

1.-

a) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + a, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + bx + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Halle a y b para que la función sea continua y derivable.

Resolución

Para $x \neq 0$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en $x = 0$, $f(x) = f(x) \Rightarrow 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + a = 0^2 + b \cdot 0 + 1 \Rightarrow a = 1$.

Para $x \neq 0$, $f'(x) = \begin{cases} 4x - 3, & \text{si } x < 0 \\ 2x + b, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como debe ser derivable en $x = 0$: $f'(x) = f'(x) \Rightarrow 4 \cdot 0 - 3 = 2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = -3$

Conclusión: debe ser $a = 1$, $b = -3$

b) Calcule la derivada de las siguientes funciones: $g(x) = \frac{3}{(2x-5)^2} + \ln \ln(1-x)$ y $h(x) = \frac{e^x}{x^3+1}$

Resolución

Como

$$g(x) = 3 \cdot (2x - 5)^{-2} + \ln \ln(1 - x) ; \quad g'(x) = -6(2x - 5)^{-3} \cdot 2 + \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \frac{-12}{(2x-5)^3} - \frac{1}{1-x}$$

$$h'(x) = \frac{e^x(x^3+1) - e^x \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{e^x(x^3-3x^2+1)}{(x^3+1)^2}$$

2.-

a) Determine dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + a$. Calcule el valor de a para que el valor mínimo de la función sea 5.

Resolución

Como $f'(x) = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ y $f''(x) = 6$, $f''(1) = 6 > 0$, en $x = 1$ f alcanza el mínimo.

Si el valor mínimo de f es 5 $\Rightarrow f(1) = 5 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + a = 5 \Rightarrow a = 8$

b) Calcule $g'(3)$, siendo $g(x) = 2xe^{3x-1}$.

Resolución

Usando las reglas de derivación, $g'(x) = 2 \cdot e^{3x-1} + 2x \cdot e^{3x-1} \cdot 3 = 2e^{3x-1}(1 + 3x)$.

Luego, $g'(3) = 2e^{3 \cdot 3 - 1}(1 + 3 \cdot 3) = 20e^8$.

3.- (prueba ordinaria) Para la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$, determine:

a) Su monotonía y sus extremos relativos.

Resolución

$$f'(x) = 24x^2 - 168x + 240 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} \quad x = 5 \quad x = 2$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$ teniendo en cuenta que su gráfica es una parábola convexa que corta al eje X en 2 y en 5:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 5)$	5	$(5, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en $(2, 5)$

Máximo relativo: $x = 2, y = f(2) = 8 \cdot 2^3 - 84 \cdot 2^2 + 240 \cdot 2 = 208$. Punto M(2, 208)

Mínimo relativo: $x = 5, y = f(5) = 8 \cdot 5^3 - 84 \cdot 5^2 + 240 \cdot 5 = 100$. Punto N(5, 100)

b) Su curvatura y su punto de inflexión.

Resolución

$f''(x) = 48x - 168 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} = 3,5$. Hagamos una tabla de signos de $f''(x)$:

	$(-\infty; 3,5)$	3,5	$(3,5; +\infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	cóncava	punto de inflexión	convexa

f es cóncava en $(-\infty; 3,5)$ y convexa en $(3,5; +\infty)$

Punto de inflexión: $x = 3,5, y = f(3,5) = 8 \cdot 3,5^3 - 84 \cdot 3,5^2 + 240 \cdot 3,5 = 154$. Punto I(3,5 ; 154)

4.- (prueba ordinaria)

a) Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto (1, 5) sea la recta $y = 3x + 2$.

Resolución

$f'(x) = 2ax$ y como $f'(1)$ es la pendiente de la recta tangente en (1, 5) entonces $f'(1) = 3$; $2a \cdot 1 = 3$;
 $a = \frac{3}{2}$

Como la gráfica pasa por (1, 5) entonces $f(1) = 5$. Luego, $\frac{3}{2} \cdot 1^2 - b = 5$; $b = \frac{-7}{2}$

Conclusión: debe ser $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{-7}{2}$

b) Para $g(x) = e^{1-x} + L(x+2)$, calcule $g'(1)$.

