

Илимиров П.В

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Москва, 2016

Элементы теории множеств

Аннотация

В работе рассматриваются основные понятия изучаемой теории, их взаимосвязь. Также представлены основные законы теории множеств. Работа снабжена иллюстрациями и пояснениями к ним. Приведена краткая история развития данной теории, рассмотрены некоторые ученые, занимающиеся разработками в этой сфере. Кроме того, указаны основные противоречия теории множеств (парадоксы).

Введение

Теория множеств — раздел математики, в котором изучаются общие свойства множеств. Теория множеств лежит в основе большинства математических дисциплин; она оказала глубокое влияние на понимание предмета самой математики.

«Множества» окружают нас повсюду. Люди, студенты, звезды, понятия — все эти предметы, мыслимые вместе, образуют множества. Коллектив, созвездие, полк — это тоже множества людей или звезд. Таким образом, любые объекты, которые мы мыслим вместе и которые мы можем объединить либо списком, либо при помощи общего признака, будут составлять множество.

Несмотря на основополагающий характер данной теории и достаточную давность ее исследования, в этой области существует большое количество неточностей, противоречий и парадоксов.

В настоящее время теория множеств широко используется при решении задач на компьютере. Она значительно облегчает запись на различных языках программирования.

Рассмотрение теории множеств дает ключ к дальнейшему более глубокому пониманию всех отраслей математики.

Целью данной работы является рассмотрение основ теории множеств, выявление ее составляющих, а также определение современной степени ее развития.

Краткая история развития теории множеств

До второй половины 19-го века понятие "множества" не рассматривалось в качестве математического ("множество книг на полке", "множество человеческих добродетелей" и т. д. - всё это чисто бытовые обороты речи). Положение изменилось, когда немецкий математик Георг Кантор разработал свою программу стандартизации математики, в рамках которой любой математический объект должен был оказываться тем или иным "множеством". Например, натуральное число, по Кантору, следовало рассматривать как множество, состоящее из единственного элемента другого множества, называемого "натуральным рядом" - который, в свою очередь, сам представляет собой множество, удовлетворяющее так называемым аксиомам Пеано. При этом общему понятию "множества", рассматривавшемуся им в качестве центрального для математики, Кантор давал мало что определяющие определения вроде "множество есть многое, мыслимое как единое", и т. д. Это вполне соответствовало умонастроению самого Кантора, подчеркнуто называвшего свою программу не "теорией множеств" (этот термин появился много позднее), а учением о множествах (Mengenlehre).

Программа Кантора вызвала резкие протесты со стороны многих современных ему крупных математиков. Особенно выделялся своим непримиримым к ней отношением Леопольд Кронекер, полагавший, что математическими объектами могут считаться лишь натуральные числа и то, что к ним непосредственно сводится (известна его фраза о том, что "бог создал натуральные числа, а всё прочее - дело рук человеческих"). Тем не менее, некоторые другие математики - в частности, Готлоб Фреге и Давид Гильберт - поддержали Кантора в его намерении перевести всю математику на теоретико-множественный язык.

Однако вскоре выяснилось, что установка Кантора на неограниченный произвол при оперировании с множествами (выраженный им самим в принципе "сущность математики состоит в её свободе") является изначально порочной. А именно, был обнаружен ряд теоретико-множественных антиномий: оказалось, что при использовании теоретико-множественных представлений некоторые утверждения могут быть доказаны вместе со своими отрицаниями (а тогда, согласно правилам классической логики высказываний, может быть "доказано" абсолютно любое утверждение). Антиномии ознаменовали собой полный провал программы Кантора.

В начале 20-го века Бертран Рассел, изучая наивную теорию множеств, пришел к парадоксу (с тех пор известному как парадокс Рассела). Таким образом, была продемонстрирована несостоятельность наивной теории множеств и связанной с ней канторовской программы стандартизации математики.

После обнаружения антиномии Рассела часть математиков (например, Л. Э. Я. Брауэр и его школа) решила полностью отказаться от использования теоретико-множественных представлений. Другая же часть математиков, возглавленная Д. Гильбертом, предприняла ряд попыток обосновать ту часть теоретико-множественных представлений, которая казалась им наименее ответственной за возникновение антиномий, на основе заведомо надёжной финитной математики. С этой целью были разработаны различные аксиоматизации теории множеств.

