

correction de l'épreuve de physique 1 ESIM MP 2003

Partie I : déplacement d'une caisse

I.1 Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la caisse et projeté sur l'axe vertical Oz donne la réponse :

$$Mg = p.N \quad \text{donc :} \quad N = \frac{Mg}{p}$$

On constate que N diminue (évidemment !) si le nombre p de rouleaux augmente

I.2.a au début, la vitesse du point de la caisse au contact avec le rouleau est égale à V alors que la vitesse du point du rouleau en contact avec la caisse est nulle ; donc :

$$\vec{v}_{\text{glissement}}(\text{caisse/rouleau}) = V\vec{u}_x - \vec{0} = V\vec{u}_x$$

les lois de Coulomb relatives au contact entre solides nous indiquent qu'alors la force de frottement subie par la caisse est de sens opposé à la vitesse de glissement de la caisse par rapport au rouleau :

$$\vec{T} = -\|\vec{T}\|\vec{u}_x$$

de plus : $\|\vec{T}\| = fN = f \frac{Mg}{p}$

I.2.b L'application, pour le rouleau considéré, qui subit de la part de la caisse la force de frottement :

$$-\vec{T} = +\|\vec{T}\|\vec{u}_x, \text{ du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe du rouleau s'écrit :}$$

$$\vec{OI} \wedge \|\vec{T}\|\vec{u}_x = J \dot{\omega} \vec{u}_y$$

donc : $r\|\vec{T}\| = J \dot{\omega}$, qui s'intègre, compte tenu des conditions initiales (t=0 à l'instant du début

$$\omega(t) = \frac{fMg}{mpr} t$$

du contact entre la caisse et le rouleau), en :

I.2.c le glissement cesse lorsque la vitesse de glissement s'annule ; or :

$$\vec{v}_{\text{glissement}}(\text{caisse/rouleau}) = \vec{v}(\text{point de la caisse en contact avec le rouleau}) - \vec{v}(\text{point du rouleau en contact avec la caisse}) = V\vec{u}_x - r\omega\vec{u}_x = (V - r\omega)\vec{u}_x$$

$$\tau = \frac{mpV}{fMg}$$

donc le glissement cesse lorsque : $V = r\omega$; ceci se produit à l'instant τ tel que :

I.3 les axes de deux rouleaux consécutifs étant distants de $3a$ et le nombre p de rouleaux étant très

grand :
$$p \approx \frac{a}{3r}$$

Si l'on veut qu'au plus un rouleau glisse à chaque instant, il faut que la durée Δt entre le début du contact de la caisse avec un rouleau et le début du contact de la caisse avec le rouleau suivant soit

supérieure à la durée τ de glissement d'un rouleau : $\frac{V}{3r} > \frac{mpV}{fMg}$, ce qui conduit à une valeur

maximale V_M pour V :

$$V_M = \sqrt{\frac{3fMgr}{mp}} = \sqrt{\frac{9fMgr^2}{ma}} = 3r\sqrt{\frac{fMg}{ma}}$$

Application numérique : $V_M = 1,627 \text{ m.s}^{-1}$

I.4.a pour chacun des rouleaux qui ne glissent plus : $V = r\omega$ d'après la question 1.2.c ; donc la vitesse angulaire de chacun de ces rouleaux est une constante (et c'est la même pour tous ces rouleaux) :

$\omega_{\text{max}} = \text{cte} = \frac{V}{r}$; alors l'application du théorème du moment cinétique, pour un tel rouleau, par rapport à son axe conduit à :

$$\vec{OI} \wedge \vec{T}^* = J \dot{\omega} \vec{u}_y = 0 \quad ; \quad \text{d'où :} \quad \vec{T}^* = 0$$

I.4.b Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la caisse et projeté sur l'axe Ox conduit

$$F + T_{\text{rouleau glissant}} + \sum_{\substack{\text{rouleaux} \\ \text{ne glissant pas}}} T^* = 0$$

alors à :

Donc, puisque : $T^* = 0$:

$$F = -T_{\text{rouleau glissant}} = + \frac{fMg}{p} \vec{u}_x, \text{ d'après la question I.2.b}$$

Finalement :

$$F = + \frac{fMg}{p} \vec{u}_x = \frac{3jMgr}{a} \vec{u}_x$$

I.4.c Dans le cas où la caisse glisserait sur un sol de même coefficient de frottement, mais en l'absence de rouleaux, on aurait, avec des notations évidentes : $F' = fN' = fMg$

