Kleber Kilhian - Teorema do Ângulo Inscrito

https://www.obaricentrodamente.com/2011/10/teorema-do-angulo-inscrito.html

Teorema do Ângulo Inscrito

Kleber Kilhian 20.10.11 10 comentários

Um ângulo é considerado inscrito em uma circunferência quando seu vértice pertence a ela e os seus lados sejam, cada um deles, uma corda.

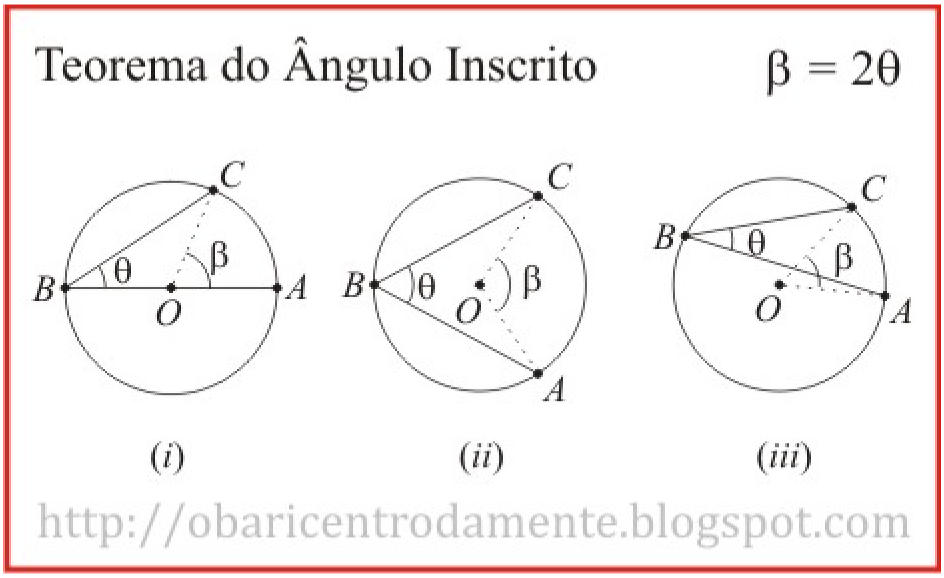
Teorema: Numa circunferência, a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito que subtende o mesmo arco.

Assim, pode haver três casos distintos:

i) O centro *O* da circunferência pertence a uma das cordas. Neste caso, a corda é o próprio diâmetro da circunferência;

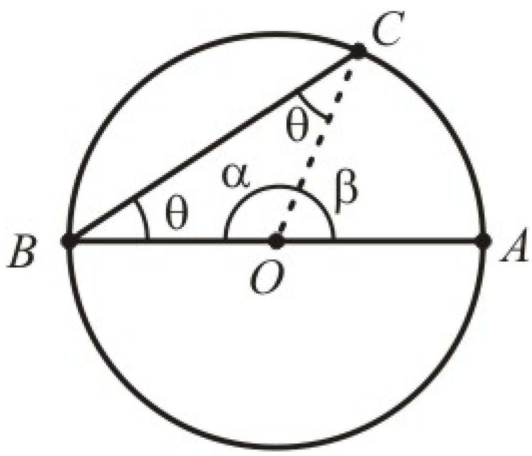
ii) O centro *O* da circunferência está dentro do ângulo inscrito;

iii) O centro *O* da circunferência está fora do ângulo inscrito.



Vamos demonstrar cada um dos casos separadamente.

1) O centro *O* da circunferência pertence a uma das cordas



Vejam que os segmentos *OB* e *OC* possuem a mesma medida, pois são iguais ao raio da circunferência. Desta forma, o triângulo *OBC* é isóscele, cuja base *BC* compreende ângulos iguais a θ.

