БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Институт повышения квалификации и переподготовки
в области технологий информатизации и управления

Научно-исследовательский и методический центр
преподавателей и учащихся «ЮНИ-центр-XXI»

# Сборник заданий для учащихся 5 классов школы юных математиков и информатиков
(углубленная подготовка)

**Минск-2015**

Рекомендовано советом

факультета прикладной математики и информатики

12 мая 2015 г., протокол № 6

Сборник заданий для учащихся 5 классов школы юных математиков и информатиков (углубленная подготовка) / И. М. Мартыненко – Минск: БГУ, 2015. – 64 с.

Содержит материал авторских занятий для учащихся 5 классов школы юных математиков и информатиков научно-исслеодвательского и методического центра преподавателей и учащихся «ЮНИ-центр-XXI» факультета прикладной математики и информатики и государственного учреждения образования «Институт повышения квалификации и переподготовки в области технологий информатизации и управления» Белорусского государственного университета. Предназначено для учащихся школ юных математиков, факультативной работы и всем школьникам, увлекающимся математикой.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая методичка входит в цикл пособий, подготовленных на основе многолетнего коллективного опыта проведения занятий в школе юных математиков и информатиков научно-исследовательского и методического центра преподавателей и учащихся «ЮНИ-центр-XXI» (далее – ШЮМИ) и предназначенных для занятий в группах с учащимися 5 классов.

Говоря об опыте занятий в «ЮНИ-центре-XXI», прежде всего, следует отметить, что мы не стремимся повторять или «просто» закреплять знания, полученные в школе. Наша цель - развитие нестандартного мышления учащихся: логического, алгоритмического, изобретательского, творческого, исследовательского. Этому подчинены прежде всего программы ШЮМИ, в которые наряду с необходимыми стандартными темами школьной математики включены темы, выходящие за рамки школьного учебника, но вполне доступные заинтересованным и пытливым ученикам соответствующего возраста, углубляющие и развивающие школьные программы, часто применяемые при решении олимпиадных и творческих задач, а в своей совокупности реально развивающие такие навыки детей, как логическое и алгоритмическое мышление, изобретательность и творческий подход.

Сами методички построены по уже ставшей традиционной в ряде специализированных учебных центрах схеме: 1 лист – 1 занятие (может быть два занятия). Отсюда общее *«условное»* количество «листов» – 30, если методичка предназначена для группы, программа занятий которой рассчитана на 30 занятий в год (60 академических часов), либо 60 «листов», если программа рассчитана на 60 занятий (120 часов). Последнее касается групп повышенного уровня сложности (мы их называем «сборными»). Однако на одну тему может быть отведено несколько листов, в зависимости от сложности и объема материала, либо (что в сборных группах происходит достаточно часто) наоборот, один лист может соответствовать двум, а порой и большему количеству занятий. Вот почему выше употреблено выделенное слово *«условное»*.

Структура каждого листа определяется особенностью темы. Зачастую вначале дается небольшое теоретическое введение в очень кратком, почти тезисном виде. Преподавателю с помощью такой методички важно «обозначить» необходимые определения и сведения, чтобы ученик всегда мог вспомнить, о чем шла речь на занятии, а часто объем и строгость материала зависят от уровня группы. Обычно теоретический материал присутствует, если тема выходит за рамки школьной программы, дополняет ее, придает ей некоторую специфическую трактовку, акцентирует внимание на каких-то особенностях этой темы. После «теории» идут задачи, возможно, некоторые с решениями. Однако теоретическая часть в наших методичках не является обязательной и может в ряде листов отсутствовать. Например, если задание выстроено таким образом, что ученики, выполняя такого рода задания, сами постигают необходимый теоретический минимум по теме и приобретают необходимые знания и навыки. Конечно, все это происходит не без помощи преподавателя.

В ряде методичек, особенно для младших «несборных» группах – 5-7 классов, может вообще не быть теории и даже не просматриваться единая тема занятий. Каждому занятию все равно соответствует один лист, но в разных задачах повторяются все основные методы и подходы к решению нестандартных задач. Ученики, выполняя такие задания, тренируются в накоплении различных навыков, накапливают опыт и интуицию в их применении. При этом нет скучного, монотонного повторения и заучивания одних и тех же методов. Приходит неявное понимание (скорее даже ощущение) рассмотренных методов и умение применять приобретенные навыки в их совокупности. Происходит неявное понимание (скорее даже ощущение) применять полученные методы и приобретенные навыки в их совокупности. В этом случае перед преподавателем стоит важная задача на каждом занятии сфокусировать внимание на тех или иных методах и подходах и постепенно показывать их взаимозависимость, взаимоприменяемость, а порой и взаимозаменяемость.

В таких группах (точнее для таких методичек) нет вообще какой-то строгой последовательной программы прохождения материала. Это замечание специально адресовано тем, кто желает обязательно видеть строгую последовательную программу занятий и не верит в такой методический подход, как подход по совокупности и непрерывности.

В заключение отметим, что в разных группах ШЮМИ практикуются разные подходы к проведению занятий и использованию предлагаемых методичек (пособий). Главное, что нужно понимать, это то, что в каждой параллели, начиная с 6 класса, есть обычные группы (они обычно занимаются один раз в неделю) и сборные (углубленные, они занимаются два раза в неделю). И для каждого класса подготовлены разного характера методички, соответствующие тому или иному подходу в преподавании. При этом переход (перевод) ребенка из одной группы в другую может проходить фактически свободно. Важно, во-первых, почувствовать соответствие уровня сложности группы и возможностей ребенка, и во-вторых, дать возможность ребенку попробовать разные стили проведения занятий и выбрать тот, который ему больше всего подходит.

Мы же, преподаватели и руководители «ЮНИ-центра-XXI», готовы оказать при этом всякую консультационную и организационную помощь.

Желаем успеха всем учащимся!

*Материал данной методички подготовлен и апробирован Мартыненко И.М., при содействии Вакульчика П.А. и Задворного Б.В.*

*Макет и верстка Остаповец И.В.*

**Оглавление**

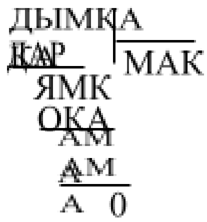
**1**

## ЦИФРЫ И ЧИСЛА

1. Имеются три коробки: белая, красная и зеленая. В одной из коробок находится плитка шоколада, в другой – яблоко, а третья коробка пуста. Определите, в какой коробке находится шоколад, если известно, что он – в белой или красной коробке, а яблоко – ни в белой, ни в зеленой коробке.
2. Произведение четырех различных натуральных чисел равно 100. Найдите сумму этих четырех чисел.
3. Через реку, ширина которой равна 120 м, построен мост. Четвертая часть моста находится на левом берегу, еще одна четвертая часть – на правом. Найдите длину моста.
4. Лифт вмещает и может перевозить самое большее 12 взрослых или 20 детей. Какое наибольшее число детей может ехать в лифте вместе с 9 взрослыми?
5. Пончик задумал натуральное число $n$ и высказал о нем следующие четыре утверждения: 1) $n$ делится на 7; 2) $n$ делится на 12; 3) $n$ делится на 84; 4) $n$ меньше 10. Но только два раза он сказал правду и два раза ошибся. Определите $n$.
6. Есть три фигуры: квадрат, прямоугольник и равносторонний треугольник. Все три фигуры имеют одинаковый периметр. Сторона квадрата равна 9 см. Большая сторона прямоугольника равна стороне треугольника. Найдите меньшую сторону прямоугольника.
7. Какое наименьшее число одинаковых кубиков может целиком заполнить коробку размерами 30 х 30 х 50?
8. Андрей, Боря, Вася и Гена заняли первые четыре места в турнире по фехтованию. Сумма мест, занятых Андреем, Борем и Геной, равна 6. Такая же сумма мест Бори и Васи. Кто занял первое место, если Боря выступил лучше, чем Андрей?
9. У Оли есть 2010 одинаковых квадратных карточек. Она решила, прикладывая карточки сторонами друг к другу, сложить из них прямоугольник. Сколько различных прямоугольников у нее может получиться, если каждый раз будут использованы все карточки?
10. Номера комнат в гостинице состоят из трех цифр, первая из которых указывает номер этажа, две другие – номер комнаты на этаже. В гостинице 5 этажей (с номерами от 1 до 5), на каждом этаже по 35 комнат (с номерами от 01 до 35). Сколько всего цифр 2 использовано для нумерации комнат в гостинице?

*Дополнительные задачи.*

1. Узнайте, какие цифры обозначены буквами, если каждая буква обозначает лишь одну цифру:




2. Решите пример на вычитание:  ЛЕТЕЛА – СТАЯ = ВОРОН, где СТО делится на 139.

## 2 ВЗВЕШИВАНИЯ

1. Заяц тяжелее кролика ни 3 кг. Сколько весит один заяц, если два зайца весят столько, сколько 5 кроликов? Сколько весит кролик?
2. Определите, сколько в отдельности весят буханка хлеба и банка консервов, если: четыре банки консервов и три буханки хлеба весят 5 кг; а 4 банки консервов и одна буханка хлеба весят 3 кг.
3. Антошке подарили весы, и он начал взвешивать свои игрушки. Машинку уравновесили мяч и два кубика, а машинку с кубиком – два мяча. Сколько кубиков уравновесят машинку? (Все мячи и кубики у Антошки одинаковые.)
4. Масса девяти шаров такая же, как масса двух кубиков и двух шайб. Шайба в два раза легче, чем кубик. Сколько шаров надо взять, чтобы их масса была равна массе одного кубика?
5. Десять апельсинов весят на 1 кг больше, чем двадцать мандаринов. Те же десять апельсинов весят на 500 г больше, чем тридцать таких же мандаринов. Сколько весит один мандарин?
6. Десять слив весят столько же, сколько два яблока и одна груша,  а одна слива и одно яблоко – сколько одна груша. Сколько слив уравновешивают одну грушу?
7. Брусок и кубик уравновешивают два шарика. Один брусок уравновешивает кубик и шарик. Сколько кубиков уравновесят брусок?
8. На одной чаше весов стоят бутылка и стакан, на другой – кувшин. Весы находятся в равновесии. Стакан переставили на другую чашу, кувшин сняли с весов и на эту же чашу поставили тарелку. Весы снова в равновесии. С первой чаши убрали бутылку и вместо нее поставили два кувшина, а на второй чаше стакан заменили двумя тарелками. Итак, два кувшина уравновесились тремя тарелками. Во сколько раз бутылка тяжелее стакана?