I.4.d On a donc : $\frac{F'}{F} = p = \frac{a}{3r} \approx 33 \gg 1$

La force à appliquer en l'absence de rouleaux est beaucoup plus intense que celle à appliquer en présence des rouleaux ; un exemple courant est celui des chaînes d'emballage dans les usines ou de livraisons de bagages dans les aéroports ou les tapis roulants utilisés pour les déménagements

I.5.a La puissance de la force F exercée par l'opérateur est : $P = FV$; son travail pendant l'intervalle

$$W_{op} = \int_{t=0}^{t=\tau} FV dt = \int_{t=0}^{t=\tau} \frac{fMg}{p} V dt = \frac{fMg}{p} V \tau$$

de temps τ est :

Ou encore, compte tenu de la valeur de τ obtenue à la question I.2 : $W_{op} = mV^2$.

I.5.b Pendant l'intervalle de temps τ considéré, l'énergie cinétique de la caisse ne varie pas, les énergies cinétiques des rouleaux ne glissant plus ne varient pas non plus ; la seule variation d'énergie

cinétique est due à la mise en rotation, avec la vitesse angulaire $\omega_{max} = cte = \frac{V}{r}$ du rouleau qui glisse

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} J \omega_{max}^2 = \frac{1}{2} m r^2 \frac{V^2}{r^2} = \frac{1}{2} m V^2$$

pendant cette intervalle de temps, c'est-à-dire :

I.5.c Toujours sur la durée τ considérée, le théorème de l'énergie cinétique, appliqué au système global : caisse et rouleaux, s'écrit : $W_{op} + W_{frottement} = \Delta E_c$; donc :

$$W_{frottement} = \Delta E_c - W_{op} = \frac{1}{2} m V^2 - m V^2 = -\frac{1}{2} m V^2$$

Ce travail est négatif : il correspond à une dissipation d'énergie macroscopique sous forme de chaleur au niveau du contact entre le rouleau glissant et la caisse

I.5.d Seules les actions de contact au niveau du rouleau glissant ont une puissance non nulle ; donc :

$$P_{frottement} = \vec{T}_{subie\ par\ le\ rouleau\ glissant} \cdot \vec{v}_{(glissement\ rouleau/caisse)}$$

$$= -\frac{fMg}{p} \vec{u}_x \cdot (V - r\omega(t)) \vec{u}_x = -\frac{fMg}{p} (V - r\omega(t)) = -\frac{fMg}{p} \left(V - r \frac{fMg}{mpr} t \right) = -\frac{mV^2}{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)$$

Cette puissance est négative pour $t < \tau$ et s'annule à $t = \tau$.

On en déduit le travail total des forces de frottement pendant le même intervalle de temps :

$$W_{\text{frottement}} = \int_{t=0}^{t=\tau} -\frac{mV^2}{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) dt = -\frac{1}{2} mV^2$$

On retrouve bien le même résultat que précédemment.

Partie II : cavité électromagnétique :

II.1 Les champs incidents et réfléchis :

II.1.a $f = 320 \text{ MHz}$; $\lambda = \frac{c}{f} \approx 0,94 \text{ m}$: c'est le domaine des micro ondes

II.1.b On a une onde plane progressive dans le vide ; donc :

$$\underline{\underline{B}}_i = \frac{\omega}{c} \underline{\underline{u}}_z \wedge \underline{\underline{E}}_i = \frac{E_0}{c} \exp[i(\omega t - kz)] \underline{\underline{u}}_y$$

II.1.c l'onde réfléchie a la pulsation de l'onde incidente, se propage dans le sens de $-\underline{\underline{u}}_z$ et a la même direction de polarisation que l'onde incidente (résultat qu'on obtient en écrivant les conditions aux limites sur le dioptré) : $\underline{\underline{E}}_r = rE_0 \exp[i(\omega t + kz)] \underline{\underline{u}}_x$

II.1.d L'onde réfléchie est aussi une onde plane progressive se propageant dans le vide ; donc :

$$\underline{\underline{B}}_r = \frac{-\omega}{c} \underline{\underline{u}}_z \wedge \underline{\underline{E}}_r = -r \frac{E_0}{c} \exp[i(\omega t + kz)] \underline{\underline{u}}_y$$

II.2 Les champs transmis :

II.2.a Le fait que la pulsation ω est conservée provient de l'indépendance du phénomène de transmission de l'onde par rapport au temps

