

Estudio de la monotonía y extremos de una función

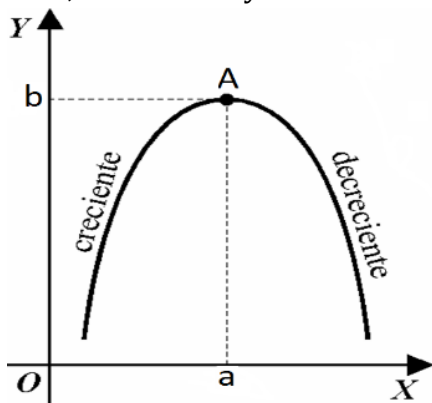
Estudiar la monotonía de una función  $f$  consiste en averiguar los intervalos del eje  $X$  donde  $f$  es creciente, decreciente o constante.

Si  $f$  es derivable, como la derivada representa la pendiente de la recta tangente:

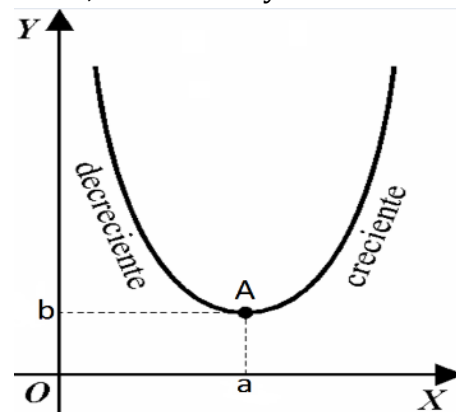
- Si  $f'(x) > 0$ , en un intervalo, entonces  $f$  es creciente en dicho intervalo
- Si  $f'(x) < 0$ , en un intervalo, entonces  $f$  es decreciente en dicho intervalo
- Si  $f'(x) = 0$ , en un intervalo, entonces  $f$  es constante en dicho intervalo

Una vez determinada la monotonía se pueden deducir cuales son los extremos relativos (máximos y mínimos relativos) recordando que:

Si la función pasa de ser creciente a decreciente y es continua, entonces hay un máximo relativo



Si la función pasa de ser decreciente a creciente y es continua, entonces hay un mínimo relativo



Derivadas sucesivas de una función: La derivada segunda de una función  $f$  es la derivada de  $f'(x)$  y se representa por  $f''(x)$ .

Por ejemplo, si  $f(x) = 6x^3 - 5x^2$ , entonces la primera derivada es  $f'(x) = 18x^2 - 10x$  y la segunda derivada es:  $f''(x) = [f'(x)]' = (18x^2 - 10x)' = 36x - 10$

Por el mismo procedimiento se pueden calcular  $f'''$ ,  $f^{iv}$ ,  $f^{v}$ , ...  $f^{(n)} \rightarrow f^{(n)}$  se llama derivada n-sima de  $f$

Si sólo queremos calcular los extremos relativos de una función  $f$  podemos usar el siguiente procedimiento que usa la derivada de  $f'(x)$ , llamada derivada segunda de  $x$  ( $f''(x)$ ):

**1º)** Resolvemos la ecuación  $f'(x) = 0$ . Si no tuviese solución es porque no hay extremos relativos.

2º) En otro caso, sea  $x_0$  una solución:

$$\begin{cases} \text{Si } f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{En } x_0 \text{ se alcanza un mínimo relativo} \\ \text{Si } f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{En } x_0 \text{ se alcanza un máximo relativo} \\ \text{Si } f''(x_0) = 0 \Rightarrow \text{No se puede asegurar si hay o no extremo relativo} \end{cases}$$

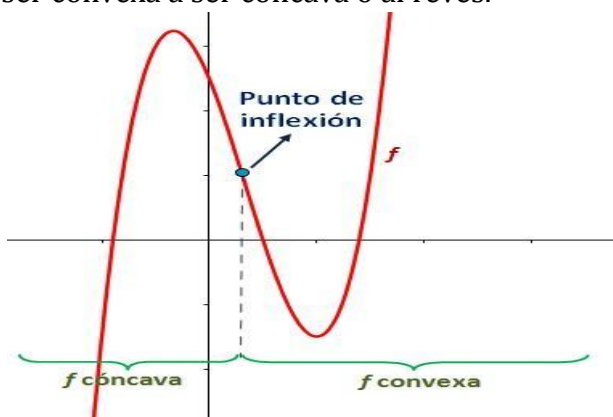
Estudio de la curvatura y puntos de inflexión de una función

Estudiar la curvatura de una función es averiguar los intervalos de la recta donde es **convexa** (forma de U) ó **cóncava** (forma de  $\cap$ ).

La derivada segunda,  $f''(x)$ , nos permite averiguarlo:

$$\begin{cases} \text{Si } f''(x) > 0, \text{ en un intervalo, entonces } f \text{ es convexa en dicho intervalo} \\ \text{Si } f''(x) < 0, \text{ en un intervalo, entonces } f \text{ es cóncava en dicho intervalo} \\ \text{Si } f''(x) = 0, \text{ en un intervalo, entonces } f \text{ es una línea recta en dicho intervalo} \end{cases}$$

Una vez determinada la curvatura se puede deducir los puntos de inflexión que son puntos donde la función es continua y pasa de ser convexa a ser cóncava o al revés.



Si sólo queremos calcular los puntos de inflexión de una función  $f$ , podemos usar el siguiente procedimiento:

1º) Resolvemos la ecuación  $f''(x) = 0$ . Si la ecuación no tuviese solución entonces no hay puntos de inflexión.

$$\begin{cases} \text{Si } f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow \text{En } x_0 \text{ hay un punto de inflexión} \\ \text{Si } f'''(x_0) = 0 \Rightarrow \text{No se puede asegurar si hay o no punto de inflexión} \end{cases}$$

2º) En otro caso, sea  $x_0$  una solución:  
 $f'''$  es la derivada de  $f''$

Estudiar la monotonía de una función consiste en averiguar los intervalos donde es creciente, decreciente o constante. La derivada representa la pendiente de la recta tangente, luego si  $f$  es una función derivable y  $f'(x)$  es su derivada se cumple:

- Si  $f'(x) > 0$ , en un intervalo, entonces  $f$  es creciente en dicho intervalo
- Si  $f'(x) < 0$ , en un intervalo, entonces  $f$  es decreciente en dicho intervalo
- Si  $f'(x) = 0$ , en un intervalo, entonces  $f$  es constante en dicho intervalo

Se pueden determinar los extremos relativos hallando las soluciones de la ecuación  $f'(x) = 0$  y después averiguando cuál de las soluciones corresponde a un máximo, mínimo o ninguno de los dos. Sus soluciones se suelen llamar **puntos singulares**

Si  $f(x)$  es una función derivable en  $a$  siendo  $f'(a) = 0$ ,

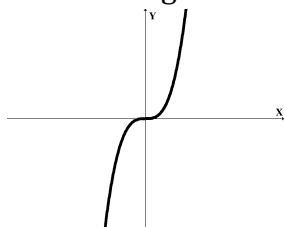
- a) Si  $f''(a) > 0$ , la función tiene un mínimo en  $a$ .
- b) Si  $f''(a) < 0$ , la función tiene un máximo en  $a$ .

