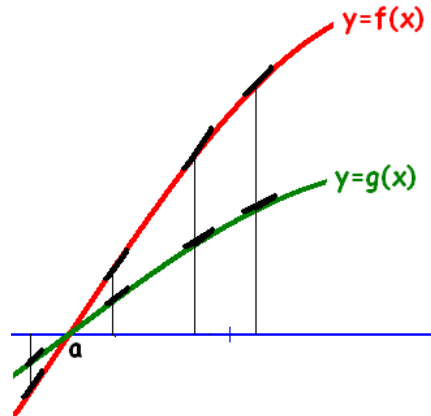


Si al calcular $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ ó $\alpha = \pm\infty$ llegamos a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ y existe $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$


Observa el gráfico.

Cuando el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe, significa que la relación entre las ordenadas de $y = f(x)$ y las de $y = g(x)$ tiende a estabilizarse.

Si existe el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ significa que tiende a estabilizarse la relación entre sus pendientes.

Las indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$ 1^∞ 0^∞ y otras se pueden poner, con algo de habilidad, en forma de cociente para que se les pueda aplicar la regla de L'hôpital.

Regla de L'Hôpital

Es una consecuencia del teorema de Cauchy y nos permite obtener fácilmente ciertos límites que, sin esta regla, resultarían complicadísimos.

Esta regla dice:

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces se cumple que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración:

Si f y g son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x) se cumplirá :

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ donde } c \in (a, x) \text{ (Teorema de Cauchy)}$$

Pero $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ luego $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Si $x \rightarrow a$ entonces $c \rightarrow a$ ya que $c \in (a, x)$ luego $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Como existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ por hipótesis, existirá también $\lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ y ambos serán iguales.

Queda, por tanto, que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

La regla de L'Hôpital también puede ser aplicada al caso de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Con este resultado se resuelven todos los casos de indeterminación del cálculo de límites : $0/0$, ∞/∞ , $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , ∞^0 y 0^0 .

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Este es un caso de indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ por lo que podemos aplicar la regla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

La regla puede aplicarse una o más veces, mientras se mantenga la indeterminación.

Actividades

Calcula los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctg x - x}{2x - \arcsen x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \cot x$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \cdot \sin x}{x^3 - x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \ln x$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} \cdot \ln x \right]$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$$

$$L\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

$$L\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)e^x + 1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{sen} 6x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\pi - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{7x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\operatorname{sen}(x^2 - 16)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{2x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcsen} x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 3x)^{1/\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(3+h) - \log 3}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \log\left(1 + \frac{3}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos^2 x)}{x^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(5+h^2) - \ln 5}{h^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\ln(\sqrt{x} - \sqrt{3}) + \ln\left(\frac{x}{x-3}\right)\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log\left(\frac{x}{1-x}\right) + \log\left(\frac{1-x^2}{x}\right)}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

Este límite es del tipo $\frac{0}{0}$ y cumple las condiciones de la regla de L'hôpital

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x + 4}{6x + 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$$

1. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x(1 - \sin x)}{\cos^2 x}$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2^{1/x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - 2^{1/x}\right)^0}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2^{1/x} \frac{-1}{x^2} \ln 2}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2^{1/x} \ln 2 = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$$

Este límite es del tipo 1^∞ para ponerlo en forma de cociente tomamos logaritmos

en $f(x) = (\cos x + \sin x)^{1/x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\ln f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln (\cos x + \sin x)^{1/x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} [\ln (\cos x + \sin x)] \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos x + \sin x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} = 1$$

Como sabemos

que $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln f(x)] = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right)$ entonces tendremos:

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln f(x)] = 1 \Leftrightarrow e^1 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x} = e$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \ln 3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x (\ln 3)^2}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x (\ln 3)^3}{6} = \frac{+\infty}{6} = +\infty$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{3x^4 - 2x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - e^x}{x^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 3 + e^{-2x}}{x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$$

En este último ejemplo comprobamos mediante la regla de L'Hôpital, que una función exponencial es un infinito de orden superior a una función potencial.

Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - m \operatorname{sen}(x)}{x^2}$ es finito. Determina el valor de m y calcula el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - m \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \frac{0 - m \operatorname{sen}(0)}{0^2} = \frac{0}{0}, \text{ aplicamos la regla de L'Hôpital}$$

$$f'(x) = 1 - m \cos(x); \quad g'(x) = 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - m \cos(0)}{2 \cdot 0} = \frac{1 - m}{0}$$

Como el límite tiene que ser finito, debe ser $\boxed{m=1}$, pues si $m \neq 1$, $\frac{1-m}{0} = \pm\infty$.

Llegamos de nuevo a la indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos otra vez la regla de L'Hôpital:

$$f''(x) = m \operatorname{sen}(x) \quad ; \quad g''(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{m \operatorname{sen}(0)}{2} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \cos(x) - ae^x}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ b, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcula a y b sabiendo que es continua la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

Soluc.: Como es continua, en particular es continua en $x=0$ y por tanto $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = b$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0 + \cos 0 - ae^0}{0^2} = \frac{1-a}{0}$. Como tiene que ser igual a b , debe ser $\boxed{a=1}$, pues de lo contrario el límite sería $\pm\infty$.

$f(x) = \frac{x + \cos x - e^x}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$, aplicamos la regla de L'Hôpital:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x - e^x}{2x} = \frac{0}{0}$ De nuevo aplicamos la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - e^x}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\sin(x^2)}$ es finito e igual a 1, calcula los valores de a y b

Soluc.: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\sin(x^2)} = \frac{0}{0}$, aplicamos la regla de L'Hôpital

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + b + \sin(x)}{2x \cos(x^2)} = \frac{b}{0}$; como tiene que ser finito, debe ser $\boxed{b=0}$,

pues de lo contrario el límite sería $\pm\infty$.

Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a + \cos(x)}{2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)} = \frac{2a+1}{2}$

Como nos dicen que el límite vale 1; $\frac{2a+1}{2} = 1$, luego $\boxed{a = \frac{1}{2}}$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi x) \cdot (1 + a \cos(\pi x))}{\sin(x^2)}$ es finito, calcula "a" y el valor del límite.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x (\ln x)^2}{(x-1)^2}, & \text{si } x \neq 1 \\ a, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Sea $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

a) Sabiendo que f es continua, calcula a

b) Estudia la existencia de asíntota horizontal de la gráfica. En caso de que exista, determina su ecuación.

Calcula: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x - \sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x - \sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x - \sin(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln(x)} - \frac{2}{x^2 - 1} \right]$

Sol.: a) $\nexists$ pues por la izda es ∞ y por la dcha $-\infty$ b) $-\frac{1}{2}$ c) -2 d) 2 e) 0 f) 1

Dada la función $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, para $x \neq 0$, determina las asíntotas de su gráfica. Sol.: A.V.: $x=0$ A.H.: $y=1$

Sea $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \frac{x (\ln x)^2}{(x-1)^2}$. Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, hállala. Sol.: A.H.: y=0

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - a \operatorname{sen}(x) + x \cos(3x)}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite. Sol.: a=2 ; $-\frac{1}{2}$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{m}{2x} \right)$ es finito, calcula "m" y el valor del límite. Sol.: m=2 ; $-\frac{1}{2}$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$ es finito e igual a 1, calcula los valores de a y b. Sol.: a = $\frac{1}{2}$, b=0

Halla a y b sabiendo que es continua la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \cos(x) - ae^x}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ b, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
 Sol.: a=1 , b=-1

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) + b \operatorname{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite. Sol.: b=-1; el límite vale $-\frac{1}{3}$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{sen}(x) - x e^x}{x^2}$ es finito, halla el valor de a y el de dicho límite. Sol.: a=1; el límite vale -1

Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \alpha \operatorname{sen}(x)}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y calcula el límite. Sol.: $\alpha=1$; el límite vale $\frac{1}{2}$

Escribe las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de las funciones:

a) $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ b) $f(x) = \frac{2 \ln(x)}{x^2}$ c) $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$ d) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

Sol.: a) A.V.: x=1 , A.H.: y=0 (en ∞) b) A.V.: x=0 , A.H.: y=0 (en ∞) c) A.H.: y=1 d) A.H.: y=0 (en ∞)
