

Цель занятия:

Деятельностная:

– создать условия для сознательного усвоения учащимися методов решения тригонометрических неравенств.

Содержательная:

- актуализировать знания о тригонометрических неравенствах вида $\sin x > a$ и $\cos x > a$;
- расширить знания учеников за счет введения нового объекта – тригонометрического неравенства;
- познакомиться с задачами на решение простейших тригонометрических неравенств.

План занятия:

1. Простейшие тригонометрические неравенства вида $\sin x > a$.
2. Простейшие тригонометрические неравенства вида $\cos x > a$.

Ход занятия

Тригонометрические неравенства – это неравенства, содержащие тригонометрические функции, такие как синус, косинус, тангенс и котангенс. Решение таких неравенств заключается в нахождении всех значений переменной, при которых неравенство становится верным, с учётом периодичности тригонометрических функций.

1. Простейшие тригонометрические неравенства вида $\sin x > a$.

ОДЗ синуса -1 до 1 включительно: $-1 \leq \sin x \leq 1$. Тогда если $a > 1$ или $a < -1$, решений нет.

Если $-1 \leq a \leq 1$, то решение находится следующим образом:

1. Найти основные решения уравнения $\sin x = a$: $x_0 = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$.

2. Определить промежутки, где $\sin x > a$, используя график функции или тригонометрическую окружность.

3. Записать общее решение, учитывая периодичность: $x \in [2\pi n + \alpha; 2\pi n + \pi - \alpha], n \in Z$

Решать тригонометрические неравенства удобно при помощи единичной окружности. Обязательно нужно уметь хорошо ей пользоваться, без этого никак. Проще всего научиться решать на примерах. Начнем с простейшего тригонометрического неравенства с синусом.

Задачи

Тригонометрические неравенства с синусом

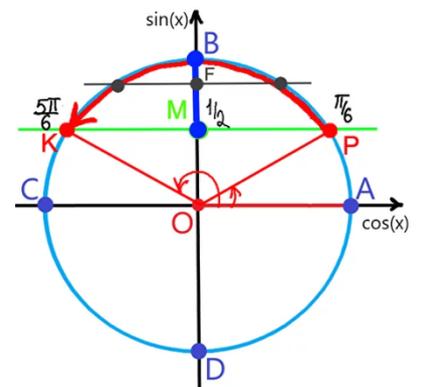
Пример 1. $\sin(x) > 1/2$

Что значит решить данное неравенство? Значит найти значения углов x , при подстановке которых, значение синуса будет больше $1/2$. Нарисуем тригонометрическую окружность. И по пунктам разберем последовательность решения:

На вертикальной оси (оси синусов) отметим значение синуса равное $1/2$, на нашем рисунке это будет точка M .

Проведем перпендикуляр a к оси синусов через точку M . Он пересечет окружность в точках P и K .

Углы $\angle POA = \pi/6 + 2\pi n$ и $\angle KOA = 5\pi/6 + 2\pi n$, будут углами, синус от которых равен $1/2$.



По условию нам нужны значения синуса больше $\frac{1}{2}$. Отметим синей штриховкой на оси синусов эти значения, лежащие над точкой М и до единицы, получим отрезок МВ. Напоминаю, что синус не может принимать значения больше единицы.

Любому значению синуса, лежащему на отрезке МВ от $\frac{1}{2}$ до 1 соответствуют углы с дуги окружности РК. Действительно, возьмем на отрезке МВ произвольную точку F, проведем через нее перпендикуляр к оси синусов, который пересечет окружность в точках на дуге РК.