9. Из девяти одинаковых килограммовых гирь одна бракованная – она легче килограмма. Как найти эту гирю с помощью не более двух взвешиваний на рычажных весах?
10. Среди 20 одинаковых на вид монет есть одна фальшивая, которая легче, чем настоящая. Как с помощью трех взвешиваний на весах с чашечками без гирь определите фальшивую монету?
11. Известно, что среди 80 монет имеется одна фальшивая, более легкая, чем все остальные, имеющие одинаковый вес. Как при помощи четырех взвешиваний на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету?
12. Каждый год каждый из 30 вассалов преподносит королю 30 золотых монет. Но король знает, что кто-то из них имеет прискорбную привычку вручать монеты не в 10 г, как положено, а в 2г. Как с помощью одного единственного взвешивания король может обнаружить виновного, чтобы отрубить ему голову, если последний и на этот раз осмелится обмануть своего короля?

## 3 ЗАДАЧИ-ТАБЛИЦЫ

1. В пионерский лагерь приехали три друга: Миша, Володя и Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из фамилий: Иванов, Семенов, Герасимов. Миша не Герасимов. Отец Володи инженер. Володя учится в 6-м классе. Герасимов учится в 5-м классе. Отец Иванова слесарь. Какая фамилия у каждого из друзей?
2. На семейный вечер собрались семь супружеских пар. Фамилии мужчин: Шалимов, Федоров, Викторов, Степанов, Базаров, Харлампиев и Тарасов, а женщин зовут Тоня, Лена, Люся, Света, Маша, Оля и Галя.
   Посидев за столом, компания решила потанцевать. Шалимов танцевал с Леной и Светой, Харлампиев – с Машей и Светой, Тарасов – с Леной и Олей, Викторов – с Леной, Степанов – со Светой и Олей, а Базаров – с Олей.
   Потом стали играть в карты. Викторов и Шалимов играли с Олей и Галей. Затем мужчин сменили Степанов и Харлампиев. Женщины продолжали игру в том же составе. Последнюю партию Степанов и Харлампиев сыграли с Тоней и Леной.
   Попробуйте определить, кто на ком женат, если известно, что на вечере ни один муж не танцевал со своей женой и никто из супругов при игре в карты не садился за стол одновременно.
3. В семье Семеновых пять человек: муж, жена, их сын, сестра мужа и отец жены. Все они работают. Один – врач, другой – юрист, третий – слесарь, четвертый – экономист, пятый – учитель.
   Юрист и учитель не кровные родственники. Слесарь – хороший спортсмен, он пошел по стопам экономиста и занимается боксом. Врач старше жены своего брата, но моложе учителя. Экономист старше слесаря. Назовите профессии каждого члена семьи.
4. Поездная бригада состоит из бригадира, проводника, машиниста и помощника машиниста. Их зовут Андрей, Петр, Дмитрий и Трофим. Дмитрий старше

Андрея. У бригадира нет родственников в бригаде. Машинист и помощник машиниста – братья. Других братьев у них нет. Дмитрий – племянник Петра. Помощник машиниста – не дядя проводника, а проводник – не дядя машиниста. Кто кем работает, какие родственные отношения существуют между членами бригады?

5. В селе живут Хлебников, Огородников, Плотников и Кузнецов. Они соседи. Один из них – пекарь, другой выращивает овощи, третий плотничает, а четвертый работает в кузнице. У каждого из них есть сын, работающий у одного из трех соседей, обучающийся у него мастерству. Ни фамилии отцов, ни фамилии сыновей не совпадают с занятием, которое они себе выбрали. Известно, что Плотников-младший собирается жениться на сестре будущего кузнеца, а сестра Плотникова-старшего замужем за кузнецом. Хлебников-старший женат на овдовевшей матери плотника. У Огородникова-старшего дочерей нет. Чем занимается каждый из отцов и сыновей?
6. Дина, Соня, Коля, Рома и Миша учатся в институте. Их фамилии – Бойченко, Карпенко, Лысенко, Савченко и Шевченко. Мать Ромы умерла. Родители Дины никогда не встречались с родителями Коли. Студенты Шевченко и Бойченко играют в одной баскетбольной команде. Услышав, что родители Карпенко собираются поехать за город, мать Шевченко пришла к матери Карпенко и попросила, чтобы та отпустила своего сына к ним на вечер, но оказалось, что отец Коли уже договорился с родителями Карпенко и пригласил их сына к Коле. Отец и мать Лысенко – хорошие друзья родителей Бойченко. Все четверо довольны, что их дети собираются пожениться. Установите имя и фамилию каждого из студентов.

## 4 КРИПТОГРАММА

На рисунке вы видите панель телефона. С помощью цифр зашифрованы пословицы.

<table>
<tr><td>1<br>АБВ</td><td>2<br>ГДЕЁ</td><td>3<br>ЖЗИЙ</td></tr>
<tr><td>4<br>КЛМ</td><td>5<br>НОП</td><td>6<br>РСТ</td></tr>
<tr><td>7<br>УФХ<br>Ц</td><td>8<br>ЧШЩ</td><td>9<br>ЪЫЬ</td></tr>
<tr><td colspan="3">0<br>ЭЮЯ</td></tr>
</table>

Чтобы расшифровать их, нужно вместо каждой цифры записать одну из букв соответствующей клавиши. Расшифруйте пословицы:

a) 123 5174 414 123 674.
b) 222 7562592, 614 3 742592.
c) 1 74553 126222 — 741 563475369, 1 1 247553 — 3 6153 616626069.
d) 865 40204 553241289, 65 3 614 554781289.
e) 52 65 256525, 865 46165525 354561, 1 65 256525, 865 2516525 4166266611.

## 5 ПЕРЕЛИВАНИЯ

1. Каким образом можно принести из реки ровно 6л воды, если имеется только два ведра: одно емкостью 4л, другое – 9л?
2. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Каша должна вариться 15 минут. Как сварить её, перевернув часы минимальное количество раз?
3. Из полного 8 литрового ведра отлейте 4 литра с помощью пустых трёхлитровой банки и пятилитрового бидона.
4. Отлейте из цистерны 13 литров молока, пользуясь бидонами ёмкостью 17 и 5 литров.
5. В первый сосуд входит 9л, во второй – 5л, а в третий – 3л. Первый сосуд наполнен водой, а остальные пусты. Как с помощью этих сосудов отмерить 1л воды? 4л воды?
6. Имеется два полных 10 литровых бидона молока и пустые 4-х и 5-и литровые кастрюли. Отмерьте по 2 литра молока в каждую кастрюлю. (Выливать молоко на землю нельзя.)
7. В бочке не менее 13 вёдер бензина. Можно ли отлить 8 ведер с помощью девятивёдерной и пятивёдерной бочек?
8. Два сосуда вместимостью 144 л и 70 л содержат некоторое количество воды. Если больший сосуд долить доверху водой из второго сосуда, то в последнем останется ещё 1 л. Если же долить доверху меньший сосуд, то в большем останется ¾ первоначального количества воды. Сколько литров воды содержится в каждом сосуде?
9. На озере расцвела одна лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на двадцатый день все озеро покрылось цветами. Через сколько дней покрылась цветами половина озера?
10. В очереди за билетами в кино стоят друзья: Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Известно, что Юра купит билет раньше, чем Миша, но позже Олега; Володя и Олег не стоят рядом, а Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. Кто за кем стоит?
11. Над озёрами летели гуси. На каждом садилась половина гусей и ещё полгуся, остальные летели дальше. Все сели на 7 озёрах. Сколько было гусей?

## 6 РАСПИЛЫ, ЗАДАЧИ НА ЧАСТИ

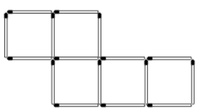
1. Три одноклассницы – Соня, Таня и Женя – занимаются в различных спортивных секциях: одна из них – в гимнастической, другая – в лыжной, а

третья – по плаванью. Каким видом спорта занимается каждая из них, если известно, что Соня плаванием не увлекается, Таня в лыжную секцию никогда не ходила, Женя является победителем в соревнованиях по лыжам?

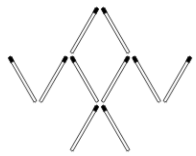
2. Полный бидон с молоком весит 34 кг, а наполненный до половины — 17,5 кг. Сколько весит пустой бидон?
3. Лиза на 8 лет старше Насти. Два года назад ей было втрое больше лет, чем Насте. Сколько лет Лизе?
4. Зайцы пилят бревно. Они сделали 10 распилов. Сколько получилось частей?
5. Бублик режут на сектора. Сделали 10 разрезов. Сколько получилось кусков?
6. После заготовки дров работник подсчитал, что из начального количества бревен получилось 72 полена, при этом было сделано 53 распила. Сколько бревен было сначала?
7. Из утверждения «число а делится на 2», «число а делится на 4», «число а делится на 12» и «число а делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое?
8. Чему равна площадь треугольника со сторонами 18, 17, 35?
9. Петя и Миша играют в такую игру. Петя берет в каждую руку по монетке: в одну — 10 к., а в другую — 15. После этого содержимое левой руки он умножает на 4, 10, 12 или 26, а содержимое правой руки — на 7, 13, 21 или 35. Затем Петя складывает два получившихся произведения и называет Мише результат. Может ли Миша, зная этот результат, определить, в какой руке у Пети — правой или левой — монета достоинством в 10 к.? Почему?
10. На рынке 10 бубликов меняют на 3 ватрушки, а одну ватрушку на 3 бублика и 5 рублей. Сколько стоит ватрушка?
11. В зоомагазине продают больших и маленьких птиц. Большая птица стоит вдвое дороже маленькой. Одна дама купила 5 больших птиц и 3 маленьких, а другая — 5 маленьких и 3 больших. При этом первая дама заплатила на 20 рублей больше. Сколько стоит каждая птица?
12. На базаре продаются рыбки, большие и маленькие. Сегодня три большие и одна маленькая стоят вместе столько же, сколько пять больших стоили вчера, а две большие и одна маленькая сегодня – столько же, сколько три больших и одна маленькая вчера. можно ли по этим данным выяснить, что дороже: одна большая и две маленькие сегодня, или пять маленьких вчера?

## 7 СПИЧКИ И МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

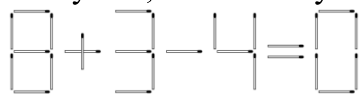
1. Из спичек сложена фигура, изображённая на рисунке. Как переложить две спички так, чтобы получилось ровно четыре одинаковых квадрата с длиной стороны, равной длине спички?



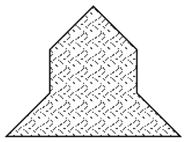
2. Спичечный рак ползёт вверх. Переложить три спички так, чтобы он пополз вниз.



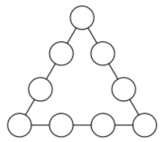
3. Нужно переложить одну спичку так, чтобы получилось верное равенство:



4. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на 4 равных четырёхугольника:



5. Плитка шоколада состоит из отдельных долек, образующих 4 горизонтальных и 8 вертикальных рядов. За какое наименьшее число разломов эту плитку можно разломать на отдельные дольки, если всякий раз ломать разрешается лишь один кусок?
6. В кружках треугольника расставьте все девять значащих цифр так, чтобы сумма их на каждой стороне составляла 17:



7. В квадратном зале для танцев поставить вдоль стен 10 кресел так, чтобы у каждой стены стояло кресел поровну.
8. В квадрате 3×3, расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы суммы чисел, стоящих в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду, а также на любой диагонали были равны.
9. Составить магический квадрат 5×5.
10. Юный натуралист собрал в коробку пауков и жуков — всего 8 штук. Количество ног насекомых в коробке оказалось равным 54. Сколько в коробке пауков и сколько жуков?
11. Когда моему отцу был 31 год, мне было 8 лет, а теперь отец старше меня вдвое. Сколько лет мне теперь?
12. Составить магический квадрат 4×4.

