Mathématiques Appliquées aux Sciences Humaines et Sociales

Niveau introductif

Séances 11 et 12

OPTIMISATION SOUS CONTRAINTE

Problème 1

1. On considère la fonction $F(x; y) = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$ avec $0 \leq x \leq 6$ et $0 \leq y \leq 8$.
Déterminer les coordonnées du point critique de cette fonction et la nature de celui-ci.

2. Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes. Le coût total de production z, exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation

$$z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$$

avec $0 \leq x \leq 6$ et $0 \leq y \leq 8$.

La surface S représentant le coût en fonction de x et y dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est donnée sur la feuille annexe, figure 1.

a. *Le point $A(3; 2; 3)$ appartient-il à la surface S ? Justifier.*

b. *Placer sur la figure 1 le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 2 qui appartient à S.*

c. Soit $y = 2$. *Exprimer alors z sous la forme $z = f(x)$ puis donner la nature de la section de la surface S par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.*

3. La fabrication de x tonnes de savons et de y tonnes des bougies parfumées engendre la contrainte : $x + y = 5$.

a. *Quelle est la nature de l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$?*

b. *Vérifier que, sous cette contrainte, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$ avec $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$.*

c. *Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum puis la valeur de y et le coût de production z qui correspondent.* On note C le point de la surface S qui correspond à ce coût minimum.

d. On donne, sur la feuille annexe 1, figure 2, la projection orthogonale de la surface S sur le plan (xOy) (« vue de dessus de la surface S »). *Construire sur cette figure 2 la projection orthogonale sur le plan (xOy) des points dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$. Placer sur cette figure 2 le point C_1 projeté orthogonal du point C sur le plan (xOy).*