Ojo que el que sea  $f'(a) = 0$  no asegura que en  $x = a$  haya un extremo relativo.

Por ejemplo, para la función  $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ , pero en  $x = 0$  no hay ningún extremo relativo: la función  $y = x^3$  es siempre creciente.

Observa su gráfica.



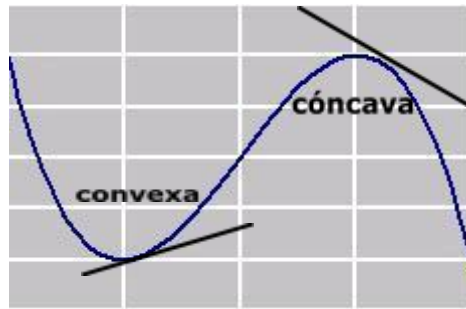
Definimos puntos singulares o puntos críticos de una función, como aquellos en los que la primera derivada se anula:  $f'(x) = 0$  (tg. horizontal)

Los puntos críticos pueden ser: Máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Estudiar la curvatura de una función es averiguar los intervalos donde es convexa (forma de U) ó cóncava (forma de  $\cap$ ).

Una función  $f$  es convexa en un punto cuando la tangente a la gráfica de  $f$  en dicho punto queda por debajo de la gráfica de la función

Una función  $f$  es cóncava en un punto cuando la tangente a la gráfica de  $f$  en dicho punto queda por encima de la gráfica de la función



Los puntos de inflexión son puntos donde la función es continua y pasa de ser convexa a ser cóncava o al revés.

Por tanto, en los puntos de inflexión la tangente atraviesa la gráfica

Si una función tiene un punto de inflexión en un punto  $a$  y existe  $f''(a)$ , necesariamente  $f''(a) = 0$ .

Para estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de una función procederemos de igual forma que en el estudio de la monotonía y extremos relativos pero usando, en vez de la primera derivada,  $f'(x)$ , la derivada segunda,  $f''(x)$ .

$$f''(x) = [f'(x)]'$$

Usaremos que:

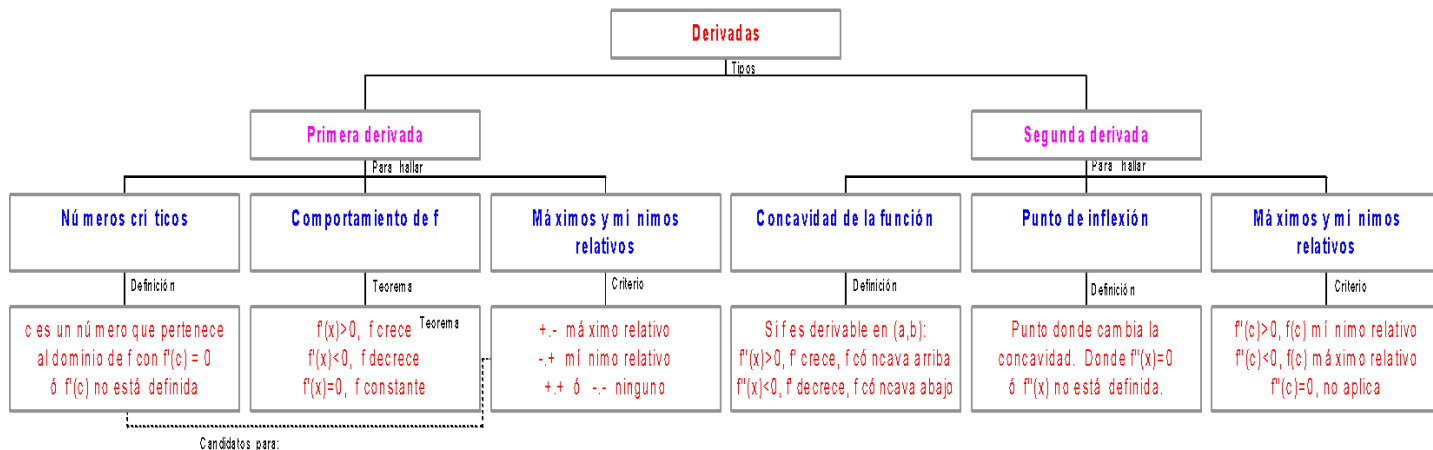
- f convexa( forma de  $\cup$ ) en un intervalo  $\leftrightarrow f''(x) > 0$ , en dicho intervalo
- f cóncava( forma de  $\cap$ ) en un intervalo  $\leftrightarrow f''(x) < 0$ , en dicho intervalo
- f tiene por gráfica una recta en un intervalo  
( ni cóncava, ni convexa)  $\leftrightarrow f''(x) = 0$ , en dicho intervalo

Supongamos que  $f$  admite derivadas sucesivas (finitas) y supongamos que la primera derivada que no se anula en  $x = a$  es  $f^{(n)}(a)$ , derivada  $n$ -ésima de  $f$ .