## 8 ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

1. В мешке лежат шарики двух цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно достать из мешка вслепую, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?
2. Доказать, что среди n + 1 целого числа можно выбрать два, разность которых делится на n.
3. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Доказать, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

4. На далекой планете, имеющей форму шара, суша занимает больше половины поверхности планеты. Докажите, что можно прорыть туннель, проходящий через центр планеты, который соединит сушу с сушей.
5. Несколько дуг окружности покрасили в синий цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.
6. В непрозрачном мешке лежат 5 белых и 2 черных шара.

а) Какое наименьшее число шаров надо вытащить из мешка, чтобы среди них обязательно оказался хотя бы один белый шар?

б) Сколько шаров надо вытащить, чтобы среди них обязательно оказался хотя бы один белый и хотя бы один черный шар?

в) Какое наименьшее число шаров надо вытащить, чтобы среди них наверняка оказались 3 белых и 1 черный шар?

г) Сколько шаров надо вытащить, чтобы среди них оказались два шара одного цвета?

7. Докажите, что в любой копании из пяти человек двое имеют одинаковое число знакомых.
8. Коля подсчитал, что за завтрак, обед и ужин он съел 10 конфет. Докажите, что хотя бы один раз он съел не меньше 4 конфет.
9. В ящике комода, который стоит в темной комнате, лежат 10 коричневых и 10 красных носков одного размера. Сколько носков нужно достать, чтобы среди них была пара одинакового цвета?

10 Иван-царевич добыл ключи от нескольких комнат в подземелье, но не знал, какой ключ от какой комнаты. Сколько комнат в подземелье, если, как подсчитал Иван-царевич, в худшем случае, ему достаточно 20 проб, чтобы выяснить, какой ключ от какой комнаты.

## 9 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДВУМЯ СПОСОБАМИ: ПО ДЕЙСТВИЯМ И УРАВНЕНИЕ

1. Отцу 50 лет, а дочери 28 лет. Сколько лет назад дочь была в 2 раза моложе отца?
2. Найдите три последовательных натуральных числа, если их сумма равна 423.
3. Сумма цифр двузначного числа равна 14. Если цифры переставить, то вновь полученное число будет меньше исходного на 18. Найдите первоначальное число.
4. Среднее арифметическое двух чисел равно 52. Одно из чисел равно 88. Найдите второе число.
5. На двух полках 11 книг. С первой полки 8 книг переставили на другую, после чего число книг на первой полке стало в два раза меньше числа книг на второй полке. Сколько книг было изначально на каждой полке?
6. На первой полке книг в три раза меньше, чем на второй. Если на первую полку поставить еще 8 книг, а со второй взять 6, то количество книг на обеих полках будет одинаковым. Сколько книг на первой полке было изначально?

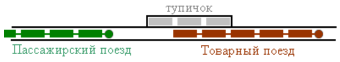
7. Велосипедист наметил добраться от поселка до города за 7 ч. Однако он увеличил скорость на 2 км/ч и поэтому прибыл в город через 6 часов. Чему равно расстояние от города до поселка?
8. Для детского сада купили яблоки двух сортов – по цене 1р. и по цене 70к. за килограмм. Более дорогих яблок купили на 4 кг больше и заплатили за них в 2 раза больше, чем за более дешевые. Сколько стоят все яблоки?
9. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за одну минуту, мама – за две, малыш – за пять, а бабушка – за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя).
10. Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30,… число, стоящее: а) на 6-м месте; б) на 2000-м месте
11. Как, не отрывая карандаша от бумаги, провести шесть отрезков таким образом, чтобы оказались зачеркнутыми 16 точек, расположенных в вершинах квадратной сетки 4 х 4?

## 10 ПЕРЕПРАВЫ

0. Как-то раз крестьянин подошел к реке с пойманным волком, козой и капустой. Но вот беда — в лодку помимо крестьянина (а только он умеет грести) влезает либо только волк, либо только коза, либо только капуста. Кроме того, оставить без присмотра волка с козой или козу с капустой — верный способ потерять часть имущества. Как крестьянину переправиться вместе со своим имуществом без потерь?
1. Барон Мюнхгаузен и его слуга Томас подошли к реке. На берегу они обнаружили лодку, способную перевезти лишь одного человека. Тем не менее они переправились через реку и продолжили путешествие. Как такое оказалось возможным?
2. На очень узкой дороге встретились 6 машин: три ехали в одну сторону и три в другую. Как им разъехаться, если сбоку есть стоянка, куда может заехать только одна машина?
3. Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошел отряд солдат. Лодка так мала, что на ней может переправиться только один солдат или двое мальчиков. Однако все солдаты переправились через реку именно на этой лодке, а затем вернули ее мальчикам в целости и сохранности. Как?
4. Однажды по лесу гуляли три рыцаря, каждый со своим оруженосцем. Как им переправиться через реку на двухместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться на берегу (и в лодке) с незнакомыми рыцарями без своих хозяев? Запрещается также ситуация, когда к берегу, где находится оруженосец без своего хозяина, причаливает чужой рыцарь (даже если он на берег не высаживается), или наоборот.
5. Три миссионера и три каннибала должны переправиться через реку на двухместной лодке. Миссионеры боятся оставаться в меньшинстве, чтобы не быть съеденными. (Это происходит и тогда, когда в лодке и на берегу, к которому она причаливает, каннибалов в сумме оказывается больше, чем

миссионеров.) Только один из миссионеров и один из каннибалов умеют грести. Помогите им переправиться.

6. На станции железной дороги остановился товарный поезд в составе паровоза и пяти вагонов. На этой станции есть небольшой тупичок, где в случае необходимости помещается паровоз с двумя вагонами или три вагона без паровоза (см. рисунок). Вскоре вслед за товарным поездом к этой же станции (по тем же рельсам) подошел пассажирский поезд неизвестной длины. Как его пропустить? Вагоны можно цеплять друг к другу и к паровозу с любой стороны. Паровоз может тянуть или толкать любое количество вагонов любого типа в любую сторону.



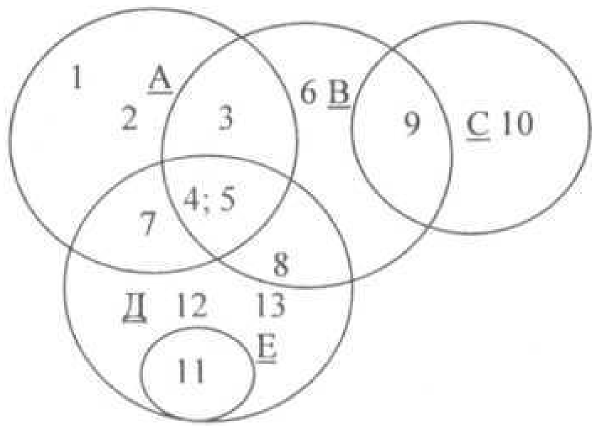

## 11 ЗАДАЧИ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

1. Можно ли на шахматную доску расставить по очереди в некотором порядке 5 главных шахматных фигур (ладью, коня, слона, ферзя и короля) так, чтобы каждая фигура в момент постановки на доску била все выставленные до неё фигуры?
2. Шахматный конь стоит в левом нижнем углу доски. Может ли он через а) 4; б) 5; в) 111 ходов вернуться на исходное поле?
3. Можно ли расставить на шахматной доске короля, ладью, коня, слона и ферзя так, чтобы каждая фигура била ровно две фигуры и была побита ровно двумя, причём другими фигурами?
4. Можно ли разрезать шахматную доску на доминошки так, чтобы никакие две из них не образовывали квадрат 2х2?
5. а) Новая шахматная фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 1, 2, …. клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти всю доску 8х8, побывав на каждой клетке ровно один раз?
   б) Тот же вопрос, если «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, … клетки?
6. Во время матча «ЦСКА» – «Реал» пришедший с шахматного кружка Незнайка задумался над задачей «Можно ли на шахматное поле 8х8 поставить 11 коней, 11 королей и 1 мяч (бить не умеет) так, чтобы не было фигуры, стоящей под боем другой фигуры?» А действительно, можно ли?
7. Можно ли в клетках таблицы 10х10 расставить натуральные числа от 1 до $10^2$ так, чтобы для любой клетки этой таблицы из строки или столбца, содержащих эту клетку, можно было бы выбрать тройку чисел, одно из которых равно произведению двух других?
8. а) расставьте 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга, тремя разными способами.
   б) А сколько всего таких способов?
9. Ладья стоит на поле a1 шахматной доски. Может ли она обойти всю доску, побывав в каждой клетке ровно один раз и закончив в клетке h8? (Ладья может перепрыгивать через клетки, в которых уже побывала.)

10. На шахматную доску поставили несколько ладей произвольным образом. Докажите, что точно найдётся ладья, бьющая не более двух других.

## 12 МНОЖЕСТВА: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, КРУГИ ЭЙЛЕРА, ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЯ-ИСКЛЮЧЕНИЯ

1. Назовите элементы, которые получатся, если:




а) $A \cap B$;
б) $A \cap Д$;
в) $B \cap C$;
г) $E \cap C$;
д) $B \cup C$;
е) $E \cup C$;
ж) $A \setminus B$;
з) $Д \setminus A$.
Сколько элементов содержит:
и) $| A |$; к) $| C \setminus B |$.
Является ли множество E подмножеством:
л) B; м) Д.
Назовите дополнение множества E до множества Д.

2. Назовите множество дней одной недели; множество месяцев одного года. Является ли множество дней одной недели подмножеством множества дней одного месяца?
3. В пятых классах школы училось 70 человек. Им было предложено записаться в 3 кружка: по математике, литературе и истории. Староста подсчитал число учащихся, желающих участвовать во внеклассной работе, и получил такие результаты. В кружок по математике записалось 51 человек, по литературе - 40, по истории - 22. 6 человек решили заниматься во всех кружках, математикой и литературой решили заниматься 32 человека, одновременно заниматься математикой и историей решили 11 человек, а литературой и историей 8 человек. Получив результаты, староста сказал: «Можно подумать, что у нас в 5-х классах обучается не 70 человек, а 170. Все хотят заниматься в кружках».
Однако один из любителей математики сказал: «Что ты, у нас есть ученики, которые не любят ни математику, ни литературу, ни историю. Я даже могу сказать, сколько их». Как он узнал?
4. В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 - в хоккей, 18 - в футбол. Увлекаются двумя видами спорта - баскетболом и хоккеем - четверо, баскетболом и футболом - трое, футболом и хоккеем - пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни футболом.
Сколько ребят увлекается одновременно тремя видами спорта?
Сколько ребят увлекается лишь одним из этих видов спорта?
5. Из 110 студентов английский язык изучают 44 человека, немецкий – 50 человек, французский – 49 человек, английский и немецкий – 13, английский и французский – 14, немецкий и французский – 12, все три языка изучают 5

человек. Сколько студентов изучают только один язык? Сколько студентов не изучают ни одного языка?