Особенностью аксиоматического подхода является отказ от лежащего в основе программы Кантора представления о действительном существовании множеств в некотором идеальном мире. В рамках аксиоматических теорий множества "существуют" исключительно формальным образом, и их "свойства" могут существенно зависеть от выбора аксиоматики. Этот факт всегда являлся мишенью для критики со стороны тех математиков, которые не соглашались (как на том настаивал Гильберт) признать математику лишённой всякого содержания игрой в символы. В частности, Н. Н. Лузин писал, что "мощность континуума, если только мыслить его как множество точек, есть единая некая реальность", место которой в ряду кардинальных чисел не может зависеть от того, признаётся ли в качестве аксиомы континуум-гипотеза, или же её отрицание.

В настоящее время наиболее распространённой аксиоматической теорией множеств является ZFC - теория Цермело—Френкеля с аксиомой выбора. Вопрос о непротиворечивости этой теории (а тем более - о существовании модели для неё) остаётся нерешённым.

Понятия теории множеств

Теория множеств составляет основу построения всей современной математики. Сама она базируется на двух очень простых понятиях: на понятии множества и понятии элемента.

Понятие множества является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Оно было введено в математику немецким ученым Георгом Кантором (1845-1918). Следуя Кантору, понятие "множество" можно определить как совокупность объектов, обладающих определенным свойством, объединённых в единое целое. Т.о. Под множеством принято понимать любую совокупность объектов, которые по какой-либо причине необходимо сгруппировать вместе.

Объекты, составляющие множество, называются элементами множества. Множество A и его элемент a находятся в отношении принадлежности: $a \in A$. Эта запись расшифровывается так: элемент a принадлежит множеству A , а множество A содержит в себе элемент a .

Выделим из множества A какую-нибудь часть его элементов. Эту выделенную часть можно трактовать как самостоятельное множество B . Тот факт, что B является частью A , обозначают так: $B \subset A$. При этом говорят, что B есть подмножество множества A . Надо четко различать две записи

$$a \in A$$

$$B \subset A$$

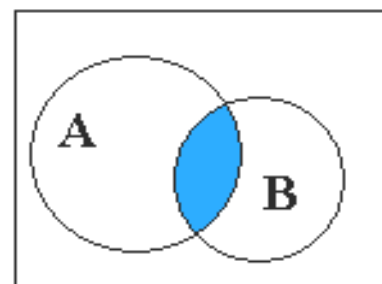
Знак включения $\subset$ связывает два множества, а знак принадлежности $\in$ связывает множество с его элементом.

Составляя множество B , мы могли включить в него все элементы из A . Тогда получится $B = A$. Но даже в этом крайнем случае B можно трактовать как часть A . То есть $B \subset A$ не исключает возможности совпадения $B = A$. Желая обозначить подмножество B , не совпадающее с A , будем писать $B \subsetneq A$.

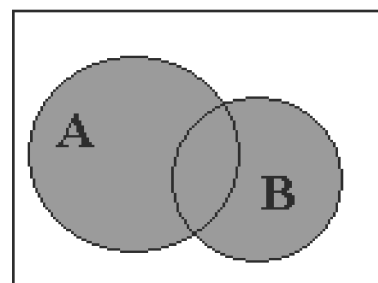
Другой крайний случай $B \subset A$ возникает, когда B не содержит ни одного элемента. Такое множество называют пустым множеством и обозначают специальным значком $\emptyset$. Пустое множество можно рассматривать как подмножество для любого множества A , т. е. $\emptyset \subset A$.

Пусть A и B - два произвольных множества. Некоторые из элементов этих двух множеств могут быть общими: $c \in A$ и $c \in B$. Из таких элементов формируется отдельное множество C , которое называют пересечением множеств A и B . Его обозначают так:

$C = A \cap B$. Если $A \cap B \neq \emptyset$, то говорят, что множества A и B пересекаются. Если же, наоборот, $A \cap B = \emptyset$, то говорят, что эти множества не пересекаются.



Пусть вновь A и B - два произвольных множества. Соберем в одно множество C все элементы из A и B . Полученное множество в этом случае называют объединением множеств A и B . Его обозначают так: $C = A \cup B$.