O segmento *AB* é o diâmetro da circunferência e podemos chamar como α o ângulo suplementar de β, que é o ângulo central:

$\alpha = 180° - \beta$

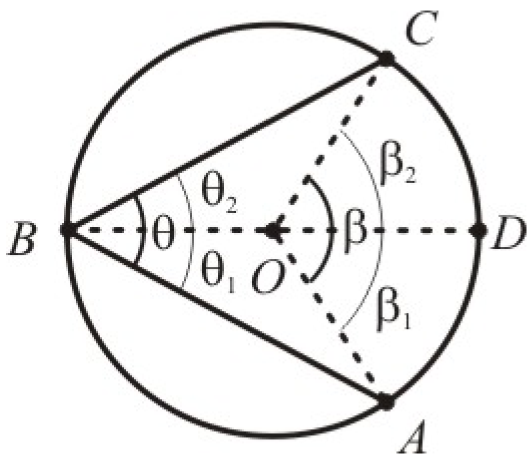
Como para todo triângulo a soma dos ângulos internos é sempre igual a 180°, temos:

$$\theta + \theta + 180° - \beta = 180°$$

$$(1) \quad \beta = 2\theta$$

E assim fica provado o primeiro caso.

2) O centro *O* da circunferência está dentro do ângulo inscrito

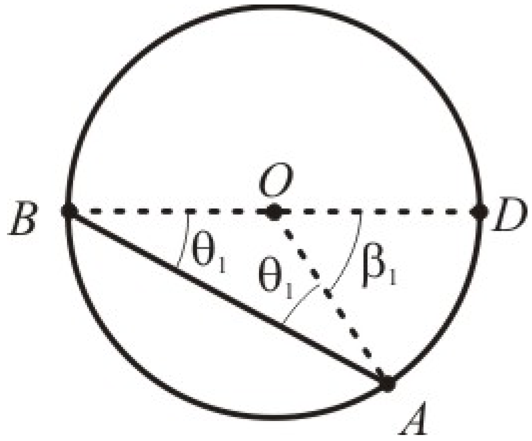


Podemos traçar o diâmetro *BD* da circunferência, dividindo os ângulos, central e inscrito, em duas partes iguais, obtendo:

$$(2) \quad \theta = \theta_1 + \theta_2$$

$$(3) \quad \beta = \beta_1 + \beta_2$$

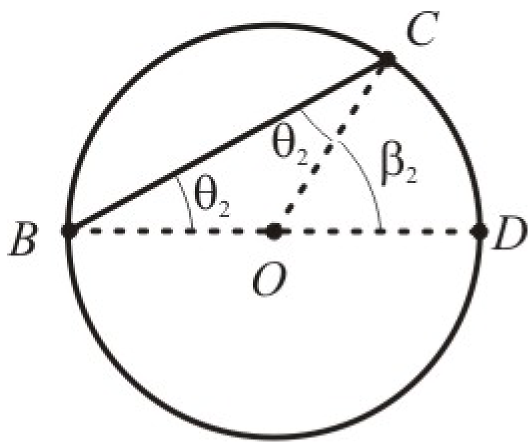
E desta forma, caímos ao primeiro caso, onde o centro da circunferência pertence a uma das cordas. Utilizando o mesmo raciocínio, obtemos:



$$\theta_1 + \theta_1 + 180° - \beta_1 = 180°$$

$$(4) \quad \beta_1 = 2\theta_1$$

E o mesmo vale para o outro ramo:



$$\theta_2 + \theta_2 + 180° - \beta_2 = 180°$$

$$(5) \quad \beta_2 = 2\theta_2$$

No entanto, temos pela relação (3) que:

$\beta = \beta_1 + \beta_2$

Substituindo as relações (4) e (5), obtemos:

$$\beta = 2\theta_1 + 2\theta_2$$

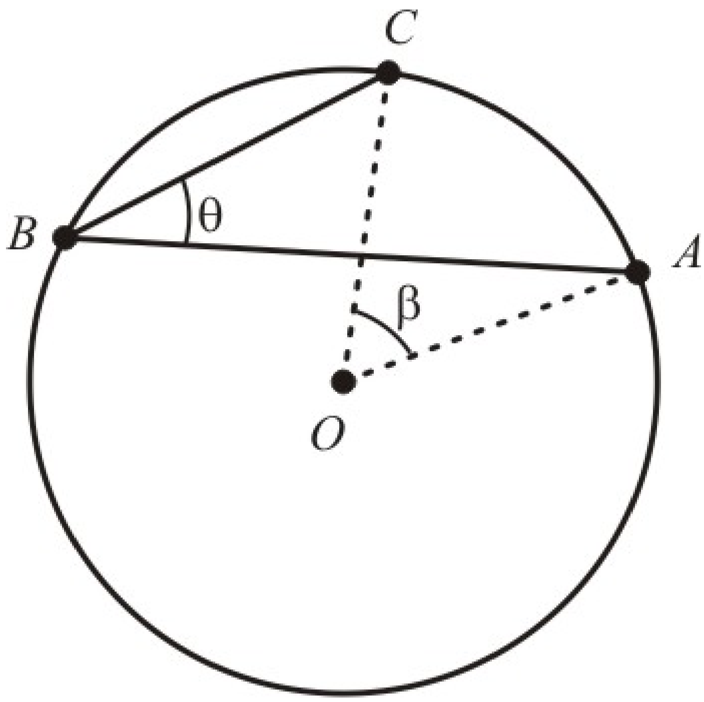
$$\beta = 2(\theta_1 + \theta_2)$$

Substituindo a relação (2) na relação acima obtemos:

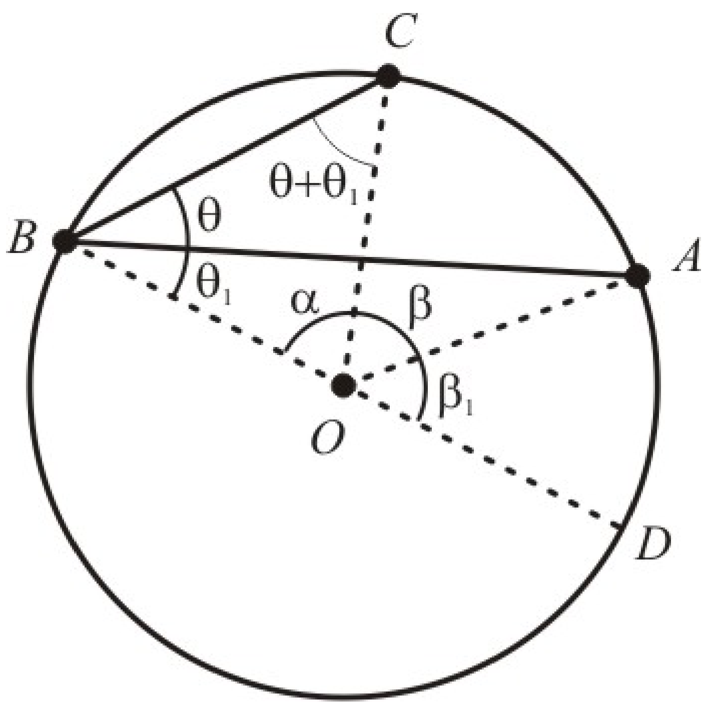
$$(6) \quad \beta = 2\theta$$

E assim provamos o segundo caso.

3) O centro *O* da circunferência está fora do ângulo inscrito



Podemos traçar o diâmetro *BD* da circunferência definindo outros dois ângulos: β1 e θ1:



Assim, podemos chamar como *α* o ângulo suplementar do ângulo *β* + *β*1, que é o ângulo central:

$\alpha = 180° - (\beta + \beta_1)$

E desta forma, caímos ao primeiro caso, onde o centro da circunferência pertence a uma das cordas. Utilizando o mesmo raciocínio, obtemos:

$$2(\theta + \theta_1) + 180° - (\beta + \beta_1) = 180°$$

$$(7) \quad \beta + \beta_1 = 2(\theta + \theta_1)$$

Se aplicarmos o mesmo conceito no ângulo *DBA*, obtemos:

$(8) \quad \beta_1 = 2\theta_1$

Substituindo a relação (8) em (7), obtemos:

$$2\theta_1 + \beta = 2\theta + 2\theta_1$$

$$(9) \quad \beta = 2\theta$$

E assim provamos o terceiro e último caso.