathbf{s}$; $\mathbf{f}_{u\to s} = -\,\mathbf{grad}_{\mathbf{s}}\, V = -\, m\omega_0\Omega\, \mathbf{u}$, effectivement il n'y a pas action – réaction, cette force de couplage est un modèle mais ne correspond pas à une interaction ?

b) $d^2\mathbf{u}/dt^2 = -\,\omega_0^2\mathbf{u} - \Gamma\, d\mathbf{u}/dt + (q/m)\,\mathbf{E}(0,t) - m\omega_0\Omega\,\mathbf{s}$
$d^2\mathbf{s}/dt^2 = -\,\omega_0^2\mathbf{s} - m\omega_0\Omega\,\mathbf{u}$

c) $(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)\,\mathbf{u_0} + \omega_0\Omega\,\mathbf{s_0} = (q/m)\,\mathbf{E_0}$ et $(\omega_0^2 - \omega^2)\,\mathbf{s_0} + \omega_0\Omega\,\mathbf{u_0} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{u_0} = \frac{q}{m}\frac{\mathbf{E_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2\Omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)} + i\Gamma\omega}$$

d) Par substitution :

$$\mathbf{u_0} = -\frac{q}{2m\omega_0}\frac{\mathbf{E_0}}{\delta - \Omega^2/4\delta + i\gamma}$$

e) Qui donne après la simplification (5) : $\alpha = -\frac{q^2}{2m\omega_0\varepsilon_0}\frac{1}{\delta - \Omega^2/4\delta + i\gamma}$.

f) La puissance de la force de friction mécanique modélise toujours la puissance radiative due au dipôle induit par α, on retrouve donc le résultat (22) par analogie du résultat (12).

3.2 La lumière lente

a) Si $\omega = \omega_0$, alors d'après la seconde équation du 3.1 c), on établit $u_0 = 0$ et donc $\alpha = 0$ puis $\chi = 0$ et enfin $k = \omega_0/c$ comme dans le vide. Le couplage a éliminé la résonance à ω_0.

b) C'est le terme δ du dénominateur de (22) qui est négligeable, alors $\alpha \approx Cte \dfrac{\delta}{i\dfrac{4\gamma}{\Omega^2}\delta - 1}$ dont les parties imaginaires et réelles ont effectivement une demi largeur égale à : $\Omega^2/4\gamma$. On souhaite avoir σ plus petit pour que α puisse être considéré comme constant sur tout le paquet d'onde.

c) $$\alpha = -\frac{3\lambda_0^3}{4\pi^2}\left[\frac{x - \dfrac{\Omega^2}{4\gamma^2}}{\left(x - \dfrac{\Omega^2}{4\gamma^2}\right)^2 + 1} - i\frac{1}{\left(x - \dfrac{\Omega^2}{4\gamma^2}\right)^2 + 1}\right]$$ avec $x = \delta/\gamma$ et on retrouve les courbes du 1.3 f) juste décalées en x de $\Omega^2/4\gamma^2$, l'intensité nulle du laser de couplage revenant aux courbes du 1.3 f) comme il est normal.

d) $$k_R'(\omega) = \frac{1}{c} - \frac{\omega}{2c}\frac{3\rho\lambda_0^3}{4\pi^2}\gamma\left(1 - \frac{\Omega^2}{4\delta^2}\right)\left[\frac{\left(\delta - \dfrac{\Omega^2}{4\delta}\right)^2 - \gamma^2}{\left(\left(\delta - \dfrac{\Omega^2}{4\delta}\right)^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\gamma^2\left(\delta - \dfrac{\Omega^2}{4\delta}\right)^2}\right]$$

en $\delta = 0$, il faut garder les termes en $1/\delta$ qui ont le bon goût de se simplifier pour donner :

$$v(\omega_0) = \frac{1}{k_R'} = \frac{c}{1 + 2\omega_0\dfrac{3\rho\lambda_0^3}{4\pi^2}\dfrac{\gamma}{\Omega^2}}$$

.

e) Avec les valeurs numériques précédentes et $\Omega = 1.12\ \gamma$, le calcul numérique donne $v = c/(3.77\ 10^7)$ soit $v = 7.96\ ms^{-1}$, le record de Lene Hau est améliorable !

f) Compte tenu des ordres de grandeurs $v \propto \Omega^2$, donc un faible couplage favorise les faibles valeurs de v, mais sans descendre en dessous de la demi largeur σ du paquet d'onde pour que le couplage soit appliqué à l'ensemble du paquet centré autour de ω_0 (c'était déjà contenu dans la condition (23)). Pour un champ du type 2.1 d), de demi largeur à mi hauteur τ, on obtient $\sigma = (2\ln 2)^{1/2}/\tau = 1.1\ 10^6\ s^{-1}$. Si on prend $\Omega_{min} = \sigma$, cela donne une limite au rapport inférieure Ω/Γ de $1.7\ 10^{-2}$, ce qui est bien inférieur au rapport proposé dans l'expérience.

g) Pour les largeurs spatiales d'impulsion, l'application numérique fournit : $\Delta z_e =$ 771m ! et $\Delta z_m = 20\mu m$ soit L/5.