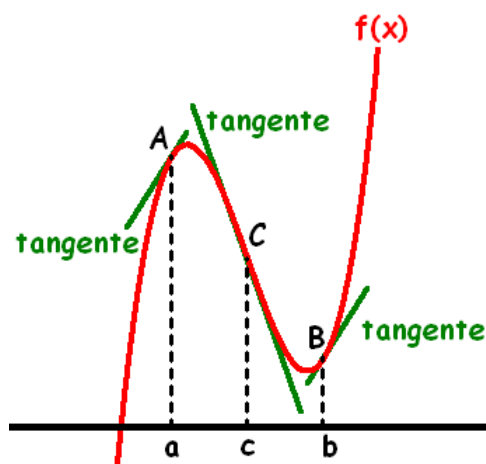
En estas condiciones:

$f$  tiene un extremo relativo en  $x = a \leftrightarrow n$  es par. Además si  $f^{(n)}(a) > 0$  se alcanza un mínimo y si  $f^{(n)}(a) < 0$  se alcanza un máximo

$f$  tiene un punto de inflexión en  $x = a$  de tangente horizontal  $\leftrightarrow n$  es impar



- Si en las proximidades de  $P$  es  $t(x) < f(x)$  la curva es cóncava en  $P$  (en ejemplo  $P = B$ )
- Si en las proximidades de  $P$  es  $t(x) > f(x)$  la curva es convexa en  $P$  (en ejemplo  $P = A$ )
- Si la tangente en  $P$  atraviesa a la curva, es decir, si a la izquierda de  $P$  se cumple:  $t(x) > f(x)$  y a la derecha de  $P$  se cumple  $t(x) < f(x)$  (o viceversa) se dice que la curva  $y = f(x)$  tiene en  $P$  un punto de Inflexión (en ejemplo  $P = C$ ).



\*\*\*\*\*

**Actividades resueltas**

1) Estudia la monotonía, extremos, curvatura y puntos de inflexión:

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	⊠	máximo	⊠	mínimo	⊠

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$

Máximo:  $(0, f(0)) = (0, 2)$       Mínimo:  $(2, f(2)) = (2, -2)$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	punto de inflexión	$\cup$

Curvatura y puntos de inflexión:  $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Punto de inflexión  $(1, f(1)) = (1, 0)$

b)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\boxtimes$	máximo	$\boxtimes$	mínimo	$\boxtimes$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 1/3$

Máximo:  $(1/3, f(1/3)) = (1/3, 4/27)$       Mínimo:  $(0, f(0)) = (0, 0)$

Curvatura y puntos de inflexión:

	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	punto de inflexión	$\cup$

$f''(x) = 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2/3$

Punto de inflexión  $(2/3, f(2/3)) = (2/3, 2/27)$

c)  $f(x) = x^3 - 1$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\boxtimes$		$\boxtimes$

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f$  es creciente  $\Rightarrow$  no hay extremos relativos

Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	punto de inflexión	$\cup$

Punto de inflexión  $(0, f(0)) = (0, -1)$

d)  $f(x) = (1/3)x^3 - 4x$

**Resolución**

Monotonía y extremos:  $f'(x) = x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\boxtimes$	máximo	$\boxtimes$	mínimo	$\boxtimes$

Curvatura y puntos de inflexión:  $f''(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	punto de inflexión	$\cup$

e)  $f(x) = -x + \frac{4}{x^2}$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

$f'(x) = -1 + \frac{-8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	<del>0</del>	-
$f(x)$	$\boxtimes$		$\boxtimes$	<del>0</del>	$\boxtimes$

Máximo: no tiene      Mínimo:  $(-2, f(-2)) = (-2, 3)$

Curvatura y puntos de inflexión:  $f''(x) = \frac{24}{x^4} > 0$ . Luego, f es convexa. No tiene puntos de inflexión

f)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	⊠	mínimo	⊠	máximo	⊠

Máximo:  $(1, f(1)) = (1, 1/2)$       Mínimo:  $(-1, f(-1)) = (-1, -1/2)$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$$

Curvatura y puntos de inflexión:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$0$	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	∩	punto de inflexión	∪	punto de inflexión	∩	punto de inflexión	∪

Puntos de inflexión:  $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4})$      $(0, f(0)) = (0, 0)$      $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

g)  $f(x) = \frac{3x^4+1}{x^3}$  . Observamos que f no está definida en  $x = 0$ .

Monotonía y extremos:  $f'(x) = \frac{12x^3(x^3) - (3x^4+1)3x^2}{x^6} = \frac{3x^6 - 3x^2}{x^6} = \frac{3x^2(x^4-1)}{x^6} = \frac{3(x^4-1)}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	∅	-	0	+
$f(x)$	⊠	máximo	⊠	∅	⊠	mínimo	⊠

Curvatura y puntos de inflexión:  $f''(x) = 3 \frac{4x^3x^4 - (x^4-1)4x^3}{x^8} = 3 \frac{4x^3}{x^8} = \frac{12}{x^5} = 0$  (imposible)

	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	-	∅	+
$f(x)$	∩	∅	∪

No hay puntos de inflexión

h)  $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

$$f'(x) = \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

	$(0, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	⊠	mínimo	⊠

Máximo: no hay      Mínimo:  $(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3})) = (\frac{1}{3}, 2\sqrt{3})$

Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{6\sqrt{x}(x-1)}{4x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	∩	punto de inflexión	∪

Punto de inflexión:  $(1, f(1)) = (1, 4)$

i) 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

Si  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = \begin{cases} \frac{-4}{x^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2, & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	⊠	-	0	+
$f(x)$	⊠	discontinua	⊠	mínimo	⊠

Máximo: no hay      Mínimo:  $(1, f(1)) = (1, 1)$

Curvatura y puntos de inflexión:

$$\text{Si } x \neq 0, f''(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3}, & \text{si } x < 0 \\ 2, & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) \neq 0$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	∩	discontinua	∪

No hay puntos de inflexión

j) 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**Resolución**

Observamos que  $D(f) = \mathbb{R}$  y que  $f$  no es continua en  $x = 0$ , luego  $\nexists f'(0)$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{(1-2x)^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Monotonía y extremos: Para  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1/2)$	$1/2$	$(1/2, \infty)$
$f'(x)$	+	$\nexists$	-	0	+
$f(x)$	$\boxtimes$	discontinua	$\boxtimes$	mínimo	$\boxtimes$

No hay máximo relativo.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{16}{(1-2x)^3}, & \text{si } x < 0 \\ 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Curvatura y puntos de inflexión: Para  $x \neq 0$ ,  $f''(x) = 0$  (imposible)

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	+	$\nexists$	+
$f(x)$	$\cup$	discontinua	$\cup$

No hay puntos de inflexión

k)  $f(x) = e^x(x - 2)$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\boxtimes$	mínimo	$\boxtimes$

$f'(x) = e^x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Máximo: no hay Mínimo:  $(1, f(1)) = (1, -e)$

Curvatura y puntos de inflexión:  $f''(x) = e^x x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	punto de inflexión	$\cup$

Punto de inflexión:  $(0, f(0)) = (0, -2)$

l)  $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$

**Resolución**

Monotonía y extremos:  $f'(x) = e^x(x^2 - x + 1) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x)$   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\boxtimes$	máximo	$\boxtimes$	mínimo	$\boxtimes$