6. В классе 33 человека. 20 из них каждый день пользуются метро, 15 — автобусом, 23 — троллейбусом, 10 — и метро, и троллейбусом, 12 — и метро, и автобусом, 9 — и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуется всеми тремя видами транспорта?
7. В магазине побывало 65 человек. Известно, что они купили 35 холодильников, 36 микроволновок, 37 телевизоров. 20 из них купили и холодильник и микроволновку, 19 - и микроволновку, и телевизор, 15-холодильник и телевизор, а все три покупки совершили три человека. Был ли среди них посетитель, не купивший ничего?
8. На листе бумаги нарисовали 20 прямоугольников и 15 ромбов. При этом всего оказалось 30 фигур. Как такое может быть?
9. Из 100 человек 70 знают английский язык, а 60 – французский. Сколько человек знают оба языка (каждый знает хотя бы один язык)?
10. Старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков – это один и тот же человек или (возможно) разные?

## 13 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ: ПОИСК ЗАКОНОМЕРНОСТИ

1. Даны последовательности чисел: а) 5, 8, 11, 14, 17,…; б) 1, 8, 27, 64, 125, …; в) 1, 2, 6, 24, 120, …; г) 4, 8, 16, 32, 64,… Для каждой из них: 1) сформулируйте правило, по которому она составлена, и укажите следующее число; 2) запишите числа, которые будут стоять на десятом и двадцатом месте.
2. Сформулируйте правило, по которому составлена каждая последовательность, найдите следующее число и число, стоящее на десятом месте:

   а) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,…; б) 1024, 512, 256, 128, 64, …; в) 10, 8, 11, 9, 12, 10,…; г) $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \ldots$; д) $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{16}{81}, \frac{25}{243}, \ldots$
3. Петя, Вася и Коля записали в ряд по 100 чисел. У Пети пятое число равно 12, и каждое число начиная со второго на два больше левого соседа. У Васи первое и третье числа равны 4 и 6 соответственно, а каждое число, кроме крайних, вдвое меньше суммы его соседей. А Коля просто записывал периметры прямоугольников шириной в одну клетку: сначала – периметр прямоугольника длиной в одну клетку, потом – длиной в две клетки, и так далее (сторона каждой клетки равна 1). У кого из мальчиков совпали записанные ряды чисел?
4. На прямой отметили 100 точек так, что расстояние между любыми соседними точками равно 7.

   а) Каково расстояние между крайними точками?

   б) Точки пронумеровали по порядку слева направо. Какой номер имеет точка, расстояние от которой до первой точки равно 77?

   в) Координата первой точки равна 10. Найдите координату тридцать первой точки.

   г) Какой номер будет иметь точка с координатой 110, если координата первой точки равна 5?

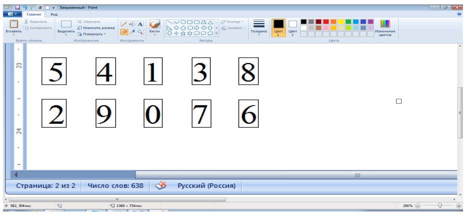
5. Дана последовательность: 1,5; 1,65; 1,8; 1,95;….
   а) Укажите закономерность и найдите число, стоящее на сто первом месте.
   б) На каком месте в этой последовательности стоит число 6?
6. Даны две последовательности: 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2, 4, … и 3, 6, 12, 6, 12, … В них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону. а) Укажите этот закон. б) Найдите все последовательности натуральных чисел, построенные по этому закону, все члены которых равны между собой. в) Докажите, что если такая последовательность начинается с $2^{1000}$, то в ней рано или поздно появится однозначное число.

## 14 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ: КАК ПРИДУМАТЬ И ПОСТРОИТЬ ПРИМЕР ПОДХОДЯЩИЙ К ДАННОЙ ЗАДАЧЕ ТАК, ЧТОБЫ НЕ БЫЛО ПРОТИВОРЕЧИЙ?

1. В двух кошельках лежат две монеты, причем в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Как такое может быть?
2. Нарисуйте шестиугольник и, проведя прямую через две его вершины, отрежьте от него семиугольник.
3. Как можно из шести спичек сложить четыре треугольника со стороной в одну спичку каждый?
4. На какое наименьшее число частей можно разрезать прямоугольник 4х9, чтобы из них можно было сложить квадрат 6х6?
5. В тетради в клеточку нарисован квадрат, стороны которого по длине равны 5 клеточкам. Разрежьте этот квадрат по линиям клеточек на семь прямоугольников, среди которых нет одинаковых.
6. Могут ли сумма и произведение нескольких натуральных чисел быть равными 99?
7. Незнайка сформулировал (по аналогии с признаками делимости на 3 и на 9) следующий признак делимости на 27:
   Если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и само число делится на 27.
   Прав ли незнайка?
8. У Пети есть ножницы и кусок лески длины 192 сантиметра. Может ли Петя отрезать от него кусок в 90 сантиметров? (Куски лески можно перегибать пополам, а также прикладывать друг к другу.)
9. Расставьте цифры от 1 до 9 в таблицу 3х3 так, чтобы суммы чисел в любом ряду из трёх клеток (по вертикали, горизонтали или диагонали) были одинаковы.
10. Чебурашка хочет замостить без пропусков и перекрытий квадрат 7х7 клеточек плитками 1х5 клеточки и 2х3 клеточки. Сколько плиток ему для этого понадобится? Приведите пример такого замощения. Может ли он обойтись другим количеством плиток?
11. Дана шахматная доска, клетки которой окрашены в чёрный и белый цвета обычным образом. Разрешается за один ход, выбрав любой квадрат 2х2 клеточки, поменять цвета всех клеток в этом квадрате на противоположные.

Можно ли, сделав несколько указанных ходов, получить доску, окрашенную в один цвет?

12. На каждой из десяти карточек записано по одной цифре. Из этих карточек выложены два пятизначных числа (см. рис.): число 54138 в верхнем ряду и число 29076 в нижнем ряду. Поменяйте местами две карточки так, чтобы одно из получившихся пятизначных чисел было в 2 раза больше другого.




13. У Пети имеется прямоугольник 10х12 и квадратик 1х1. Может ли Петя разрезать этот прямоугольник на две части, не являющиеся прямоугольниками, а потом из этих двух частей и данного квадратика 1х1 сложить квадрат 11х11?

## 15 ОЛИМПИАДА

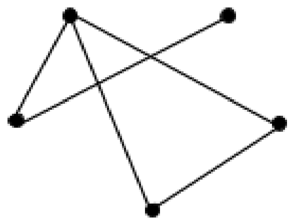
1. За 4 карандаша и 3 тетради заплатили 7000 рублей, а за 2 карандаша и 1 тетрадь – 2800 рублей. Сколько стоит одна тетрадь и один карандаш?
2. Вася, Петя и Коля делят некоторое количество конфет. Сначала Вася взял себе 20% всех конфет и ещё 12 конфет, затем Петя взял 25% оставшихся конфет и ещё 15 конфет, и, наконец, Коля взял 30% оставшихся после этого конфет и ещё 21 конфету. В результате такой делёжки все конфеты оказались разобранными. Кто из мальчиков взял конфет больше?
3. В угловых клетках квадрата 3х3 клеточки записаны числа 1, 9, 9, 5 так, как показано на рисунке. Можно ли в пустые клетки вписать некоторые числа (в каждую клетку – одно число), так, чтобы сумма чисел во всех четырёх угловых квадратах 2х2 была одна и та же?

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 9 |
| | | |
| 9 | | 5 |

4. Матроскин и Шарик каждое утро бегают к реке умываться. Они выбегают из дома одновременно и бегут по одной и той же дорожке. Скорость каждого из них постоянна, но Матроскин бежит в три раза быстрее Шарика, моется же Матроскин в два раза дольше, чем Шарик. Однажды Шарик, прибежав к речке, обнаружил, что не взял с собой полотенца. Он тут же побежал назад домой, схватил полотенце и прибежал к реке как раз в тот момент, когда Матроскин закончил умываться (бежал Шарик по той же тропинке и с той же скоростью, что и каждое утро). Кто обычно прибегает домой раньше – Шарик или Матроскин – или они прибегают домой одновременно?
5. Из книги выпал кусок, состоящий из подряд идущих листов. Оказалось, что номера первой и последней его страниц – трёхзначные числа, в записи каждого из которых участвуют цифры 1, 3 и 4. Сколько страниц содержит выпавший кусок?
6. Из цифр 1, 2, 3, 4 составили всевозможные четырехзначные числа, в записи которых каждая из этих цифр присутствует только один раз. Докажите, что сумма полученных чисел делится: а) на 2; б) на 3.

## 16 ВВЕДЕНИЮ В ТЕОРИЮ ГРАФОВ _– ПЕРВЫЕ ПОНЯТИЯ, СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Под ***графом*** мы будем понимать набор из нескольких точек, называемых ***вершинами***, и соединяющих их отрезков называемых ***ребрами*** (строгое определение графа несколько сложнее, но мы не будем сейчас его вводить). ***Степенью*** вершины называется число выходящих из нее ребер. Так, например, у вершины *А* графа, изображенного на рисунке, степень равна 3.



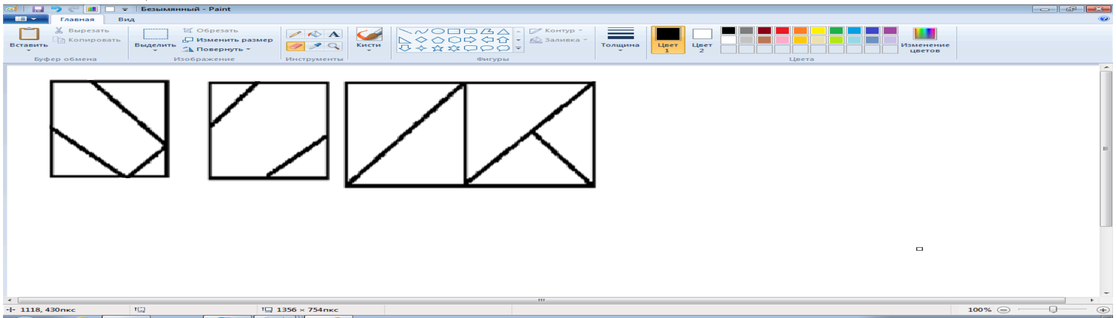
***Лемма о рукопожатиях*** утверждает, что в любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер (и, в частности, всегда является четной).