Resolución

Usando las reglas de derivación, $g'(x) = e^{1-x}(-1) + \frac{1}{x+2} \cdot 1 = -e^{1-x} + \frac{1}{x+2}$

Luego, $g'(1) = -e^{1-1} + \frac{1}{1+2} = -1 + \frac{1}{3} = \frac{-2}{3}$

5.- (prueba extraordinaria) Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + mx + 5, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Calcule m para que la función sea continua en $x = 1$.

Resolución

Para $x \neq 1$, f es continua y derivable independientemente del valor de m por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$$\text{Como debe ser continua en } x = 1, f(x) = f(x) \Rightarrow 2^1 = 1^2 + m \cdot 1 + 5 \Rightarrow m = -4.$$

b) Para ese valor de m , ¿es derivable la función en $x = 1$?

Resolución

$$\text{Para } m = -4, f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5, & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{y si } x \neq 1,$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2, & \text{si } x < 1 \\ 2x - 4, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Estudiemos la derivabilidad en } x = 1: f'(x) = 2^1 \ln 2 = 2 \ln 2 \quad f'(x) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$$

Como $f'(x) \neq f'(x)$, f NO es derivable en $x = 1$

c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es $\text{rtg: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$$x_0 = 0; f'(x_0) = f'(0) = 2^0 \ln 2 = \ln 2; f(x_0) = f(0) = 2^0 = 1$$

$$\text{rtg: } y = \ln 2(x - 0) + 1 \Rightarrow \text{rtg: } y = (\ln 2)x + 1$$

6.- (prueba extraordinaria)

a) Sea la función definida para todo número real x por $f(x) = ax^3 + bx$. Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 1)$ y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es -3 .

Resolución

$f'(x) = 3ax^2 + b$ y como $f'(1)$ es la pendiente de la recta tangente en $(1, 1)$ entonces

$$f'(1) = -3; 3a \cdot 1^2 + b = -3; 3a + b = -3$$

$$\text{Como la gráfica pasa por } (1, 1) \text{ entonces } f(1) = 1. \text{ Luego, } a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 1 \Rightarrow a + b = 1$$

Nos queda el sistema $\begin{cases} 3a + b = -3 \\ a + b = 1 \end{cases}$. Restando las ecuaciones obtenemos $2a = -4$, $a = -2$

Sustituyendo en la 2ª ecuación, $-2 + b = 1$, de donde $b = 3$. Conclusión: $a = -2$, $b = 3$.

b) Si en la función anterior $a = \frac{1}{3}$ y $b = -4$, determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.

Resolución

Para $a = \frac{1}{3}$, $b = -4$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $f'(x) = x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ó $x = -2$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$ teniendo en cuenta que su gráfica es una parábola convexa que corta al eje X en 2 y en -2 :

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 2)$

Máximo relativo: $x = -2$, $y = f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - 4(-2) = \frac{16}{3}$. Punto $M(-2, \frac{16}{3})$

Mínimo relativo: $x = 2$, $y = f(2) = \frac{1}{3}2^3 - 4 \cdot 2 = -\frac{16}{3}$. Punto $M(2, -\frac{16}{3})$

7.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x+1}, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2x - 3, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Estudie su derivabilidad en $x = 0$.

Resolución

Para $x \neq 0$, $x \neq -1$ f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas.

Obsérvese que $x + 1 = 0$ si $x = -1$. Así que f no es continua en $x = -1$ por no estar definida.

$$f(x) = \frac{2 \cdot 0 - 3}{0 + 1} = -3 = f(0) \quad ; \quad f(x) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

Como $f(x) = f(x) = f(0)$ entonces f es continua en $x = 0$

$$\text{Para } x \neq 0, f'(x) = \begin{cases} \frac{2(x+1) - (2x-3) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x + 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(0+1)^2} = 5 \quad ; \quad f'(x) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$$

Como $f'(x) \neq f'(x)$, f NO es derivable en $x = 0$.

b) Determine si existen asíntotas y obtenga sus ecuaciones.