Любой угол, лежащий на дуге РК, будет иметь значения синуса в промежутке от $\frac{1}{2}$ до 1, это именно те углы, которые нам нужны. Их можно записать в виде промежутка

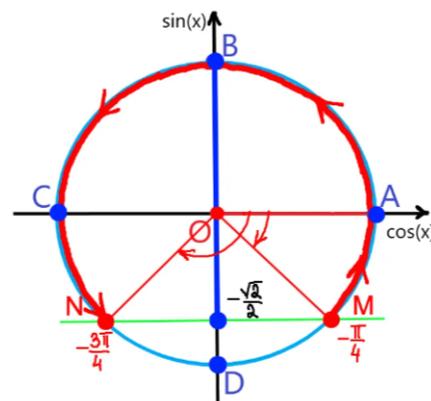
$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n \right), n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n \right), n \in \mathbb{Z}$

Внимание! Промежуток всегда записывается от меньшего угла к большему ПРОТИВ часовой стрелки. Скобки у промежутка круглые, так как неравенство строгое.

Пример 2. $\sin(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Для решения нам понадобится тригонометрическая окружность. Аналогично прошлому примеру, отметим на оси синусов значение $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и углы, соответствующие этому значению $\angle MOA = -\frac{\pi}{4}$ и $\angle NOA = -\frac{3\pi}{4}$.



Согласно неравенству, нам нужны значения синуса больше либо равные $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Этим значениям соответствуют углы, лежащие на дуге MN, включая точки М и N. Дугу MN с нужными углами можно записать в виде промежутка ПРОТИВ часовой стрелки. То есть от точки М к N. Получается такой промежуток:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot n \right], n \in \mathbb{Z}$$

Скобки квадратные так как знак неравенства нестрогий и не забываем про период $2\pi \cdot n$. Но сам промежуток неправильный!

Внимание! Так записывать ответ нельзя, потому что промежуток всегда должен быть от меньшего числа к большему. У нас это правило не соблюдается:

$$-\frac{\pi}{4} > -\frac{3\pi}{4}$$

Чтобы ответ был в правильном виде, достаточно просто прибавить к правой границе промежутка 2π .

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi + 2\pi \cdot n \right], n \in \mathbb{Z}$$

Приведем подобные слагаемые:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot n \right], n \in \mathbb{Z}$$

Левая граница меньше правой, значит можно записывать ответ.

Ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot n \right], n \in \mathbb{Z}$

Рассмотрим неравенство с синусом, которое наиболее часто встречается при нахождении ОДЗ.

Пример 3. $\sin(x) > 0$

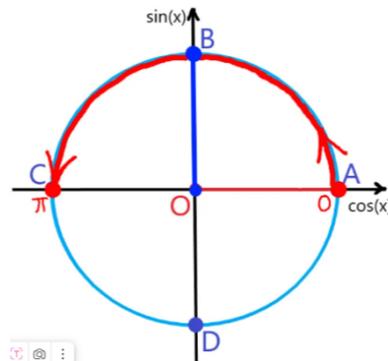
Решение аналогично предыдущим примерам. Рисуем единичную окружность, отмечаем на оси синусов значение 0, оно находится в начале координат. Углы на окружности, синус от которых будет равен 0 находятся в точках А и С: это углы $0 + 2\pi \cdot n$ и $\pi + 2\pi \cdot n$. Все значения синуса выше 0 нас устраивают, соответствующие им углы лежат на дуге АС, от точки А до С.

$$x \in (0 + 2\pi \cdot n; \pi + 2\pi \cdot n), n \in \mathbb{Z}$$

Левая граница промежутка меньше правой, скобки круглые, период не потеряли – можно записать ответ.

Ответ: $x \in (0 + 2\pi \cdot n; \pi + 2\pi \cdot n), n \in \mathbb{Z}$

Полезный факт: в тригонометрических уравнениях ОДЗ решать не обязательно, достаточно отметить нужные дуги на окружности и потом соотнести получившееся корни. Если корень попал на нужную дугу, значит удовлетворяет ОДЗ, если нет, значит вычеркиваем его.



2. Простейшие тригонометрические неравенства вида $\cos x > a$.