Curvatura y puntos de inflexión:  $f''(x) = e^x(x^2 + x) + e^x(2x + 1) = e^x(x^2 + 3x + 1)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad x \cong -0,4 \quad x \cong -2,6$$

	$(-\infty, -2,6)$	$-2,6$	$(-2,6 ; -0,4)$	$-0,4$	$(-0,4, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\cup$	inflexión	$\cap$	inflexión	$\cup$

m)  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

$$f'(x) = \frac{-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$\boxtimes$	máximo	$\boxtimes$

Máximo:  $(0, f(0)) = (0, 1)$     Mínimo: no hay

Curvatura y puntos de inflexión:  $f''(x) = \frac{x-1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\cap$	punto de inflexión	$\cup$

Punto de inflexión:  $(1, f(1)) = (1, \frac{1}{e})$

n)  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\boxtimes$	mínimo	$\boxtimes$

Máximo: no hay    Mínimo:  $(0, f(0)) = (0, 1)$

Curvatura y puntos de inflexión:  $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0 \Rightarrow f$  es convexa. No hay puntos de inflexión

ñ)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

	$(0, e)$	$e$	$(e, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	⊠	máximo	⊠

Máximo:  $(e, f(e)) = (e, \frac{1}{e})$     Mínimo: no hay

Curvatura y puntos de inflexión:

$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}$

	$(0, \sqrt{e^3})$	$\sqrt{e^3}$	$(\sqrt{e^3}, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	∩	punto de inflexión	∪

Punto de inflexión:  $(\sqrt{e^3}, f(\sqrt{e^3})) = (\sqrt{e^3}, \frac{3\sqrt{e}}{2e^2})$

o)  $f(x) = x^2 - 8 \ln x$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{como } x > 0} x = 2$

	$(0, 2)$	$2$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	⊠	mínimo	⊠

Máximo: no hay    Mínimo:  $(2, f(2)) = (2, 4 - 8 \ln 2)$

Curvatura y puntos de inflexión:  $f''(x) = \frac{2x^2 + 8}{x^2} > 0 \Rightarrow f$  es convexa. No hay puntos de inflexión

p)  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

**Resolución**

Monotonía y extremos:

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	⊠	mínimo	⊠

Máximo: no hay    Mínimo:  $(0, f(0)) = (0, 0)$

$$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Curvatura y puntos de inflexión:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\cap$	punto de inflexión	$\cup$	punto de inflexión	$\cap$

Puntos de inflexión:  $(-1, f(-1)) = (-1, \ln 2)$   $(1, f(1)) = (1, \ln 2)$

q)  $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$ .

**Resolución**

Monotonía y extremos:  $f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 = \frac{2x+3-x^2-3x-3}{x^2+3x+3} = \frac{-x^2-x}{x^2+3x+3}$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\boxtimes$	mínimo	$\boxtimes$	máximo	$\boxtimes$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1$

Curvatura y puntos de inflexión:  $f''(x) = \frac{(-2x-1)(x^2+3x+3) - (-x^2-x)(2x+3)}{(x^2+3x+3)^2} = \frac{-2x^2-6x-3}{(x^2+3x+3)^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{4} \quad x \cong -0,6 \quad x \cong -2,4$

	$(-\infty, -2,4)$	-2,4	$(-2,4; -0,6)$	-0,6	$(-0,6, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\cap$	inflexión	$\cup$	inflexión	$\cap$

r)  $f(x) = e^x (\sin x + \cos x), x \in (0, \pi)$

**Resolución**

Monotonía y extremos:  $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = e^x 2\cos x = 2e^x \cos x$

	$(0, \pi/2)$	$\pi/2$	$(\pi/2, \pi)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\boxtimes$	máximo	$\boxtimes$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2$

Curvatura y puntos de inflexión:  $f''(x) = 2e^x \cos x + 2e^x(-\sin x) = 2e^x(\cos x - \sin x)$

	$(0, \pi/4)$	$\pi/4$	$(\pi/4, \pi)$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\cup$	inflexión	$\cap$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cotg x = 1 \Leftrightarrow x = \pi/4$

2) Sea la función f definida por  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$  para  $x \neq 1$ .

Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

**Resolución**

$$f'(x) = \frac{e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1-x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{e^{-x}x}{(1-x)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	$\nabla$	+
$f(x)$	$\boxtimes$	mínimo	$\boxtimes$	$\nabla$	$\boxtimes$

Ojo que también hay que tomar en la tabla el valor  $x = 1$

En la misma tabla podemos observar los intervalos donde  $f$  es creciente y en los que es decreciente

Mínimo relativo :  $(0, f(0))$ ;  $f(0) = \frac{e^0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$ ; punto  $(0, 1)$

3) Sea la función  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 8$

Halle las coordenadas de sus extremos relativos y de su punto de inflexión, si existen.

**Resolución**

$$f'(x) = 3x^2 - 18x; f'(x) = 0 \Rightarrow x(3x - 18) = 0 \rightarrow x = 0; x = 6$$

<i>Intervalo</i>	$(-\infty, 0)$	$(0, 6)$	$(6, \infty)$
<i>Signo de <math>f'(x)</math></i>	+	-	+
<i>Monotonía de <math>f(x)</math></i>	creciente	decreciente	creciente

$f$  es creciente en  $(-\infty, 0)$  y decreciente en el intervalo  $(0, 6)$ , luego en  $x = 0$  hay un máximo relativo.

$$f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 8 = 8; \text{ El máximo relativo es el punto } M(0, 8)$$

$f$  es decreciente en el intervalo  $(0, 6)$  y creciente en  $(6, \infty)$ , luego en  $x = 6$  hay un mínimo relativo.

$$f(6) = 6^3 - 9 \cdot 6^2 + 8 = -100; \text{ El mínimo relativo es el punto } N(6, -100)$$

$$f''(x) = [f'(x)]' = 6x - 18; f''(x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

<i>Intervalo</i>	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
<i>Signo de <math>f''(x)</math></i>	-	+
<i>Curvatura de <math>f(x)</math></i>	cóncava	convexa

Como  $f$  es cóncava ( $\cap$ ) en  $(-\infty, 3)$  y convexa ( $\cup$ ) en  $(3, \infty)$ , en  $x = 3$  hay un punto de inflexión.

$$f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 = -46; \text{ El punto de inflexión es } I(3, -46)$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} + \ln x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

4) Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función derivable definida por

Calcula los extremos absolutos de  $f$  en el intervalo  $[0, e]$  (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

**Resolución**

$$\text{Para } x \neq 1, f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 1 \\ \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x > 1, x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Ojo que también hay que tomar en la tabla el valor  $x = 1$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	-1	-	0	+
$f(x)$	⊠	2	⊠	mínimo	⊠

Mínimo relativo :  $(2, f(2)); f(2) = \frac{2}{2} + \ln 2 = 1 + \ln 2 \cong 1,693$  ; punto  $(2, 1 + \ln 2)$

Para averiguar los extremos absolutos en el intervalo  $[0, e]$  comparamos  $f(2), f(0)$  y  $f(e)$

$f(2) \cong 1,693$  ; punto  $(2, 1 + \ln 2) \rightarrow$  mínimo absoluto

$f(0) = 3 - 0 = 3$  ; punto  $(0, 3) \rightarrow$  máximo absoluto

$f(e) = \frac{2}{e} + \ln e = \frac{2}{e} + 1 \cong 1,736$  ; punto  $(e, \frac{2}{e} + 1)$

Más actividades y problemas

Determina los intervalos de monotonía y extremos de las funciones:

1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$  2)

$g(x) = 3x - x^3$

3)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

a)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$

$y = x^2 - 3x - 10$

$y = 6x - 2x^3$

$f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$

$y = -2x^3$

$y = \frac{1-3x}{2}$

$y = x^3 - 3x^2 + 1$

$y = (x+2)^2$ .

$y = x^4 - 2x^2$ .

$f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$

$f(x) = 24x + 1 - 4x^3 - 21x^2$ ,

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 12x - 1$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 7.$$

\*\*\*\*\*

$$4) f(x) = \frac{3-x}{2-x}$$

$$b) f(x) = \frac{3-x}{x-1}$$

$$y = \frac{3x}{x+1}$$

$$y = \frac{1-x}{5-2x}$$

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

\*\*\*\*\*

$$e) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 11 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$g) f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$h) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$i) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{x}{3} & \text{si } x \in (-6, -1) \\ x - 1 & \text{si } x \in [-1, 4] \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & \text{si } x \leq 4 \\ x^2 - 9x + 21, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{x+3} & \text{si } x \leq 3 \\ 8x - x^2 - 15 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-3-4x}{2x-3} & \text{si } x < 3 \\ 12x - x^2 - 32 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} -t^3 + 5t^2, & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ -t^2 + 12t - 9, & \text{si } 3 \leq t \leq 5 \\ 2t + 16, & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-10}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 6x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-2}{x+2} & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - x^2 - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6, & \text{si } x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x} & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x+2}{x} & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

\*\*\*\*\*

$$y = x e^x$$

$$y = (x-1)e^x$$

$$y = e^x(x^2 - 3x + 3)$$

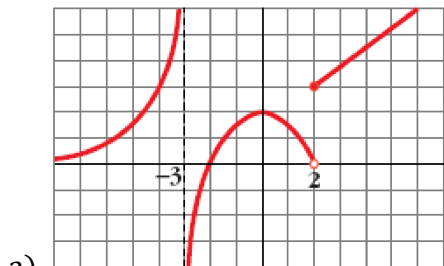
$$y = \frac{x}{\ln x}$$

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$$

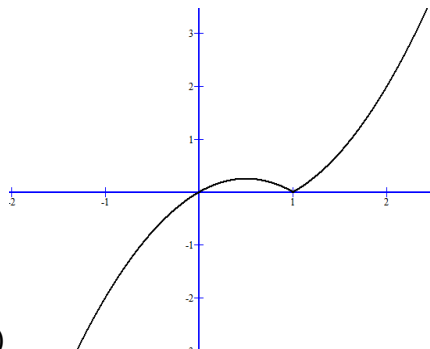
\*\*\*\*\*

Las gráficas siguientes son las de la función  $f'(x)$ . Determina para cada una de ellas:

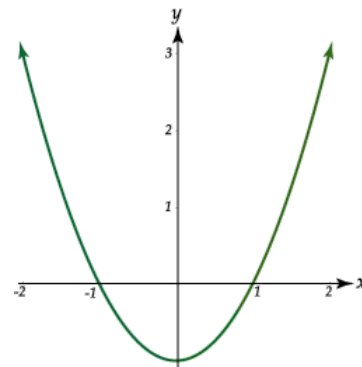
- 1) El valor o valores de  $x$  para los que  $f$  no es derivable
- 2) Los intervalos de monotonía de  $f$
- 3) Los máximos/mínimos relativos de  $f$



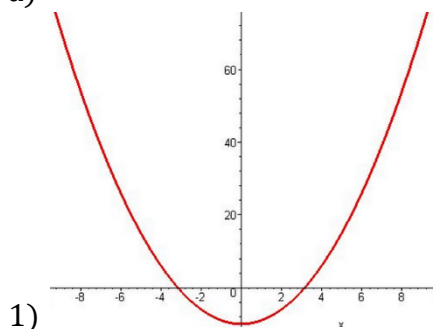
a)



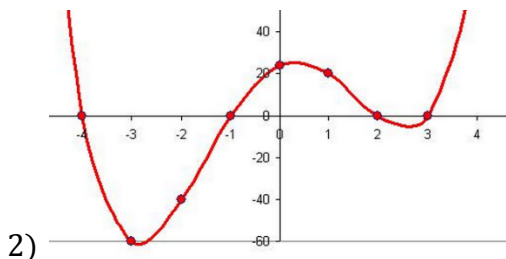
b)



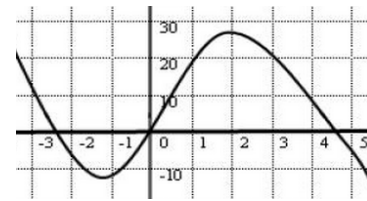
c)



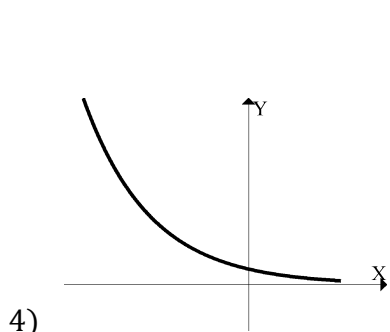
1)