Resolución

$$\text{Para } x = -1 \text{ no es continua por no estar definida y } f(x) = \frac{2(-1)-3}{0} = \frac{-5}{0} = \pm\infty.$$

Luego, $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$ cuya ecuación es A.V.: $x = -1$

$$\text{Además, } f(x) = \frac{-5}{0^-} = +\infty \quad f(x) = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

Estudiemos las asíntotas en $+\infty$: $f(x) = (x^2 + 2x - 3) = +\infty$.

Luego, $f(x)$ NO tiene asíntota horizontal en $+\infty$

Estudiemos las asíntotas en $-\infty$: $f(x) = \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2x}{x} = 2$.

Luego, $f(x)$ tiene asíntota horizontal en $-\infty$ de ecuación AH: $y = 2$

$$\frac{2x-3}{x+1} - 2 = \frac{-5}{x+1}.$$

— >encima—

8.- Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$.

a) Determine los extremos relativos de f , estudie la monotonía y la curvatura.

Resolución

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2}, \quad x = 4 \quad x = 2$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$ teniendo en cuenta que su gráfica es una parábola convexa que corta al eje X en 2 y en 4:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ y decreciente en $(2, 4)$

Máximo relativo: $x = 2, y = f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 = 20$. Punto M(2, 20)

Mínimo relativo: $x = 4, y = f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 = 16$. Punto N(4, 16)

$f''(x) = 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Hagamos una tabla de signos de $f''(x)$:

	$(-\infty, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	cóncava	punto de inflexión	convexa

f es cóncava en $(-\infty, 3)$ y convexa en $(3, +\infty)$

Punto de inflexión: $x = 3, y = f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 = 18$. Punto I(3, 18)

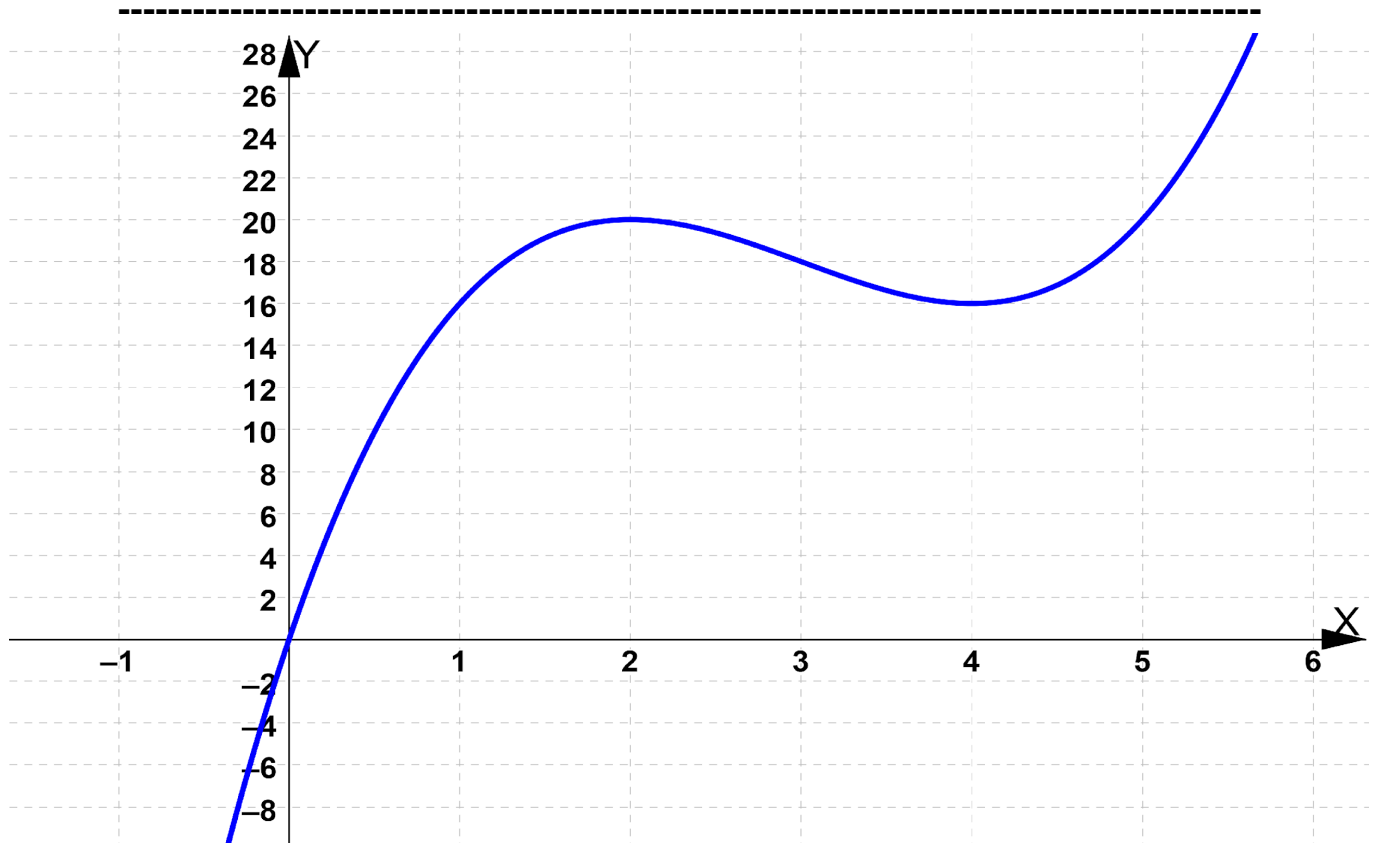
b) Represente gráficamente la función f .