ОДЗ косинуса от -1 до 1 включительно: $-1 \leq \cos x \leq 1$. Тогда если $a > 1$ или $a < -1$, решений нет.

Неравенства с косинусом решаются аналогично синусам.

Если $-1 \leq a \leq 1$, то решение находится следующим образом:

1. Найти основные решения уравнения $\cos x = a$: $x_0 = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2. Определить промежутки, где $\cos x > a$, используя график функции или тригонометрическую окружность.

3. Общее решение записывается с учётом периода функции 2π .

Задачи

Пример 4. $\cos(x) > \frac{1}{2}$

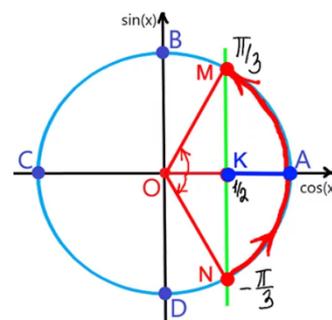
Рисуем единичную окружность и на оси косинусов отмечаем значение $\frac{1}{2}$ в точке К. Соответствующие этому значению углы на окружности: $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$ в точках М и N.

Согласно неравенству, нам нужны значения косинуса больше $\frac{1}{2}$, то есть справа от точки К: отрезок КА, мы отметили его синей штриховкой. Углы, соответствующие значениям косинуса с отрезка КА, будут лежать на дуге NM от точки N до точки М: дуга всегда должна быть записана против часовой стрелки.

Записываем ответ, внимательно следя за тем, чтобы левая граница промежутка была меньше чем правая, в противном случае не забываем прибавить к правой границе 2π . В данном примере с этим все нормально, ничего прибавлять не нужно:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n; \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n\right), n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n; \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n\right), n \in \mathbb{Z}$



Пример 5. $\cos(x) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Не будем повторяться, просто нарисуем окружность, отметим на ней необходимые точки и промежутки. Все рассуждения аналогичны предыдущим примерам.

Из рисунка видно, что решением неравенства будет дуга MN от точки М к N. Выписываем промежуток:

$$x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n \right), n \in \mathbb{Z}$$

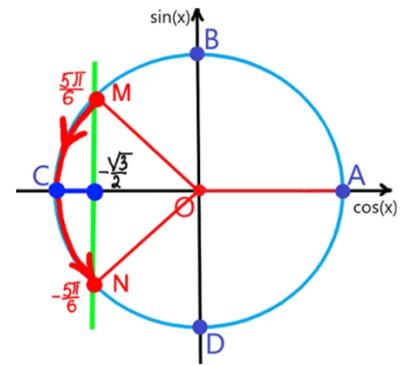
Здесь надо быть внимательными, так как в получившемся промежутке левая граница больше правой. Так быть не должно, чтобы это исправить, прибавляем к правой границе 2π .

$$x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi + 2\pi \cdot n \right), n \in \mathbb{Z}$$

Приводим подобные слагаемые:

$$x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi \cdot n \right), n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi \cdot n \right), n \in \mathbb{Z}$



(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

- 1.1. Что называется решением тригонометрического неравенства?
- 1.2. Что означает решить тригонометрическое неравенство? Почему для этого удобно использовать единичную окружность?
- 1.3. Каков алгоритм решения неравенства вида $\sin x > a$?
- 1.4. Каков алгоритм решения неравенства вида $\cos x > a$?

2. Решите предложенные задания по вариантам (письменно):

2.1. Решите неравенства:

- | | |
|---------------------------------|----------------------|
| А) $\sin x > -\frac{1}{2}$; | В) $\cos x > -1$; |
| Б) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$; | Г) $\cos x \leq 0$. |

2.2. Не решая, определите, имеет ли решение неравенство $\sin x > 1.5$. Обоснуйте.

ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 16 февраля 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail: pushistav@mail.ru

В теме письма указываем, к примеру:

ОД.07 Математика 10.02.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате: <https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGly>

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.