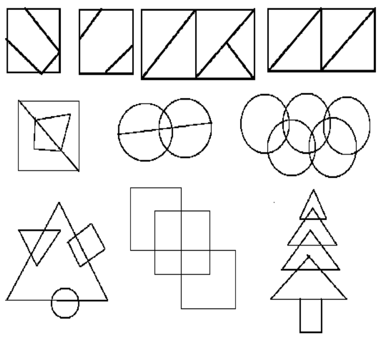
### Лемма о рукопожатиях. Основные понятия теории графов

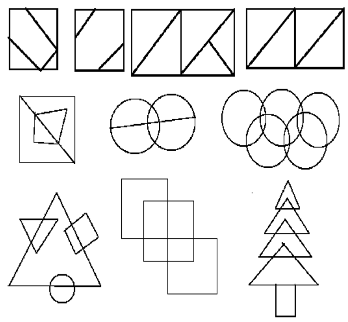
1. Кирилл, Тимофей и Вера делали самолетики. Каждый запустил в каждого по 2 самолетика. Сколько всего было сделано самолетиков, если дети кидали только свои самолетики?
2. Сколько бабушек и дедушек было у всех твоих бабушек и дедушек?
3. Мальчики при встрече обменялись рукопожатиями. При этом было сделано 6 рукопожатий. Сколько было мальчиков?
4. В государстве 50 городов, и из каждого выходит 8 дорог. Сколько всего дорог в государстве?
5. В турнире принимает участие 15 шахматистов. Может ли быть, чтобы в некоторый момент каждый из них сыграл ровно 7 партий?
6. Можно ли 1973 телефона соединить между собой так, чтобы каждый был соединён с 1971 телефоном?
7. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?
8. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

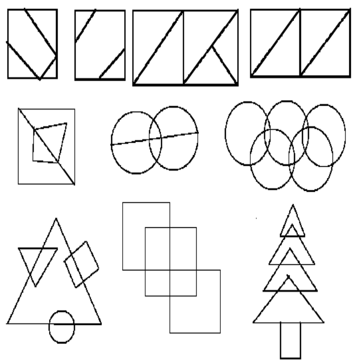
### Эйлеровы циклы и пути

1. Можно ли нарисовать каждую из этих фигурок, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя ни одну линию дважды? Если можно, нарисуйте. если нет, объясните, почему нельзя. (Рассказать задачу о кёнигсбергских мостах)

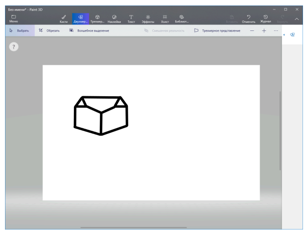








2. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям (см. рис.), так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?



## 17 РЕБУСЫ

1. Восстановите повреждённые записи арифметических действий

а) $\begin{array}{r} 5\,\bullet \\ +\ \bullet\,8\,4 \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,0 \end{array}$

б) $\begin{array}{r} 6\,\bullet\,5\,\bullet \\ -\ \bullet\,8\,\bullet\,4 \\ \hline 2\,8\,5\,6 \end{array}$

в) $\begin{array}{r} \bullet\,\bullet \\ \times\ 5\,2 \\ \hline \bullet\,6 \\ +\ \bullet\,\bullet\ \ \\ \hline \bullet\,7\,\bullet \end{array}$

г)
$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ \bullet\bullet \\ \hline \bullet\bullet 8 \\ +\ \bullet\bullet\phantom{0} \\ \hline 3\bullet\bullet \end{array}$$

д)
$$\begin{array}{r} 6\bullet \\ \times\ \bullet\bullet\bullet \\ \hline \bullet\bullet \\ +\ \bullet\bullet\phantom{0} \\ \bullet\bullet\phantom{00} \\ \hline \bullet\bullet\bullet 6 \end{array}$$

е)
$$\begin{array}{r} 2\bullet \\ \times\ \bullet 2 \\ \hline \bullet 8 \\ +\ 7\bullet\phantom{0} \\ \hline 7\bullet 8 \end{array}$$

2. Восстановите числовые примеры (*одинаковые цифры зашифрованы одинаковыми буквами, а разные – разными*):

**а)** $Р^{БО}$=БОРЯ; **б)** $О^{ДА}$=СТАРТ.

в)
$$\begin{array}{ccccc} ЛИ & \times & ЛИ & = & ЮНИ \\ : & & \times & & : \\ Ч & : & Ю & = & Ю \\ \hline Ч & \times & СЮ & = & ЛЮБ \end{array}$$

Как Вы думаете, найдется ли более одного ответа в пунктах задачи? (Попробуйте ответ обосновать).

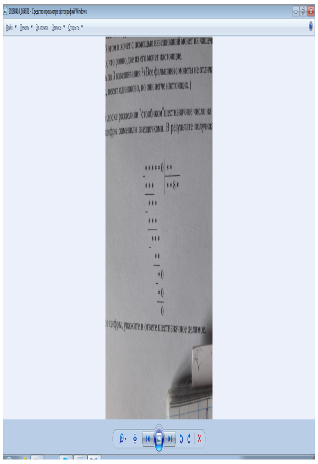
Как Вы думаете, найдется ли более одного ответа в пунктах задачи (Попробуйте ответ обосновать).

3. Петя сложил 11 раз четырёхзначное число и получил пятизначное число. Затем он заменил цифры буквами (одинаковые цифры – одинаковыми буквами, а разные цифры – разными буквами) и получилось равенство

$$\underbrace{МАЛО + МАЛО + \ldots + МАЛО}_{11\ слагаемых} = МНОГО$$

Какое наибольшее значение может принимать число *МАЛО*?

4. На классной доске разделили «столбиком» шестизначное число на двузначное. После этого некоторые цифры заменили звёздочками. В результате получилась следующая запись. Восстановите все цифры, укажите в ответе шестизначное делимое.



## 18 ЗАДАЧИ НА ВЗВЕШИВАНИЯ И ПЕРЕКЛАДЫВАНИЯ.

1. Имеется четыре гирьки весом 1г, 2г, 3г и 4г. Одна из этих гирек окрашена в красный цвет, другая – в белый, третья – в синий и четвёртая – в зелёный цвет. Какой вес имеет гирька каждого цвета, неизвестно, но известно, что красная гирька – не самая лёгкая и не самая тяжёлая. Покажите, как за три взвешивания на чашечных весах определить вес каждой гирьки.
2. Для опытов в мастерской должны были изготовить 10 стеклянных шариков: 2 красных, 2 синих, 2 жёлтых, 2зелёных и 2 белых. Все шарики должны иметь одинаковый вес. Однако изготовители допустили ошибку, и два шарика одного цвета оказались каждый на 1 грамм легче, чем нужно. В вашем распоряжении имеются точные аптечные весы с двумя чашками и набором гирь-разновесов, позволяющие точно определить, на сколько граммов содержимое одной чашки легче или тяжелее другой. Можно ли с помощью одного-единственного взвешивания определить, шарики какого цвета легче других?
3. Имеется 5 одинаковых по виду монет, среди которых две фальшивые, а три настоящие. Известно, что настоящие монеты весят одинаково и что одна из фальшивых монет легче, а другая – тяжелее настоящей монеты. Как при помощи трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь найти фальшивые монеты?
4. Из пяти золотых монет, вырученных Буратино от продажи букваря, только одна оказалась настоящей, а четыре – фальшивые. Но Буратино об этом не догадывался, считая все монеты настоящими. Пьеро узнал об этом, случайно подслушав разговор покупателей, обманувших Буратино. Пьеро хочет с помощью взвешивания монет на чашечных весах без гирь доказать Буратино, что только одна из его монет настоящая. Как это сделать за три взвешивания? (Все фальшивые монеты не отличаются по внешнему виду от настоящей, весят одинаково, но легче настоящей.)

5. Имеются 10 арбузов и весы, которые могут за одно взвешивание определить общий вес любых трёх арбузов (на весы разрешается класть ровно три арбуза). Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?
6. У фальшивомонетчика есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых 2 фальшивые, которые легче, чем настоящие, и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 20 настоящих монет?

## 19 ЛЖЕЦЫ И РЫЦАРИ

*На далёком острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, при этом внешне они никак не отличаются. Все рыцари живут в городе рыцарей, все лжецы — в городе лжецов.*

1. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Незнайка задумал два числа и сообщил Знайке их произведение. Знайка не смог отгадать задуманные числа. Какое произведение мог сообщить Незнайка?
2. Сидят мальчик и девочка. «Я – мальчик», – сказал первый ребёнок. «Я – девочка», – говорит второй ребёнок. Хотя бы один из них лжет. Кто мальчик, а кто – девочка?
3. Два мудреца написали на семи карточках числа от 5 до 11. После они перемешали карточки, первый мудрец взял себе три карточки, второй взял две, а две оставшиеся карточки они не глядя спрятали в мешок. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Я знаю, что сумма на твоих карточках четна!» Какие числа написаны на карточках первого мудреца?
4. Один из двух братьев – близнецов по имени Джон совершил преступление. Известно, что по крайней мере один из близнецов всегда лжет. Судья спросил у братьев по очереди: «Вы – Джон?» Первый ответил: «Да». Второй тоже что-то ответил. После этого судья смог определить, кто из них на самом деле Джон. Определите это и вы.
5. В комнате находятся три мальчика: Олег, Дмитрий и Трофим. Известно, что каждый из них либо всегда лжет, либо всегда говорит правду. На вопрос: «Сколько лжецов среди вас троих в этой комнате?», – Олег ответил, что один, Дмитрий – что два, а Трофим – что три.
   Сколько лжецов среди этих мальчиков? Кто из них является лжецом? (Каждый из мальчиков знает, кем – лжецом или правдивым – является любой из них)
6. На некотором острове каждый из островитян либо всегда лжет, либо всегда говорит правду. Среди трех островитян А, Б и В два лжеца и один правдивый. У каждого из них по монете. Возможно, среди этих трех монет есть и фальшивые. Каждый из островитян А, Б и В знает у кого какая (фальшивая или нет) монета находится. Они высказали следующие утверждения.
   1) А: «У Б – фальшивая монета».
   2) Б: «У В – фальшивая монета».
   3) В: «У А – фальшивая монета».
   4) А: «У В – настоящая монета».

   Какая монета находится у островитянина А? Сколько всего настоящих монет у островитян А, Б и В?

7. На некотором острове каждый из островитян либо всегда лжет, либо всегда говорит правду. Двое из трех островитян А, Б и В высказали следующие утверждения.

 А: «Островитянин Б – лжец».

 Б: «Ровно один из островитян А и В лжец».

 Кем (лжецом или правдивым) является островитянин В?( Каждый из островитян знает, кем – лжецом или правдивым является любой из них)

8. В 5-ом классе некоторые школьники всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Однажды, войдя в класс, учитель поинтересовался, кто сделал домашнее задание. Были получены следующие ответы.