Resolución

Observamos también que $f(x) = -\infty, f(x) = +\infty$

Y además $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x = x(x^2 - 9x + 24) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x^2 - 9x + 24 = 0$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2}$ incompatible. Y como $f(0) = 0$, la gráfica sólo corta a los ejes en $(0, 0)$



9.- Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6, & \text{si } x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6, & \text{si } x > 1 \end{cases}$
a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f.

Resolución

Para $x \neq 1$ f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas.

$$f(x) = 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 6 = 0 = f(1) ; f(x) = -2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 6 = 0$$

Como $f(x) = f(x) = f(1)$ entonces f es continua en $x = 1$

Para $x \neq 1$, $f'(x) = \begin{cases} 4x - 8, & \text{si } x < 1 \\ -4x + 8, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$f'(x) = 4 \cdot 1 - 8 = -4 ; f'(x) = -4 \cdot 1 + 8 = 4$$

Como $f'(x) \neq f'(x)$, f NO es derivable en $x = 1$.

Luego, f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$

b) Represente la gráfica de f.

Resolución

Observamos también que $f(x) = -\infty$, $f(x) = +\infty$

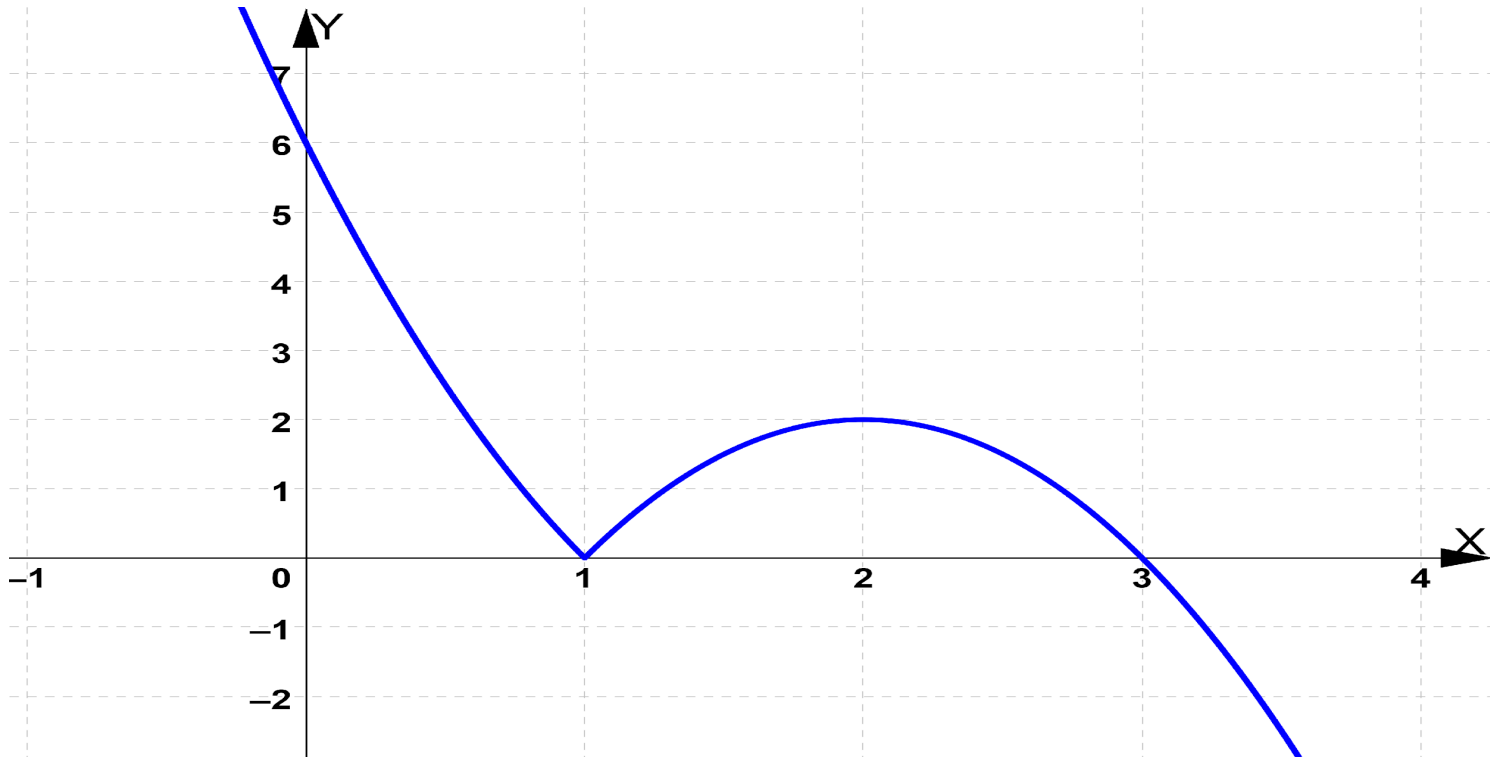
$$\text{Para } x \leq 1, 2x^2 - 8x + 6 = 0 ; x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm 4}{4} ; x = 3 \text{ (no válido)}, x = 1.$$

$$\text{Para } x > 1, -2x^2 + 8x - 6 = 0 ; x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-2) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8 \pm 4}{-4} ; x = 1 \text{ (no válido)}, x = 3.$$

Y como $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 6 = 6$, la gráfica sólo corta a los ejes en $(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 6)$

$f'(x) = \{4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2(\text{imposible}), \text{ si } x < 1 - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2, \text{ si } x > 1\}$. Si $1 < x < 2$, $f'(x) > 0$ y si $x > 2$, $f'(x) < 0$.

Luego, hay un máximo relativo: $x = 2, y = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 6 = 2$. Punto $M(2, 2)$



c) Indique los extremos relativos de la función.

Resolución

Máximo relativo: $x = 2, y = f(2) = 2$. Punto $M(2, 2)$

Mínimo relativo: $x = 1, y = f(0) = 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 6 = 0$. Punto $N(1, 0)$

10.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-k}{x+1}, & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 2x + 1, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

a) Calcule el valor de k para que la función f sea continua en $x = 0$.