Le fait que k' est différent de k provient du fait que, les deux milieux étant différents, l'équation de dispersion est différente ; la pulsation étant la même, le vecteur d'onde ne peut pas être le même

Il faut s'attendre à un vecteur d'onde k' complexe à cause du caractère conducteur du milieu dans lequel l'onde est transmise : il y a donc des courants, qui vont dissiper de l'énergie par effet Joule et atténuer l'onde transmise

II.2.b Le milieu étant donc conducteur, le temps de relaxation des charges (qu'on obtient mathématiquement en combinant l'équation locale de conservation de la charge, l'équation de Maxwell-Gauss et l'équation locale de la loi d'Ohm, est très faible, c'est-à-dire très inférieur à la durée T d'une période de l'onde ; on peut alors considérer que : $\rho(M, t) \approx 0, \forall t$.

II.2.c

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Donc, pour des variations temporelles sinusoïdales :

$$\frac{\text{module des variations de } \vec{j}_D}{\text{module des variations de } \vec{j}} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma}$$

Application numérique :

$$\frac{\text{module des variations de } \vec{j}_D}{\text{module des variations de } \vec{j}} \approx 3.10^{-10} \ll 1$$

Le courant de déplacement est donc négligeable devant le courant de conduction ; le négliger revient à se placer dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents (ARQP), c'est-à-dire le cadre de l'induction

II.2.d

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E}_t = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E}_t - \Delta \vec{E}_t$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E}_t = \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}_t) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma \vec{E}_t) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$$

Or :

Et :

$$\vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E}_t - \Delta \vec{E}_t = 0 - \Delta \vec{E}_t$$

$$\Delta \vec{E}_t - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} = 0$$

On obtient donc :

$$\Delta \vec{E}_t - \frac{1}{\tau c^2} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} = 0$$

Ou encore :

Cette équation est une équation aux dérivées partielles analogue à celle obtenue dans le cas de la diffusion.

II.2.e Par report dans l'équation précédente de la forme complexe du champ électrique de l'onde

dans le conducteur, on obtient l'équation de dispersion :

$$-k'^2 - \frac{1}{\tau c^2} i\omega = 0 \quad ; \text{ donc :}$$

$$k'^2 = -\frac{1}{\tau c^2} i\omega$$

Donc, en prenant la racine carrée de l'équation précédente correspondant à une onde se propageant dans le sens de $+z$, donc de partie réelle positive pour k' , on obtient :

$$k' = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{2\tau}} = (1-i) \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega}{2\tau}} = \frac{1-i}{\delta}, \text{ avec : } \delta = c \sqrt{\frac{2\tau}{\omega}}$$

II.2.f alors :

$$\underline{E}_t = tE_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \underline{u}_x$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \omega\delta = \omega c \sqrt{\frac{2\tau}{\omega}} = c\sqrt{2\omega\tau} = c\alpha$$

La vitesse de phase se lit sur le terme de propagation :

δ représente une épaisseur caractéristique sur laquelle, depuis la surface du conducteur, l'onde dans le conducteur est absorbée de façon significative, d'où le nom de profondeur de pénétration

Application numérique : $v_\phi = 7500 \text{ m.s}^{-1}$

$$\delta = 3,73.10^{-6} \text{ m}$$

II.2.g On obtient le champ magnétique dans le conducteur à partir de l'équation de

Maxwell-Faraday :

$$\text{rot} \underline{E}_t = -\frac{\partial \underline{B}_t}{\partial t}$$

Donc :

$$-\frac{\partial \underline{B}_t}{\partial t} = tE_0 (-ik') \exp[i(\omega t - k'z)]$$

D'où (à d'éventuels champ magnétostatiques près) :

$$\underline{B}_t = -\frac{1}{i\omega} tE_0 (-ik') \exp[i(\omega t - k'z)]$$

Et, en séparant les parties réelle et imaginaire de k' :

$$\underline{B}_t = \frac{t(1-i)}{\delta\omega} E_0 \exp\left[i\left(\omega t - \frac{1-i}{\delta} z\right)\right] = \frac{t\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right]$$

II.3 Les coefficients de réflexion et de transmission :