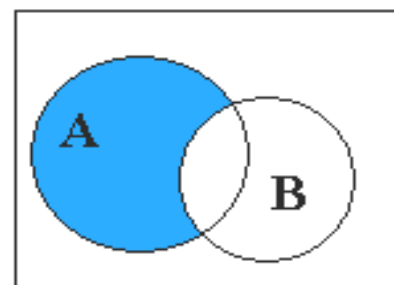


Элементы, составляющие множество $A \cup B$, разбиваются на три группы (на три подмножества). Это:

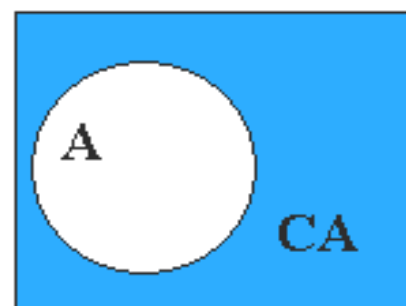
- элементы, принадлежащие множеству A и множеству B одновременно;
- элементы, принадлежащие множеству A , но не принадлежащие множеству B ;
- элементы, принадлежащие множеству B , но не принадлежащие множеству A .

Первая группа элементов составляет пересечение $A \cap B$. Вторая группа элементов составляет множество, которое называют разностью множеств A и B . Его обозначают $A \setminus B$. Очевидно, что третья группа элементов, составляет множество, которое является разностью $B \setminus A$. Множества $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$ не пересекаются друг с другом. При этом их объединение совпадает с объединением A и B :

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$



Дополнением множества A в B называется разность $A \setminus B$, если B является подмножеством множества A . Дополнение множества обозначается CA .



Пустое множество

Среди множеств выделяют особое множество - пустое множество. Пустое множество - множество, не содержащее ни одного элемента.

Вот что говорит о пустом множестве П.С.Александров: *«Пустое множество, по определению, не содержит элементов; число элементов пустого множества есть нуль. Необходимость рассмотрения пустого множества видна из того, что когда мы определяем тем или иным способом множество, то мы можем и не знать заранее, содержит ли оно хотя бы один элемент. Например, вероятно, множество страусов, находящихся в данный момент за Полярным кругом, пусто; однако мы не можем этого утверждать с уверенностью, т.к., может быть, какой-нибудь капитан и завез какого-нибудь страуса за Полярный круг».*

Пустое множество является частью любого множества.

Множество считается определенным, если указаны все его элементы. Эти элементы могут быть указаны с помощью некоторого общего признака или с помощью некоторого списка, где обозначены все элементы.

Последний способ возможен только в том случае, если множество имеет конечное число элементов.

Конечное множество- множество, состоящее из конечного числа элементов.

Основной характеристикой конечного множества является число его элементов. Теория конечных множеств изучает правила: как, зная количество элементов некоторых множеств, вычислить количество элементов других множеств, которые составлены из первых с помощью некоторых операций.

Бесконечное множество - непустое множество, не являющееся конечным.

Пример: Множество натуральных чисел является бесконечным.

Упорядоченное множество - множество, каждому элементу которого поставлено в соответствие некоторое число (номер этого элемента) от 1 до n , где n - число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа. Каждое конечное множество можно сделать упорядоченным, если, например, переписать все элементы в некоторый список ($a, b, c, d, \dots$), а затем поставить в соответствие каждому элементу номер места, на котором он стоит в списке.

Мощность множеств

Первым вопросом, возникшим в применении к бесконечным множествам, был вопрос о возможности их количественного сравнения между собой. Ответ на этот и близкие вопросы дал в конце 70-ых годов 19 века ученый Г.Кантор, основавший теорию множеств как математическую науку. Возможность сравнительной количественной оценки множеств опирается на понятие взаимно однозначного соответствия между двумя множествами. Пусть каждому элементу множества A поставлен в соответствие в силу какого бы то ни было правила или закона некоторый определенный элемент множества B ; если при этом каждый элемент множества B оказывается поставленным в соответствие одному и только одному элементу множества A , то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие. Очевидно, что между конечными множествами можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда оба множества состоят из одного и того же числа элементов.