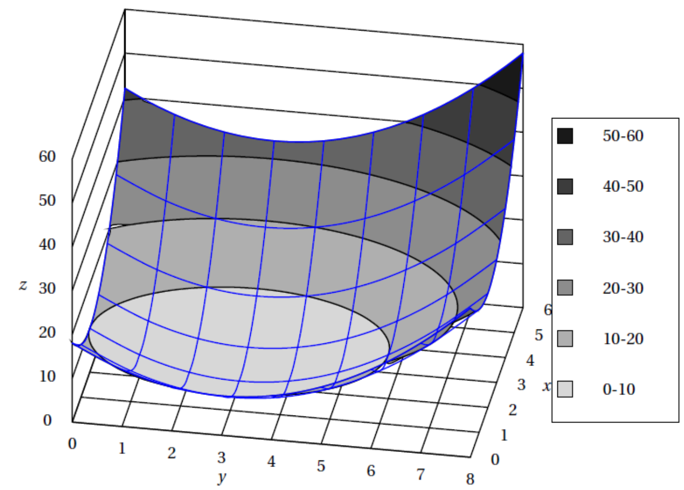


figure 1

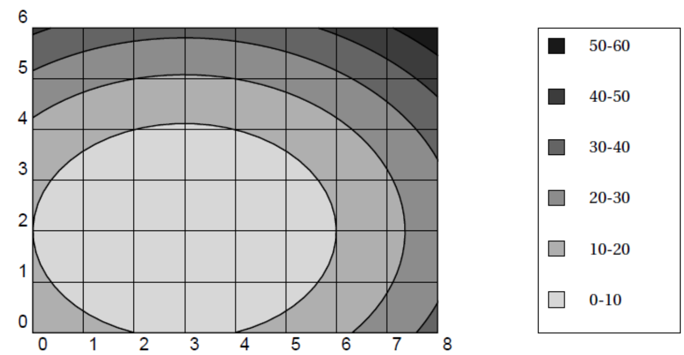


figure 2

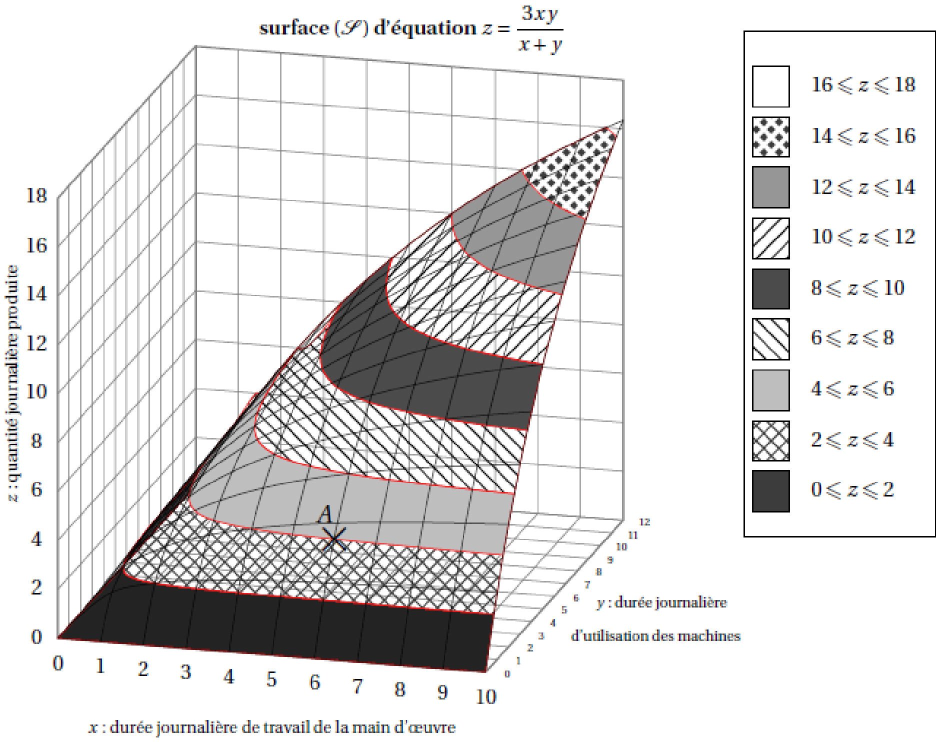
Problème 2

La production journalière d'une entreprise dépend de deux facteurs : le travail de la main d'œuvre et l'utilisation des machines. On désigne par x la durée journalière de travail de la main d'œuvre, exprimée en heures, x appartient à l'intervalle $]0; 10]$, et par y la durée journalière d'utilisation des machines, exprimée en heures, y appartient à l'intervalle $]0; 12]$. La quantité journalière produite (en tonnes) est donnée par la relation

$$f(x; y) = \frac{3xy}{x+y}$$

avec $0 < x \leq 10$ et $0 < y \leq 12$.

La figure ci-dessous représente la surface (S) d'équation $z = f(x; y)$ pour $0 < x \leq 10$ et $0 < y \leq 12$.



Partie 1

Le point A représenté par une croix est un point de la surface (S).

1. *Déterminer graphiquement l'abscisse et la cote du point A. Calculer son ordonnée (arrondie au dixième).*

2. *Interpréter les résultats obtenus en référence à la production journalière de l'entreprise.*

Partie 2

Pour chaque heure, le cout total du travail s'élève à 4 milliers d'euros, et le cout d'utilisation des machines s'élève à 1 millier d'euros. L'entreprise décide de dépenser 36 milliers d'euros par jour et cherche à maximiser sa production journalière sous cette contrainte. On a alors $4x + y = 36$.

La quantité journalière produite (en tonnes) sous cette contrainte de coût peut donc être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par

$$g(x) = \frac{4x^2 - 36x}{x - 12}$$

1. On note g' la fonction dérivée de g sur l'intervalle $]0; 10]$.

a. *Pour tout nombre réel x de l'intervalle* $]0\ ;\ 10]$, *calculer* $g'(x)$ *et montrer que*

$$g'(x) = \frac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$$

b. *Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle* $]0;10]$.

2. a. *En déduire la durée journalière de travail et la durée journalière d'utilisation des machines permettant d'obtenir une production journalière maximale pour un coût total de 36 milliers d'euros.*

b. *Préciser la quantité journalière maximale produite en tonnes.*