Para ese valor de k , ¿es f derivable en $x = 0$?

Resolución

Para $x \neq 0$, f es continua y derivable independientemente del valor de k por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en $x = 0$, $f(x) = f(x) \Rightarrow \frac{0-k}{0+1} = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow k = -1$.

Para $k = -1$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 2x + 1, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ y si $x \neq 0$,
 $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0 \\ 2x + 2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$: $f'(x) = 0$ $f'(x) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$

Como $f'(x) \neq f'(x)$, f NO es derivable en $x = 0$

b) Para $k = 0$, calcule $f(x)$ y $f'(x)$

Resolución

Para $k = 0$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 2x + 1, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1) = +\infty ; f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x}{x} = 1$$

11.- El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$f(x) = \begin{cases} -5x^2 + 40x - 60, & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{5x}{2} - 15, & \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a) Represente la función f .

Resolución

La gráfica está formada por un trozo de parábola (para $0 \leq x \leq 6$) y un trozo de recta (para $6 < x \leq 10$)

$$\text{Para } 0 \leq x \leq 6, -5x^2 + 40x - 60 = 0 ; x = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot (-5) \cdot (-60)}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-40 \pm 20}{-10} ; x = 2, x = 6.$$

Y como $f(0) = -5 \cdot 0^2 + 40 \cdot 0 - 60 = -60$, la gráfica sólo corta a los ejes en $(2, 0)$, $(6, 0)$ y $(0, -60)$

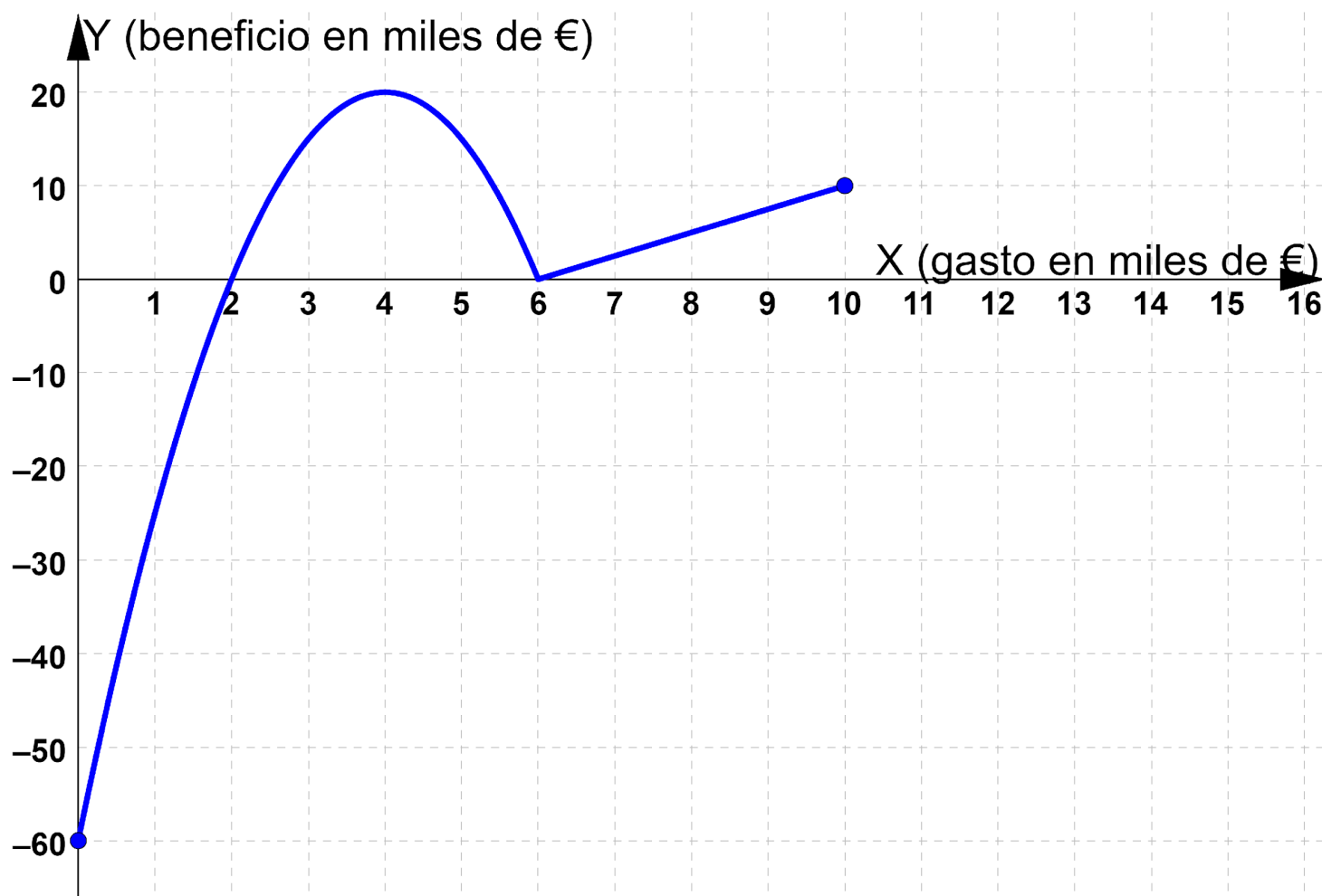
$$f(x) = -5 \cdot 6^2 + 40 \cdot 6 - 60 = 0 = f(6) ; f(x) = \frac{5 \cdot 6}{2} - 15 = 0 ; f(10) = \frac{5 \cdot 10}{2} - 15 = 10$$