Два множества называются равномошными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Еще до создания теории множеств чешский ученый Б.Больцано владел, с одной стороны, вполне точно сформулированным понятием взаимно однозначного соответствия, а с другой стороны, считал несомненным существование бесконечностей различных ступеней; однако, он не только не сделал взаимно однозначное соответствие основой установления количественной равносильности множеств, но решительно возражал против этого. Б.Больцано останавливало только то, что бесконечное множество может находиться во взаимно однозначном соответствии со своей правильной частью.

Вместо того, чтобы в применении к бесконечным множествам отказаться от аксиомы: часть меньше целого, Б.Больцано отказался от взаимной критерия равномошности, и таким образом, остался вне основной линии развития теории множеств. В каждом бесконечном множестве имеется (как легко доказывается) правильная часть, равномошная всему M , тогда как ни в одном конечном множестве такой правильной части найти нельзя. Поэтому наличие правильной части, равномошной целому, можно принять за определение бесконечного множества.

Для двух бесконечных множеств A и B возможны следующие три случая: либо A есть правильная часть, равномошная B , но в B нет правильной части, равномошной A ; либо, наоборот, в B есть правильная часть, равномошная A , а в A нет правильной части, равномошной B ; либо в A есть правильная часть, равномошная B , и в B есть правильная часть, равномошная A . Доказано, что в третьем случае A и B равномошны. В первом случае говорят, что мощность множества A больше мощности множества B , во втором - что мощность множества B больше мощности множества A .

Множество, равномошное множеству всех натуральных чисел, называется счетным множеством. Мощность счетных множеств есть наименьшая мощность, которую может иметь бесконечное множество; всякое бесконечное множество содержит счетную правильную часть. Г.Кантор доказал, что множество всех рациональных и даже всех алгебраических чисел счетно, тогда как множество всех действительных чисел - несчетное множество. Тем самым было дано новое доказательство существования трансцендентных чисел. Мощность множества всех действительных чисел называется мощностью континуума. Г.Кантор высказал гипотезу (континуум-гипотезу): всякое множество, состоящее из действительных чисел, либо конечно, либо счетно, либо равномошно множеству всех действительных чисел.

Алгебра множеств

Алгебра множеств — это совокупность тождеств справедливых независимо от того, какое универсальное множество V и какие именно его подмножества входят в эти тождества.

Законы алгебры множеств:

1) Коммутативный (переместительный):

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

2) Сочетательный (ассоциативный):

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3) Дистрибутивный (распределительный):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4) Свойства относительно пустого и универсального множеств:

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap V = A;$$

$$A \cup \neg A = V$$

$$A \cup V = V$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset;$$

5) Законы идемпотентности:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

6) Законы поглощения:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (\neg A \cap B) = A \cup B$$

$$A \cap (\neg A \cup B) = A \cap B$$

7) Законы склеивания:

$$(A \cap B) \cup (\neg A \cup B) = B$$

$$(A \cup B) \cap (\neg A \cup B) = B$$

Парадоксы

Мы уже упоминали о том, что в теории множеств встречаются такие утверждения, как парадокс Тристрама Шенди, которые выглядят противоречащими здравому смыслу. Эти парадоксы возникают просто потому, что теория множеств, подобно многим

математическим и физическим теориям, облекает свои идеи в обычные слова, вкладывая в них особый смысл. Однако существуют и парадоксы, возникающие из-за внутренних логических трудностей самой теории множеств. Обильным источником парадоксов такого типа служит широко распространенная практика задания множества путем указания некоторого свойства его элементов, например, «множество, состоящее из английских слов, содержащих менее 19 букв».

Некритическое использование такого рода определений может привести к трудностям. Например, некоторые статьи в этой энциклопедии содержат ссылки на себя, другие таких ссылок не содержат. Мы могли бы включить в нашу энциклопедию дополнительную статью, состоящую только из перечня статей, не содержащих ссылок на себя. Принадлежала бы такая статья множеству статей, не содержащих ссылок на себя, или не принадлежала бы? Любой ответ противоречил бы отличительному свойству, которым по их определению наделены элементы множества. Это – одна из форм так называемого парадокса Рассела, названного в честь своего автора Бертрана Рассела. «Множество всех множеств» – еще одно понятие, также приводящее к парадоксу. Существование парадоксов показывает, с какой осторожностью следует пользоваться терминологией теории множеств. Тем не менее теория множеств настолько полезна, что большинство математиков не хотели бы отказываться от нее. Было затрачено много усилий, чтобы развить методы, позволяющие исключить возникновение парадоксов в теории множеств. В приложениях теории множеств к другим разделам математики универсальное множество I обычно само является некоторым определенным множеством и парадоксальные ситуации здесь не возникают.