 Андрей: Боря не сделал домашнее задание. И Сережа тоже.

 Боря: Нет я сделал домашнее задание.

 Учитель: А ты не врешь?

 Боря: Спросите у Димы. Он всегда говорит правду.

 Сережа: И я сделал домашнее задание. Кстати и Дима тоже.

 Учитель: Ну, а ты, Дима, что молчишь? Ты действительно сделал домашнее задание?

 Что ответил Дима? (Каждый из мальчиков знает, кто сделал домашнее задание, а кто – нет)

9. На некотором острове каждый из аборигенов либо лгун (т.е. всегда лжет), либо правдивый (т.е. всегда говорит правду). Известно, что любые два островитянина имеют разный рост. Каждый из аборигенов высказал по два утверждения:

 А) Нет человека на острове ниже чем я.

 Б) Островитян которые выше меня, больше 100 человек.

 Сколько аборигенов живет на острове? Сколько среди них лгунов?

10. До царя Гороха дошла молва, что кто-то из троих богатырей убил Змея Горыныча. Царь приказал всем троим явиться ко двору, и молвили они:

- Змея убил Добрыня Никитич, – сказал Илья Муромец.
- Змея убил Алёша Попович, – молвил Добрыня Никитич.
- Я убил змея, – добавил Алёша Попович.

При этом известно, что один из них сказал правду, а двое слукавили. Кто убил Змея?

## 20 МИНИ ОЛИМПИАДА

1. Представьте число 100 в виде суммы четырех слагаемых, которые удовлетворяли бы следующим условиям: если от первого слагаемого отнять 4, ко второму прибавить 4, третье умножить на 4, а четвертое разделить на 4, то всегда получается одно и то же число.

2. На доске записаны числа 3, 9, 15. Разрешается сложить любых два, отнять третье и записать на доску. Можно ли через какое-то количество операций получить 2017? (Ответ объясните.)

3. В квадрат 3×3 записаны числа (см. левые рисунки 1.а) и 2.а)). Разрешается прибавлять или отнимать к числам стоящим в двух соседних по стороне клетках одно и то же натуральное число. Можно ли в какой-то момент получить квадрат, изображенный на соответствующих правых рисунках 1.б) и 2.б).

   А) Решите задачу для рисунков 1.а) и 1.б);

   Б) Решите задачу для рисунков 2.а) и 2.б).

Рис. 1.а)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Рис. 1.б)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Рис. 2.а)

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 3 | 8 |
| 6 | 7 | 9 |
| 1 | 8 | 4 |

Рис. 2.б)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 2 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

4. Клетки доски 8 × 8 необходимо раскрасить в несколько цветов так, чтобы у каждой клетки было ровно две соседние по стороне клетки такого же цвета, каким покрашена и она.
   а) Какое наименьшее количество цветов можно для этого использовать?
   б) Какое наибольшее количество цветов можно для этого использовать?
5. В круговом турнире трех стран играли 6 футбольных команд (по две от страны А, Б и В). Все три матча каждого тура проходят одновременно. Есть три судейские бригады – по одной из каждой страны. Можно ли так составить расписание туров и судей, чтобы каждая бригада не судила никакой матч игроков своей страны с соперниками из другой страны?

## 21 ДЕЛИМОСТЬ: делимость чисел, признаки делимости.

***Определение:*** Говорят, что число *a* делится на число *b* (или *a* кратно *b*, или *b* делитель *a*), если найдется такое целое число *q*, что $a = b \cdot q$. Обозначение $a \vdots b$.

1. В каком случае два числа a и b таковы, что a делится на b и b делится на a?
2. а) Верно ли, что если $a \vdots m$, $b \vdots n$, то $ab \vdots mn$; б) Верно ли, что если $a \vdots b$, $b \vdots c$, то $a \vdots c$?
3. В Тройном королевстве имеют хождение только монеты по 9 и по 15 золотых. Докажите, что такими монетами нельзя набрать сумму в 50 золотых.
4. а) Маша показывает такой фокус: ей называют любое трехзначное число, она приписывает к нему такое же, а потом в уме за секунду делит получившееся шестизначное число на 1001. Как она это делает?
   б) Саша заметила, что все шестизначные числа Маши делятся на 7. Почему? На какие еще числа они делятся?

5. а) Настя заметила, что $555 \vdots 37$ и $777 \vdots 37$. Сформулируйте и докажите общее утверждение. б) Определите без калькулятора, делятся ли числа 718718, 539539, 174174 на 77?

Признаки делимости

6. а) К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

б) К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 72.

7. Некоторое число делится на 4 и на 6. Обязательно ли оно делится на 24?
8. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.
9. На доске написано: 645■7235. Замените квадратик цифрой так, чтобы полученное число делилось на 3.
10. Замените квадратики в записи числа 72■3■ цифрами так, чтобы число делилось без остатка на 45.
11. Верно ли, что если записать в обратном порядке цифры любого целого числа, то разность исходного и нового чисел будет делиться на 9?
12. Вася нашёл число $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$, затем сложил в этом числе все цифры. Получилось новое число, в котором он опять сложил все цифры, и так далее, пока не получилось однозначное число. Какое?
13. В числе 65432789 вычеркните наименьшее количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 36.
14. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 225.
15. Петя заменил в примере на умножение одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными: АБ · ВГ = ДДЕЕ. Докажите, что он ошибся.

## 22 ИГРЫ И ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ (везде вопрос: кто и как? – объяснить стратегию)

1. «Кто раньше назовет число 100?» Играют двое. Один называет любое целое число от 1 до 9 включительно. Второй прибавляет к названому числу любое целое число от 1 до 9 включительно, какое захочет, и называет сумму. К этой сумме первый снова прибавляет любое целое число от 1 до 9 и называет новую сумму и т.д. Выигрывает тот, кто раньше назовет число 100. Кто выиграет при правильной игре?
2. «Минусы». В ряд записаны 7 минусов. Играют двое, ходят по очереди. Каждый ход один или два соседних минуса можно заменить на плюсы. Кто не может ходить – проиграл. Кто выиграет при правильной игре? (А если минусов не 7 а 8?)

*Выигрышные позиции*

1. Возьмем полоску клетчатой бумаги и занумеруем клетки числами 0,1,2,3,…. На одной из клеток стоит фишка. Двое играющих по очереди передвигают фишку влево на одну, две, три или четыре клетки. Проигрывает тот, кому

некуда ходить (значит выигрывает тот, кто поставил фишку на нуль). При каком начальном положении фишки выигрывает начинающий?

2. Условия игры те же, что и в задаче 2, но передвигать фишку можно лишь:

а) на 2 или 5 клеток;

б) на 1, 2 или 4 клетки;

в) на 2, 4 или 7 клеток.

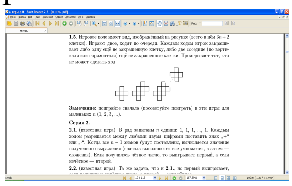
3. Имеется три кучки камней: в первой – 3 камней, во второй – 5, в третьей – 7. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать хода. *Кто выигрывает при правильной игре и как ему надо играть*? (*Шутка ли*!?)

4. Числа от а) 1 до 4; б) от 1 до 6 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того, как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он четен, то выигрывает первый игрок, если нечетен, то второй. Кто и как?

*Стратегия*

5. Игровое поле представляет собой прямоугольник размером а) $2\times 3$; б) $2\times 5$ разбитый на клеточки $1\times 1$. Играют двое, ходят по очереди. Каждым ходом игрок закрашивает либо одну еще не закрашенную клетку, либо две соседние (по вертикали или горизонтали) еще не закрашенные клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

6. Игровое поле имеет вид, изображенный на рисунке ниже. Играют двое, ходят по очереди. Каждым ходом игрок закрашивает либо одну еще не закрашенную клетку, либо две соседние (по вертикали или горизонтали) еще не закрашенные клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?



**1.5.** Игровое поле имеет вид, изображённый на рисунке (всего в нём $3n+2$ клетки). Играют двое, ходят по очереди. Каждым ходом игрок закрашивает либо одну ещё не закрашенную клетку, либо две соседние (по вертикали или горизонтали) ещё не закрашенные клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

**Замечание:** поиграйте сначала (посоветуйте поиграть) в эти игры для маленьких $n$ (1, 2, 3, ...).

**Серия 2.**

**2.1.** (известная игра). В ряд записаны $n$ единиц: 1, 1, 1, ..., 1. Каждым ходом разрешается между любыми двумя цифрами поставить знак „+“ или „·“. Когда все $n-1$ знаков будут поставлены, вычисляется значение полученного выражения (сначала выполняются все умножения, а затем — сложения). Если получилось чётное число, то выигрывает первый, а если нечётное — второй.

**2.2.** (известная игра). Та же задача, что и **2.1.**, но первый выигрывает,

7. В ряд записаны а) 5 единиц: 1 1 1 1 1; б) 6 единиц: 1 1 1 1 1 1 1 . Играют двое, ходят по очереди. Каждым ходом разрешается между любыми двумя цифрами ставить знак «+» или «·». Когда все а) 4; б) 5 знаков будут поставлены, вычисляется значение полученного выражения (сначала выполняются все умножения, а затем – сложения). Если получилось четное число, то выигрывает первый, а если получилось нечетное – второй.

8. В ряд записаны 6 цифр: 1 2 1 2 1 2. Играют двое, ходят по очереди. Каждым ходом разрешается между любыми двумя цифрами поставить знак «+» или « · ». Когда все 5 знаков будут поставлены, вычисляется значение полученного выражения (сначала выполняются все умножения, а затем – сложения). Если получилось четное число, то выигрывает первый, а если получилось нечетное – второй.