$$f'(x) = \begin{cases} -10x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = 4, & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{5}{2} > 0 \Leftrightarrow x = 2, & \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

$$\text{Si } 0 \leq x < 4, f'(x) > 0 \text{ y si } 4 < x \leq 6, f'(x) < 0.$$

Luego, hay un máximo relativo: $x = 4, y = f(4) = -5 \cdot 4^2 + 40 \cdot 4 - 60 = 20$. Punto $M(4, 20)$

La gráfica es



b) Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.

Resolución

Como para $2 \leq x \leq 10$, $B(x) \geq 0$ entonces la empresa no tiene pérdidas para un gasto en publicidad comprendido entre 2000 € y 10000 €.

c) ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?

Resolución

Como la gráfica corta al eje X en $x = 2$, $x = 6$ entonces la empresa tiene beneficios nulos para un gasto en publicidad de 2000 € ó 6000 €.

d) Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Resolución

Como el máximo es $M(4, 20)$ entonces la empresa tiene el máximo beneficio para un gasto en publicidad de 4000 € siendo el beneficio máximo de 20000 €

a) La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 3$. Calcule los coeficientes a y b y determine si el citado extremo es un máximo o un mínimo relativo.

Resolución

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx, \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a$$

Como tiene punto de inflexión en $x = 3$ entonces $f''(3) = 0$. Luego, $6 \cdot 3 + 2a = 0$; $a = -9$

Como tiene un extremo relativo en $x = 2$ entonces $f'(2) = 0$.

$$\text{Luego, } 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0; \quad 4a + b = -12; \quad b = -4a - 12 = -4 \cdot (-9) - 12 = 24$$

Conclusión: debe ser $a = -9$, $b = 24$ y $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$, $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$, $f''(x) = 6x - 18$

Como $f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0$, en $x = 2$ se alcanza un máximo relativo

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \frac{x}{x-2}$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$.

$$x_0 = 3; \quad g(x_0) = g(3) = \frac{3}{3-2} = 3; \\ g'(x) = \frac{1 \cdot (x-2) - x \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}; \quad g'(x_0) = g'(3) = \frac{-2}{(3-2)^2} = -2$$

$$\text{rtg: } y = -2(x - 3) + 3 \Rightarrow \text{rtg: } y = -2x + 9$$