Парадокс Рассела

Парадокс Рассела — парадокс, открытый в начале XX века Берtrandом Расселом и демонстрирующий противоречивость наивной (или канторовской) теории множеств.

Парадокс Рассела формулируется следующим образом:

Пусть K — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли K само себя в качестве элемента? Если да, то, по определению K , оно не должно быть элементом K — противоречие. Если нет — то, по определению K , оно должно быть элементом K — вновь противоречие.

Противоречие в парадоксе Рассела возникает из-за использования в рассуждении «наивного» понятия множества всех множеств. Существование такого множества запрещается в аксиоматизациях теории множеств. Доказательство несовместимости существования множества всех множеств с аксиомами теории множеств по сути представляет собой повторение рассуждения, составляющего парадокс Рассела.

А именно, допустим, что множество U всех множеств существует. Выделим среди элементов U те и только те, которые не содержат себя в качестве элемента. Из аксиомы выделения следует, что полученная совокупность — тоже множество. Далее, вопрос, содержит ли это новое множество себя в качестве элемента, приводит к противоречию, из чего следует невозможность существования U .

Варианты формулировок

Существует много популярных формулировок этого парадокса. Одна из них традиционно называется задачей (или парадоксом) брадобрея и звучит так: Одному деревенскому брадобрею приказали *«брить всякого кто сам не бреется и не брить того кто сам бреется»*, как он должен поступить с собой?

Еще один вариант:

В одной стране вышел указ: *«Мэры всех городов должны жить не в своем городе, а в специальном Городе Мэров»*, аналогично, где должен жить мэр Города Мэров?

Аксиома выбора

Неожиданные трудности в теории множеств могут возникнуть, казалось бы, в самых простых случаях. Если, например, задано семейство непересекающихся множеств, ни одно из которых не пусто, то интуитивно кажется очевидным, что мы можем построить новое множество, содержащее ровно по одному элементу из каждого множества, входящего в это семейство. Но если наше семейство содержит бесконечно много множеств, то для построения нового множества может потребоваться бесконечное число произвольных выборов, а законность такого процесса при тщательном анализе становится отнюдь не очевидной. Аксиома выбора, утверждающая, что такое множество существует, была впервые сформулирована в 1904 Э.Цермело (1871–1953). До сих пор не удалось показать, что аксиома выбора следует из остальных аксиом теории множеств. Но около 1938 К.Гёдель (1906–1978) показал, что если теория множеств непротиворечива (т.е. не содержит внутренних противоречий) без аксиомы выбора, то она остается непротиворечивой и после присоединения к ней аксиомы выбора

Заключение

Таким образом, теория множеств является основой практически всех математических знаний. А следовательно, исследования в данной области затронут многие понятия других областей математики.

Обладая достаточно простым языком основных понятий, элементы данной теории широко используются в повседневной жизни человека.

Несмотря на все это, данная теория требует дальнейшей разработки для устранения существенных противоречий. Это и должно стать определяющим направлением в развитии теории множеств.

Теория множеств – одна из тех тем математики, которая охватывает не только математические понятия, но и широкий круг общественных отношений. Поэтому изучение данной теории необходимо не только для студентов математических факультетов, но и для широкого круга лиц, желающих развить свой аппарат логического мышления.

Список литературы

1. Печатные издания

Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. -М.: Наука, 1970
Шиханович Ю.А. Введение в современную математику. -М.: Наука, 1965

2. Периодические издания

Дмитриева М.В., Павлова М.В. Элементы теории множеств. Система: ее структура и состояние//Журнал ЦПО. Дистанционное обучение, №2, 2004 – с.17-20

3. Интернет – ресурсы

Электронная энциклопедия «Википедия»: <http://www.ru.wikipedia.org> 07.12.2005
Электронная энциклопедия «Кругосвет»: <http://www.krugosvet.ru> 21.12.2005