*Симметрия*

9. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто и как? (*симметрия*)

10. У ромашки а) 5 лепестков; б) 6 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто и как? (*ложный ход – четность*)

## 23 ЧЕТНОСТЬ – НАЧАЛО ТЕМЫ ИНВАРИАНТ

1. Четной или нечетной будет сумма двух четных чисел? А трех нечетных?
2. Миша говорит, что знает четыре числа, сумма и произведение которых – нечетные числа. Прав ли Миша?
3. Можно ли заплатить без сдачи:
   а) 20 копеек семью монетами по 1, 5 и 10 копеек?
   б) 20 копеек семью монетами по 1 и 5 копеек?
   в) 25 копеек восемью монетами по 1 и 5 копеек?
4. Андрей купил в магазине 2 альбома для рисования по одной цене, 20 одинаковых тетрадей, несколько карандашей по 6 р. 20 коп. и несколько ластиков по 4 рубля. Ему сказали, что в кассу следует уплатить 55 рублей 65 копеек. Андрей попросил пересчитать стоимость покупки, и ошибка была устранена. Как Андрей догадался, что она была допущена?
5. На шахматную доску размером 8*8 пролили краску. Может ли количество испачканных клеток быть на 17 меньше количества чистых клеток? Ответ объясните.
6. Конь вышел из поля а1, сделал несколько ходов и вернулся в то же место. Докажите, что он сделал четное количество ходов.
7. Конь вышел из поля а1, обошел все клетки доски по одному разу и пришел в клетку h8. Могло ли такое быть?
8. Из шахматной доски вырезали клетки *a*1 и *h*8. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на прямоугольники 1×2.
9. По кругу сцепили несколько шестеренок. Смогут ли они вращаться, если их было: а) двенадцать; б) тринадцать?
10. По кругу написано 7 натуральных чисел. Верно ли, что среди этих чисел найдутся два соседних, сумма которых четна?
11. На доске написано равенство: 1*2*3*4*5*6*7*8*9=20 (вместо символов «*» - в неизвестном порядке расставлены знаки «+» и «-»). Докажите, что это равенство не может быть верным.
12. На доске 25*25 расставлены 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.
13. Восемь кустов малины растут в ряд. Известно, что число ягод, растущих на любых двух соседних кустах, отличается на 1. Может ли общее количество ягод равняться 2005?
14. Записано четыре числа: 0, 0, 0, 1. За один ход разрешается прибавить 1 к любым двум из этих чисел. Можно ли за несколько ходов получить четыре одинаковых числа?

15. Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется - определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты. а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше). б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?

## 24 ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

При решении задач на движение лучше всего сразу обозначить все неизвестные величины переменными и записать условие при помощи уравнений. Помочь в этом может схема движения. Единственная формула, которая может понадобиться при составлении уравнений, — это определение скорости $V = S/t$ ($V$ — скорость, $S$ — пройденный путь, $t$ — время), а также получающиеся из него формулы $S = V \cdot t$ и $t = S/V$.

Следите за тем, чтобы все величины были выражены в одной системе единиц измерения. Если расстояния измеряются в метрах, а время в секундах, то скорость должна измеряться в метрах в секунду. Если же расстояния измеряются в километрах, а время в часах, то скорость должна измеряться в километрах в час. При составлении уравнений проверяйте, что в левой и правой частях стоят величины, измеряемые в одних и тех же единицах (чтобы не приравнивать, скажем, секунды и километры). При переводе величин из одной системы единиц в другую полезно помнить, что 10 м/с = 36 км/ч.

1. Машина едет со скоростью *60 км/ч*. На сколько следует увеличить скорость, чтобы выиграть на каждом километре по одной минуте? (Ответ: это сделать невозможно)
2. Между лисой и зайцем 10 *м* . Когда лиса поймает зайца, если она бежит со скоростью 8 *м/с* , а он – со скоростью 7 *м/с.* (Ответ: через 10 сек)
3. Послан человек из Москвы в Вологду, и проходит он каждый день 40 верст. На следующий день вслед послан другой человек, проходящий 45 верст в день. Когда второй догонит первого? (Ответ: через 8 дней)
4. В двух сосудах находится по 540 литров воды. Из первого вытекает по 25 литров в минуту, а из другого – 15 литров. Через какое время во втором сосуде воды останется в шесть раз больше, чем в первом? (Ответ: через 20 минут)
5. Я иду от дома до школы 30 минут, а мой брат – 40 минут. Через сколько я догоню брата, если он вышел из дома на пять минут раньше меня? (Ответ: через 15 минут)
6. Пассажир проезжая в трамвае, заметил знакомого, который шел вдоль линии трамвая в противоположную сторону. Спустя 10 секунд пассажир вышел из трамвая и пошел догонять своего знакомого. Через сколько секунд он догонит знакомого, двигаясь в два раза быстрее знакомого и в пять раз медленнее трамвая? (Ответ: через 110 сек)
7. Два охотника отправились одновременно навстречу друг другу из двух деревень, расстояние между которыми 18 км. Первый шел со скоростью 5 км/ч, а второй - 4 км/ч. Первый охотник взял с собой собаку, которая бежала со скоростью 8 км/ч. Собака сразу же побежала навстречу второму охотнику, встретила его, тявкнула, повернула и с той же скоростью побежала навстречу хозяину, и так далее. Так она бегала до тех пор, пока охотники не встретились. Сколько километров она пробежала?

## Средняя скорость

1. Автомобиль половину пути ехал со скоростью 50 *км/ч* , а вторую половину – со скоростью 30 *км/ч* . Какова его средняя скорость? (Ответ: через 37,5 *км/ч*)
2. Из А в В пешеход идёт со скоростью 8 км/ч, а обратно со скоростью 6 км/ч. Найдите среднюю скорость движения пешехода на всём пути. (Ответ: 6 6/7 *км/ч*)
3. Автомобиль движется 2 *ч* со скоростью 100 *км/ч*, 1 *ч* со скоростью 130 *км/ч* и 3 часа со скоростью 90 *км/ч*. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути. (Ответ: 100 *км/ч*)
4. Два путника одновременно вышли из пункта А в пункт В. Первый половину расстояния шел со скоростью 5 *км/ч,* а вторую половину – со скоростью 4 *км/ч* . А второй путник половину времени, затраченного им на переход, проходил по 5 *км/ч,* а затем вторую половину времени – по 4 *км/ч.* Кто из них раньше пришел в пункт В?(Ответ: второй)
5. Сначала самолет летел со скоростью 180 *км/ч,* а когда ему осталось лететь на 320 *км* меньше, чем он пролетел, он увеличил скорость до 250 *км/ч*. Оказалось, что средняя скорость самолета на всем пути 200 *км/ч*. Сколько времени *длился* полет? (Ответ: 5 часов 36 минут)
6. На дороге соединяющие два аула нет ровных участков. Автобус едет в гору всегда со скоростью 15 *км/ч*, а под гору – 30 *км/ч.* Найдите расстояние между аулами, если известно, что путь туда и обратно автобус проезжает за 4 часа без остановок.(Ответ: 40 *км*)
7. Первую треть пути велосипедист проехал со скоростью 15 *км/ч*. С какой скоростью он проехал оставшуюся часть пути, если его средняя скорость на всём пути оказалась равной 20 *км/ч*. (Ответ: 24 *км/ч*)
8. Автомобиль проехал половину пути со скоростью 60 км/ч. Половину оставшегося времени движения он ехал со скоростью 15 км/ч, а последний участок пути – со скоростью 45 км/ч. Вычислите среднюю скорость автомобиля на всём пути. (Ответ: 40 *км/ч*)
9. Турист шел 3,5 часа, причём за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/час?

## 25 МИНИ ОЛИМПИАДА 2

1. Куб, поверхность которого окрашена, распилили на 27 одинаковых по размеру кубиков. Сколько получилось при этом кубиков, окрашенных с трёх сторон? С двух сторон? С одной стороны? Сколько кубиков, вообще не окрашенных?

2. В двух мешках находится 170 кг сахара. Когда из второго мешка 15% его содержимого пересыпали в первый, то в обоих мешках сахара стало поровну. Сколько килограммов сахара было в каждом мешке первоначально?

3. В десятичной записи двух натуральных чисел участвуют только цифры 1, 4, 6, 9. Может ли одно из этих чисел быть ровно в 3 раза больше другого?

4. Прямоугольник разбит на четыре маленьких прямоугольника. Площади трёх из них известны: 3, 4, 5 (см. рисунок, на котором цифра, стоящая внутри прямоугольника, равна его площади). Найдите площадь четвёртого маленького прямоугольника.

| | |
|---|---|
| 3 | 4 |
| ? | 5 |

5. Можно ли в числовом ребусе

*КНИГА+КНИГА=НАУКА*

заменить каждую букву цифрой (разные буквы – разными цифрами, а одинаковые буквы – одинаковыми цифрами) так, чтобы получилось верное числовое равенство?

## 26 ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ: ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ, ПОСЛЕДНЯЯ ЦИФРА

Основная теорема арифметики утверждает, что любое натуральное число $N > 2$ может быть представлено в виде $N = {p_1}^{m_1}{p_2}^{m_2} \dots {p_k}^{m_k}$ $N = {p_1}^{m_1}{p_2}^{m_2} \dots {p_k}^{m_k}$, где $m_1, m_2, \dots, m_k$–натуральные числа, а $p_1, p_2, \dots, p_k$–попарно различные простые числа; более того, это представление единственно с точностью до перестановки множителей.

Чтобы проверить, является ли натуральное число n составным, достаточно проверить, делится ли оно на какое-нибудь из простых чисел, не превосходящих $\sqrt{n}$.
(По определению $\sqrt{n}$ — это такое неотрицательное число, что $(\sqrt{n})^2 = n$.)

1. Являются ли простыми следующие числа: 79; 461; 1001; 2817; 111; 1111; 111111? Составные числа разложите на простые множители.
2. Представьте число 200000 в виде произведения двух чисел, в десятичной записи которых нет нулей.
3. Существует ли натуральное число, произведение цифр которого равно 1980?
4. Сколько различных делителей у числа: а) 81; б) 36; в) 24.
5. Сегодня среда. Через 100 дней наступит счастливый день. Какой это будет день недели?
6. Леонид Иванович поднимается на собственный вертолет по трапу с 222 ступеньками. С последней ступеньки он сможет влезть в вертолет, только если наступит на эту ступеньку левой ногой, а иначе грохнется с огромной высоты. С какой ноги надо ему начинать подъем? А если бы у Леонида Ивановича есть пятиногий зверь, а шагнуть на последнюю ступеньку он мог только третьей или четвертой ногой?
7. Артур, Степан и Гриша играют в мяч, пасуя его по кругу. Вначале мяч был у Артура. У кого он будет после 1001-го паса?

8. Саша, Женя и Алла играли в мяч, пасуя его по кругу. Вначале мяч был у Саши. После того, как девочки сделали сотый пас, к ним присоединилась Ира. Где должна встать Ира, чтобы мяч оказался у нее: а) после 199-го паса? б) после 200-го паса?
9. На доске написано число 61. Каждую минуту число стирают с доски и на его место записывают произведение его цифр, увеличенное на 13. Какое число окажется на доске через час?
10. Начнем считать пальцы на руке следующим образом: пусть1-м будет большой, 2-м указательный, 3-м средний, 4-м безымянный, 5-м мизинец, 6-м снова большой, 7-м средний, 8-м указательный, 9-м большой, 10-м указательный, и так далее. Какой палец будет 2000-м?
11. В новогоднюю ночь на окне стояли в ряд (слева направо) герань, крокус и кактус. Каждое утро Маша, вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре. Днем Таня, поливая цветы, меняет местами тот, что в центре, с тем, что слева. В каком порядке будут стоять цветы через 365 дней в следующую новогоднюю ночь?

## 27 КОМБИНАТОРИКА: ПРАВИЛО СУММЫ, ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ

*Задача 1.* На подносе лежат 5 яблок и 3 груши. Сколькими способами можно выбрать фрукт с подноса?

