

Câu 37: [2D4-5.2-2] (SỞ GD VÀ ĐT HA NAM-2018) Xét các số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa

mãn $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2$. Tính $F = -a + 4b$ khi $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $F = 7$. **B.** $F = 6$. **C.** $F = 5$. **D.** $F = 4$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có

$$4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2 \Leftrightarrow 4(a + bi - a - bi) - 15i = i(a + bi + a - bi - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 8b - 15 = (2a - 1)^2 \quad \text{suy ra} \quad b \geq \frac{15}{8}.$$

$$\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right| = \frac{1}{2} \sqrt{(2a - 1)^2 + (2b + 6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8b - 15 + 4b^2 + 24b + 36} = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 + 32b + 21}$$

Xét hàm số $f(x) = 4x^2 + 32x + 21$ với $x \geq \frac{15}{8}$

$f'(x) = 8x + 32 > 0, \forall x \geq \frac{15}{8}$ suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left[\frac{15}{8}; +\infty\right)$ nên

$$f(x) \geq f\left(\frac{15}{8}\right) = \frac{4353}{16}.$$

Do đó $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4353}{16}}$ khi $b = \frac{15}{8}; a = \frac{1}{2}$.

Khi đó $F = -a + 4b = 7$.