II.3.a Ecrivons la continuité des champs électrique et magnétique sur l'interface $z = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{E}_i + \underline{E}_r &= \underline{E}_t \\ \underline{B}_i + \underline{B}_r &= \underline{B}_t \end{aligned}$$

donc, en notation complexe, après simplification par $\exp(i\omega t)$:

$$E_0 + \underline{r}E_0 = \underline{t}E_0$$

$$\frac{E_0}{c} - \underline{r} \frac{E_0}{c} = \frac{\underline{t}(1-i)}{\delta\omega} E_0$$

$$1 + \underline{r} = \underline{t}$$

$$1 - \underline{r} = \frac{\underline{t}(1-i)}{\delta\omega} c$$

$$1 + \underline{r} = \underline{t}$$

$$1 - \underline{r} = \frac{1}{\alpha}(1-i)\underline{t}$$

d'où, après simplifications :

ou :

$$\underline{r} = \frac{\alpha - 1 + i}{\alpha + 1 - i}$$

$$\underline{t} = \frac{2\alpha}{\alpha + 1 - i}$$

ce système en $(\underline{r}, \underline{t})$ se résout immédiatement en :

II.3.b en utilisant la formule complexe indiquée pour le calcul des valeurs moyennes, on obtient successivement :

$$\langle \underline{R}_i \rangle = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2} \Re(\underline{E}_i \cdot \underline{B}_i^*) \underline{u}_z = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \underline{u}_z$$

$$\langle \underline{R}_r \rangle = -\frac{1}{\mu_0 c} \frac{1}{2} \Re(\underline{E}_r \cdot \underline{B}_r^*) \underline{u}_z = -\frac{1}{2\mu_0 c} |\underline{r}|^2 E_0^2 \underline{u}_z$$

$$\langle \underline{R}_t \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{1}{2} \Re(\underline{E}_t \cdot \underline{B}_t^*) \underline{u}_z = \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{|\underline{t}|^2}{c\alpha} E_0^2 \underline{u}_z = \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{|\underline{t}|^2}{\alpha} E_0^2 \underline{u}_z$$

II.3.c On en déduit donc, en utilisant les valeurs algébriques des valeurs moyennes trouvées pour les vecteurs de Poynting :

On en déduit immédiatement

ou encore, en utilisant les expressions trouvées pour $(\underline{r}, \underline{t})$ à la question II.3.a :

$$R = \frac{(\alpha - 1)^2 + 1}{(\alpha + 1)^2 + 1}$$

$$T = \frac{4\alpha^2 \frac{1}{\alpha}}{(\alpha + 1)^2 + 1} = \frac{4\alpha}{(\alpha + 1)^2 + 1}$$

On en déduit immédiatement :

$$R + T = 1$$

Cette dernière relation traduit la conservation de l'énergie au niveau de l'interface $z = 0$.

II.3.d Si $\alpha \ll 1$, alors l'expression précédente de T se simplifie en : $T \approx 2\alpha$

Application numérique :
$$T \approx 2\alpha = \frac{2v_\varphi}{c} \approx 5,0 \cdot 10^{-6} (\ll 1)$$

II.4 Application à une cavité électromagnétique :

II.4.a
$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2} = 0,4\text{m}$$

II.4.b a cause du caractère non idéal du conducteur entourant la cavité, il y a atténuation, chaque fois qu'une onde arrive sur l'interface entre le vide et ce conducteur, de l'onde, avec un coefficient d'atténuation énergétique égal à $T = 1 - R$. On peut (« arbitrairement ») considérer que les pertes énergétiques sont devenues importantes lorsque la valeur moyenne du vecteur de Poynting de l'onde résiduelle dans la cavité, après n réflexions est devenue égale au dixième de la valeur moyenne du

$$\frac{\langle R_{r,n} \rangle}{\langle R_i \rangle} = 0,1$$

vecteur de Poynting de l'onde incidente : ; or à chaque réflexion, le rapport des valeurs moyennes des vecteurs de Poynting après et avant réflexion est égal à R ; le nombre N de réflexions nécessaire pour que la condition ci-dessus soit vérifiée est donc tel que : $R^N = 0,1$

Donc : $(1-2\alpha)^N = 0,1$

$$N = \frac{\ln 0,1}{\ln(1-2\alpha)} = \frac{\ln 0,1}{\ln(1-2\frac{v_\varphi}{c})}$$

Ou encore :

Application numérique : $N \approx 4,6 \cdot 10^5$

$$\tau' = N \frac{d_{\min}}{c} = 6,13 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

II.4.c Le temps τ' correspondant est donné par :

Ce temps est très grand par rapport à la période du signal mais petit à notre échelle.