***Правило суммы:*** Пусть объект $a$ можно выбрать $m$ способами, а объект $b$ можно выбрать $n$ способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо $a$, либо $b$» можно сделать $m + n$ способами. (Можно обобщить)

*Задача 2.* Имеются три города: $A$, $B$ и $C$. Из $A$ в $B$ ведут три дороги, из $B$ в $C$ – пять дорог. Сколько различных путей ведут из $A$ в $C$? (Прямого пути между А и С нет).

***Правило произведения:*** Пусть объект $a$ можно выбрать $m$ способами, после чего объект $b$ можно выбрать $n$ способами. Тогда упорядоченную пару ($a$, $b$) можно выбрать $mn$ способами. (Можно обобщить)

*Перестановки. Факториал.*

Два элемента $a$ и $b$ могут быть выписаны в строчку всего двумя способами: $ab$ и $ba$. Для трёх элементов существует 6 вариантов: 123; 132; 213; 231; 321; 321. Нетрудно посчитать и число перестановок множества из 4 элементов: 4 столбца по 6 перестановок в каждом. Всего 24 перестановки. Очевидно, перестановки на 5 элементах можно расположить в 5 столбцов, по 24 в каждом. Значит, всего существует $5 \cdot 24 = 120$ таких перестановок.

Для числа перестановок $n$ элементов есть обозначение: $n!$. Факториал равен произведению всех натуральных чисел от 1 до $n$. Например, $4! = 1*2*3*4$. Так, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, ..., $10! = 3\ 628\ 800$. Принято считать, что если ответ выражен через факториалы, то всё сделано.

1. В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку?
2. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
3. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?
4. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного короля, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?
5. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь к театральной кассе?
6. Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?
7. Сколько существует трёхзначных чисел, в запись которых входит ровно одна цифра 5?
8. Сколько семизначных чисел не содержат цифры 2?
9. В корзине сидят котята — четыре чёрных, шесть рыжих и два белых. Сколькими способами можно выбрать трёх котят так, чтобы они все были разной окраски? Котята одного цвета друг от друга отличаются!
10. В языке аборигенов далекого острова 10 прилагательных, 20 существительных и 15 глаголов. Предложением называется всякое сочетание либо существительного и глагола, либо прилагательного, существительного и глагола (порядок слов в предложении всегда именно такой). Сколько всего предложений в этом языке?
11. Корабли, заходя в порт, подают сигналы, поднимая на мачте флаги один над другим. Сколько сигналов можно подать, если есть флаги четырёх цветов, и каждый сигнал подаётся:

а) двумя флагами;
б) тремя флагами;
в) четырьмя флагами?

Порядок флагов важен: они расположены на мачте один над другим.

12. На балу собрались 5 дам и 5 кавалеров. Сколькими способами они могут разбиться на пары?

## 28 НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

***Теорема 1 (соотношение между сторонами и углами треугольника).*** *В любом треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона, и наоборот.*

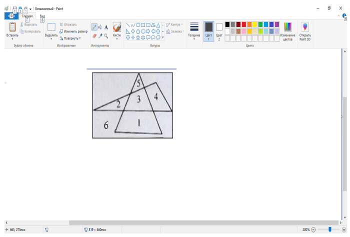
***Теорема 2 (неравенство треугольника).*** *Если A, B, C — вершины треугольника, то выполнено неравенство $AB + BC > AC$.*

***Теорема 3 (обобщенное неравенство треугольника).*** *Если A, B, C — три точки на плоскости (или в пространстве), то выполнено неравенство $AB + BC \geq AC$. При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда эти три точки лежат на одной прямой, причем точка B лежит между точками A и C.*

1. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3,8, длина стороны AB равна 0,6. Найдите длину третьей стороны, если известно, что ее длина – целое число.
2. В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.
3. От Санкт-Петербурга до Москвы – 660 км, от Санкт-Петербурга до деревни Лыково – 310 км, от Лыкова до Клина – 200 км, от Клина до Москвы – 150 км. Каково расстояние от Лыкова до Москвы?
4. У Насти расстояние от дома до магазина 200 м, от магазина до парикмахерской 300 м, от парикмахерской до школы 500 м, а от дома до школы 1 км. Какое расстояние от дома Насти до парикмахерской?
5. Света утверждает, что в треугольнике длина любой его стороны не превосходит полупериметра. Докажите, что Света не ошибается.

## 29 ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ, ОТРЕЗКОВ, РАЗБИЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПЕРИМЕТРЫ

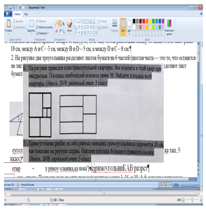
1. Отметьте на одной прямой четыре точки A, B, C, D так, чтобы расстояние между точками A и B было равно 10 см, между A и C – 3 см, между B и D – 5 см, а между D и C – 8 см.
2. На рисунке два треугольника разделяют листок бумаги на 6 частей (шестая часть — это то, что останется на листе, если вырезать оба треугольника). Нарисуйте два четырёхугольника, которые разделяют лист бумаги на 9 частей. Пронумеруйте полученные части.



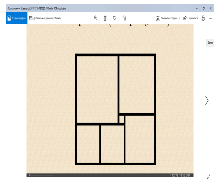
3. Можно ли прямоугольник разрезать на три прямоугольника A, B, C так, чтобы у A был самый большой периметр, у B самая большая площадь, а у C самая большая диагональ? Не забудьте обосновать ответ.
4. На стороне AC треугольника ABC отметили точку E. Известно, что периметр треугольника ABC равен 25 см, периметр треугольника ABP равен 15 см, а периметр треугольника BCE равен 17 см. Найдите длину отрезка BE.
5. Прямоугольник разбит на 9 меньших прямоугольников. Периметры четырёх из них указаны на рисунке. Чему равен периметр прямоугольника $x$?

| | | |
|---|---|---|
| 10 | | $x$ |
| 11 | | |
| 12 | | 13 |

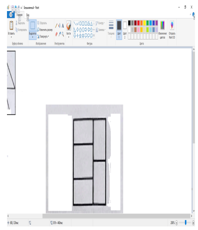
6. На рисунке приведен план прямоугольной квартиры. Все комнаты в этой квартире квадратные. Площадь наибольшей комнаты равна 36. Найдите площадь всей квартиры.



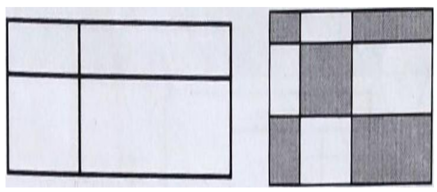
7. Прямоугольник составлен из шести квадратов. Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



8. Прямоугольник разбит на пять равных меньших прямоугольников периметра 20 см, как показано на рисунке справа. Найдите площадь большего прямоугольника.



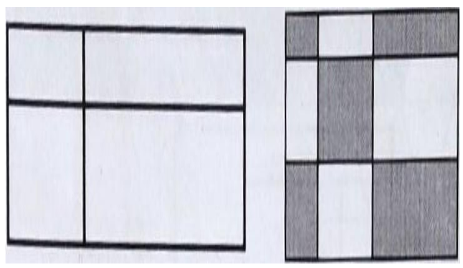
9. Прямоугольник ABCD разрезали на 4 меньших прямоугольника, как показано на рис. справа. Периметр трех из этих прямоугольников равны 11, 16, и 19. А о периметре четвертого прямоугольника известно, что он не самый большой и не самый маленький. Найдите периметр ABCD.



10. Прямоугольник разбит двумя горизонтальными и двумя вертикальными прямыми на 9 меньших прямоугольников, окрашенных в шахматном порядке. Известно, что сумма периметров белых прямоугольников равна 10 см, а сумма периметров чёрных – 8 см. Найдите :

а) периметр исходного прямоугольника;

б) периметр среднего чёрного прямоугольника.



**30 ОЛИМПИАДА**

1. В некотором месяце суббот меньше чем воскресений, а вторников меньше чем понедельников. Каким днем недели начинается и заканчивается данные месяц?
2. У Бори в тетради записано число 2020, а у Лёни – число 250. За один ход Боря прибавляет к своему числу произвольное натуральное число, а Лёня умножает на то же самое число (которое прибавляет Боря). Могут ли мальчишки уравнять свои числа, сделав не более 250 ходов?
3. В однокруговом волейбольном турнире приняло участие 10 команд. Каждая команда сыграла с каждой ровно по одному матчу до двух побед в партиях (сетах). Как известно, ничьих в волейболе не бывает, а любая команда за каждый выигранную партию получает одно очко (т.е. если результат матча 2:0, то команда-победитель получает 2 очка, а проигравшая команда получает 0 очков; если же результат 2:1, то победитель получает 2 очка, а проигравшая команда получает 1 очко).

а) Могли ли три победителя турнира в сумме набрать очков больше, чем все оставшиеся команды вместе? (Ответ обоснуйте.)

б) А могло ли случиться наоборот: три победителя турнира в сумме набрали очков меньше, чем все оставшиеся команды вместе?

в) Пусть в турнире участвуют $n$ команд. При каком наибольшем числе $n$ три победителя могли в сумме набрать очков больше, чем все оставшиеся команды вместе?

4. В классе 20 человек. На контрольной по математике выяснилось, что линейки есть не у всех (и ни у кого не было двух или более линеек). Поэтому, время от времени один из учеников с линейкой отдавал линейку какому-нибудь ученику без линейки. В конце урока 10 учеников заявили, что каждый из них отдавал линейку чаще, чем получал. Сколько линеек имелось на контрольной?
5. Конь-хамелеон ходит по клетчатой доске как обычный конь (буквой «Г»). Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в ее цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого коня-хамелеона поставили в одну из клеток чёрной доски 8×8. Сможет ли он раскрасить ее в шахматном порядке?
6. а) Дан квадрат 8×8, из него вырезаны три квадрата 3×3. Докажите, что из него можно вырезать еще по крайней мере один квадрат 3×3;

б) дан квадрат 28×28, из него вырезано $k$ квадратов 3×3. При каком наибольшем натуральном $k$ можно гарантированно вырезать из исходного квадрата еще по крайней мере один квадрат 3×3?

7. Можно ли отметить на плоскости:

а) 7 точек так, чтобы нашлись три квадрата, все вершины которых совпадали с отмеченными точками?

б) 6 точек так, чтобы нашлись три квадрата, все вершины которых совпадали с отмеченными точками?

в) 8 точек так, чтобы нашлись четыре квадрата, все вершины которых совпадали с отмеченными точками?

Учебное издание

**Мартыненко Игнат Михайлович**

# Сборник заданий для учащихся 5 классов школы юных математиков и информатиков

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *Б.В.Задворный*

Подписано в печать 19.05.2015 Формат 60×84/16. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,28. Уч.-изд. л. 1,88. Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,

Распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.

Пр. Независимости, 4, 220030, Минск

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

на копировально-множительной технике

факультета прикладной математики и информатики

Белорусского государственного университета

Пр. Независимости, 4, 220030, Минск