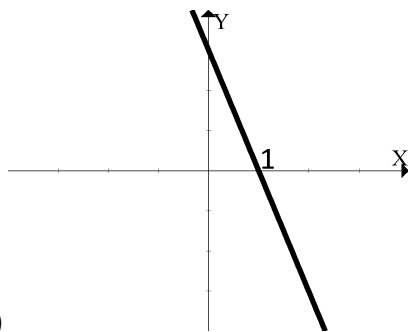
2)



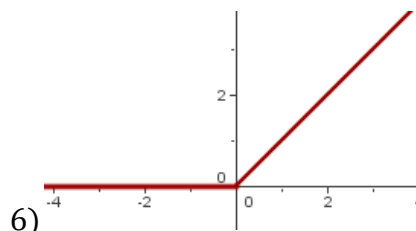
3)



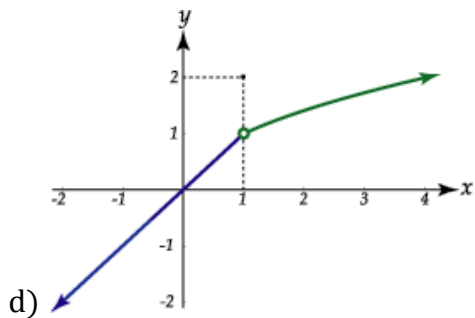
4)



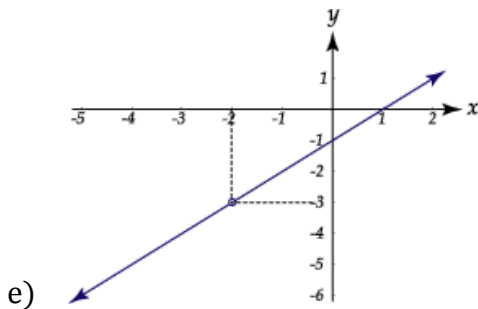
5)



6)

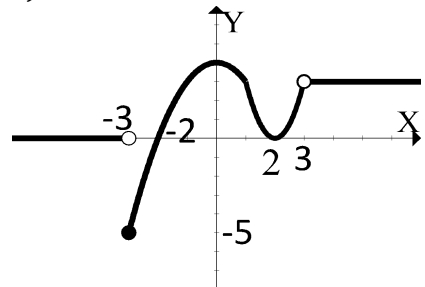


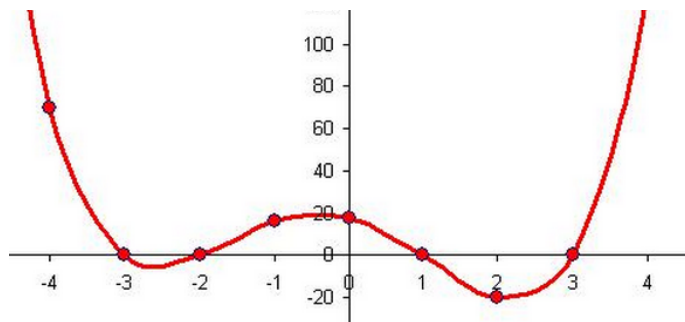
d)



e)

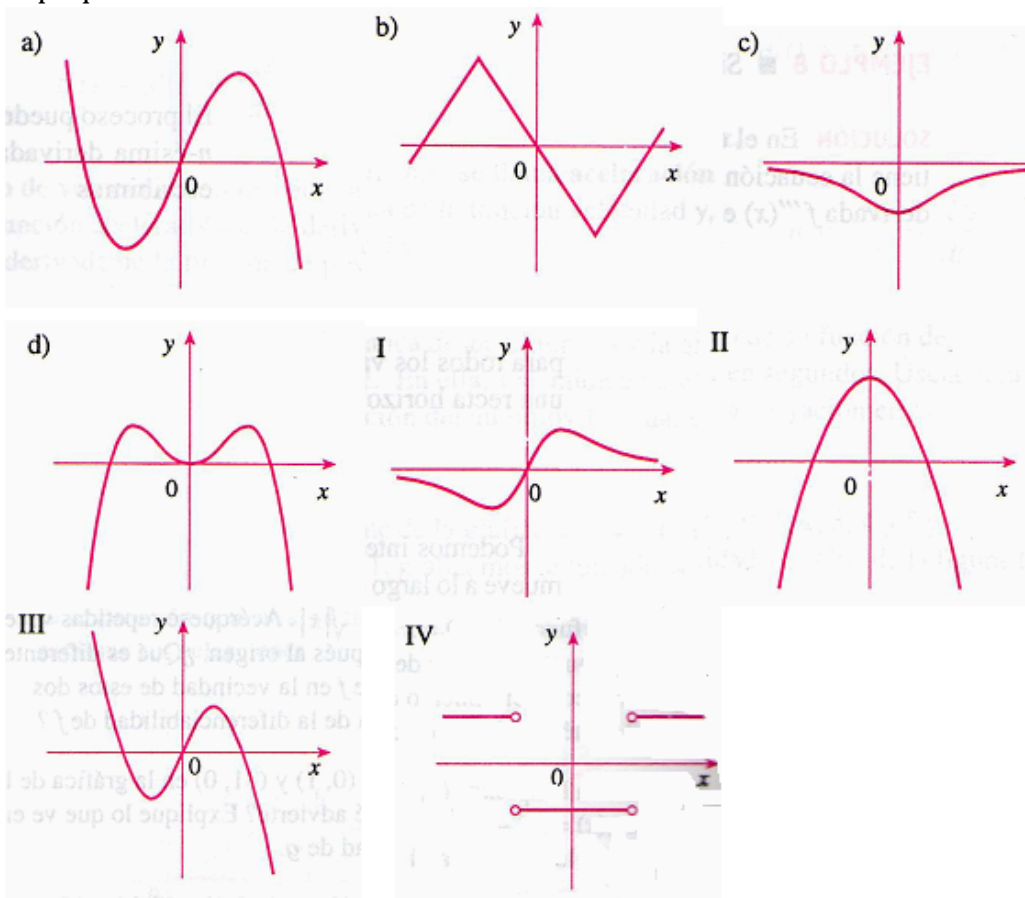
f)





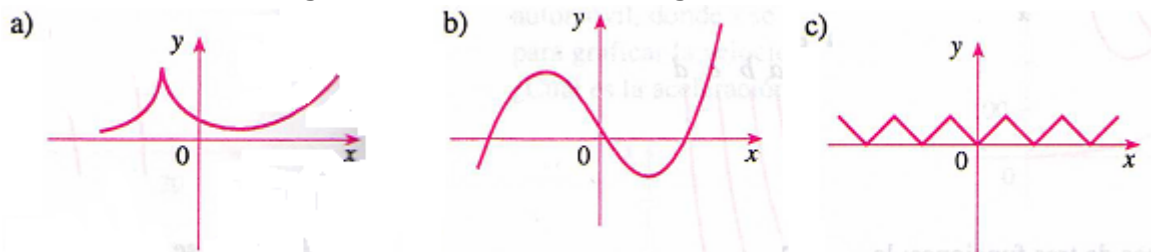
\*\*\*\*\*

1. Relacione la gráfica de cada función dada en las figuras a)-d) con las gráficas de sus derivadas I-IV. Explique las razones de su elección.



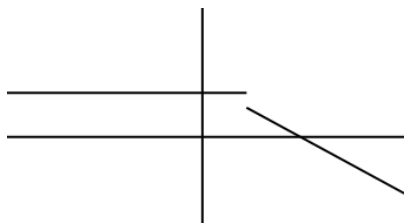
\*\*\*\*\*

Para cada una de las siguientes funciones trace la gráfica de su derivada.



\*\*\*\*\*

La función derivada  $f'(x)$  de cierta función continua  $f(x)$  es la función definida a trozos del dibujo.



- a) ¿Es  $f(x)$  derivable en todos los puntos de  $\mathbb{R}$ ? ¿Por qué?
- b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$
- c) ¿Tiene  $f(x)$  algún extremo relativo?

\*\*\*\*\*

Halla los intervalos de concavidad y convexidad de la función  $f$  cuya derivada viene dada por la fórmula  $f'(x) = 5x - 2x^2$

\*\*\*\*\*

De una función  $f$  se sabe que su función derivada es  $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$

- a) Estudia la monotonía y la curvatura de  $f$ .
- b) Sabiendo que la gráfica de  $f$  pasa por  $(0, 1)$ , calcula la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

\*\*\*\*\*

De una función  $f$  se sabe que la gráfica de su función derivada,  $f'$ , es la recta de ecuación  $y = -2x + 4$ . Estudia razonadamente la monotonía de la función  $f$ , a la vista de la gráfica de la derivada

\*\*\*\*\*

De una función  $f$  se sabe que su función derivada es  $f'(x) = -2x^2 + 5x + 1$  estudia la curvatura de  $f$  y los puntos de inflexión

\*\*\*\*\*

Se sabe que  $f'(x) = \frac{4 - 3x - x^2}{x^4}$ . Determina:

- a) El valor o valores de  $x$  para los que  $f$  no es derivable
- b) Los intervalos de monotonía de  $f$
- c) Los máximos/mínimos relativos de  $f$

\*\*\*\*\*

La gráfica de la función derivada de una función  $f$  es la parábola de vértice  $(0, 2)$  que corta al eje de abscisas en los puntos  $(-3, 0)$  y  $(3, 0)$ .

A partir de dicha gráfica, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f$

\*\*\*\*\*

La gráfica de la función derivada de una función  $f(x)$  es una parábola de vértice  $(1, -4)$  que corta al eje de abscisas en los puntos  $(-1, 0)$  y  $(3, 0)$ . A partir de la gráfica de  $f'$ :

- a) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de  $f$ .
- b) ¿Para qué valores de  $x$  se alcanzan los máximos y mínimos relativos?

\*\*\*\*\*

De una función  $f$  se sabe que su función derivada es  $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$ . Estudia la monotonía de  $f$

\*\*\*\*\*

Se sabe que  $f'(x) = \frac{15 - 12x - x^2}{x^2}$  Determina:

- a) El valor o valores de  $x$  para los que  $f$  no es derivable
- b) Los intervalos de monotonía de  $f$
- c) Los máximos/mínimos relativos de  $f$

\*\*\*\*\*

Estudia el crecimiento y decrecimiento de una función cuya función derivada viene dada gráficamente por la recta que pasa por los puntos  $(-1, 0)$  y  $(0, 1)$ .

\*\*\*\*\*

Halla los intervalos de concavidad y convexidad de la función  $f$  cuya derivada segunda tiene por gráfica la recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos  $A(3,0)$  ,  $B(0,1)$

\*\*\*\*\*

Demuestra que la función  $f(x) = (1 - x^2) \operatorname{sen} x$  tiene un máximo relativo en el intervalo  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Menciona los resultados teóricos que utilices.

\*\*\*\*\*

Estudia el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$f(x) = \frac{2}{x} \text{ en } x = -1;$$

$$f(x) = \frac{5x - 4}{2x + 1} \text{ en } x = 1$$

\*\*\*\*\*

Determina el polinomio que pasa por el punto  $(-1, 24)$ , tiene un mínimo en el punto  $(1, 0)$  y tiene 2 como raíz.

\*\*\*\*\*

Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$  en su punto de inflexión.

\*\*\*\*\*

Calcula los valores del parámetro  $a$ ,  $a \neq 0$  , que hacen que las tangentes a la curva de ecuación  $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$  en los puntos de inflexión sean perpendiculares

\*\*\*\*\*

Dada  $f(x) = ax^4 + bx + c$  , calcula los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que  $f(x)$  tenga en el punto  $(1, -1)$  un mínimo relativo y la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto  $x = 0$  sea paralela a la recta  $y = 4x$ .

\*\*\*\*\*

Determinar el valor de  $a$  par que la función  $f(x) = \frac{x - a}{x^3}$  tenga un extremo en  $x = 2$

\*\*\*\*\*

Dada la función  $f(x) = a(x - 1)^2 + bx$ , calcula  $a$  y  $b$  para que la gráfica de esta función pase por el punto de coordenadas  $(1, 2)$  y tenga un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = 2$ .

\*\*\*\*\*

Halla los valores de  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + b$  tenga un extremo relativo en el punto  $(-2, 3)$ .

\*\*\*\*\*

Dada la función  $f(x) = x^3 + bx + c$ , determina los valores de "b" y "c" sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto  $(-1, 3)$ .

\*\*\*\*\*

Halla los valores de  $a$  y  $b$  en la función  $f(x) = x^2 + ax + b$  sabiendo que pasa por el punto  $P(-2, 1)$  y tiene un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = -3$

\*\*\*\*\*

Dada la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$  , calcule los valores de  $a$  y  $b$  sabiendo que  $(1, 2)$  es un punto de inflexión.

\*\*\*\*\*

Se considera la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , donde  $a, b$  y  $c$  son parámetros reales.

a) Averigua los valores de  $a$  y  $b$  para que las rectas tangentes a la gráfica de  $f(x)$  en los puntos de abscisas  $x = 2$  y  $x = 4$  son paralelas al eje  $OX$  ( $a = -9, b = 24$ )

b) Con los valores de  $a$  y  $b$  hallados antes obtén el valor de  $c$  para que se cumpla que el punto de inflexión de la gráfica de  $f(x)$  esté en el eje  $OX$ . ( $c = -18$ )

\*\*\*\*\*

Sea la función definida para todo número real  $x$  por  $f(x) = ax^3 + bx$ .

a) Determine  $a$  y  $b$  sabiendo que su gráfica pasa por el punto  $(1, 1)$  y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es  $-3$ .

b) Si en la función anterior  $a = 1/3$  y  $b = -4$ , determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.

\*\*\*\*\*

Se considera la función  $f(x) = ax^2 - bx + 4$ . Calcula los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que  $f$  tenga un extremo relativo en el punto  $(1, 10)$ .

\*\*\*\*\*

Halla los valores de  $a$  y  $b$  para que la gráfica de la función  $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$  pase por el punto  $(1, -3)$  y tenga el punto de inflexión en  $x = -1$

\*\*\*\*\*

Determina  $a$  y  $b$  en la ecuación de la parábola  $y = ax^2 + bx + 5$  sabiendo que ésta tiene un máximo en el punto  $(2, 9)$ .

\*\*\*\*\*

Dada la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , hallar  $a, b$  y  $c$  de forma que la función pase por el punto  $(0, -1)$ , en  $x = -1$  presenta un máximo y en  $x = 2$  presenta un punto de inflexión

\*\*\*\*\*

Sea la función  $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$ . a) Halle  $a$  y  $b$  para que la función se anule en  $x = 1$  y tenga un punto de inflexión en  $x = -1/2$ .

\*\*\*\*\*

Sea la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ . Halle el valor de los coeficientes  $a, b$  y  $c$ , si se sabe que en el punto  $(0, 0)$  su gráfica posee un extremo relativo y que el punto  $(2, -16)$  es un punto de inflexión.

\*\*\*\*\*

Halla  $a, b$  y  $c$  en la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  sabiendo que el punto  $P(0, 4)$  es un máximo y el punto  $Q(2, 0)$  un mínimo

\*\*\*\*\*

Se considera la función  $f(x) = ax^2 - bx + 4$ . Calcula los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que  $f$  tenga un extremo relativo en el punto  $(1, 10)$

\*\*\*\*\*

Determine dónde se alcanza el mínimo de la función  $f(x) = 3x^2 - 6x + a$ . Calcule el valor de  $a$  para que el valor mínimo de la función sea 5.

\*\*\*\*\*

La función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  tiene un extremo relativo en  $x = 2$  y un punto de inflexión en  $x = 3$ . Calcule los coeficientes  $a$  y  $b$  y determine si el citado extremo es un máximo o un mínimo relativo.

\*\*\*\*\*

Hallar  $p$  y  $q$  para que la curva  $y = x^2 + px + q$  contenga al punto  $(-2, 1)$  y presente un mínimo en  $x = -3$ .

\*\*\*\*\*

Sea la función definida para todo número real  $x$  por  $f(x) = ax^3 + bx$ . Determine  $a$  y  $b$  sabiendo que su gráfica pasa por el punto  $(1, 1)$  y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es  $-3$ . b) Si en la función anterior  $a = 1/3$  y  $b = -4$ , determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.

\*\*\*\*\*

Determina dónde se alcanza el mínimo de la función  $f(x) = 3x^2 - 6x + a$ . Calcule el valor de  $a$  para que el valor mínimo de la función sea 5.

\*\*\*\*\*

Halla los valores de  $b$  y  $c$  para que la curva  $y = x^3 + bx^2 + cx + 1$  tenga en el punto  $(0, 1)$  una inflexión y la pendiente de la recta tangente en dicho punto valga 1.

\*\*\*\*\*

Dada la función  $f(x) = ax^3 - bx^2 + 1$ , calcula los valores de  $a$  y  $b$  sabiendo que  $(1, 2)$  es un punto de inflexión

\*\*\*\*\*

Halla los valores de  $a$  y  $b$  para que la gráfica de la función  $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$  pase por el punto  $(1, -3)$  y tenga el punto de inflexión en  $x = -1$

\*\*\*\*\*

Sea la función  $g(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$ . Halla  $a$  y  $b$  para que la función se anule en  $x = 1$  y tenga un punto de inflexión

\*\*\*\*\*

Dada la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ , calcule los valores de  $a$  y  $b$  sabiendo que la gráfica pasa por  $(2, 16)$

y que tiene un punto de inflexión para  $x = \frac{1}{12}$

\*\*\*\*\*

Sea la función  $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ . Calcula los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que  $f$  tenga un extremo relativo en el punto  $(1, 3)$ .

\*\*\*\*\*

Sea la función  $f$  definida mediante  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{si } x < 1 \\ \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$   
 Determina  $a$  y  $b$  sabiendo que  $f$  es continua y tiene un mínimo en  $x = -1$

\*\*\*\*\*

Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + mx + 5, & \text{si } x > 1 \end{cases}$  a) Calcule  $m$  para que la función sea continua en  $x = 1$ .

b) Para ese valor de  $m$ , ¿es derivable la función en  $x = 1$ ?  
 c) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $x = 0$ .

\*\*\*\*\*

Hallar  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la curva  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  tenga un mínimo en  $(1, 1)$  y la recta tangente a la curva en el punto de abscisa  $x = 0$  es el eje  $OX$ .

\*\*\*\*\*

Dada la función  $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ , siendo  $a$  y  $b$  números reales positivos, se pide:

a) Demostrar que el mínimo valor que alcanza la función anterior en el intervalo en  $(0, +\infty)$  es  $2\sqrt{ab}$ .

SOLUCIÓN:

Comenzamos calculando los extremos relativos de  $f$ :

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2b}{x^3} \quad a - \frac{b}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \quad f''\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) < 0 \quad f''\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) > 0$$

$$f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = a\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}\sqrt{a} = 2\sqrt{ab}$$

En los cálculos anteriores observamos que la primera derivada se anula en dos valores: uno positivo y otro negativo. En el negativo la segunda derivada también es negativa, luego en ese punto  $f$  tiene un máximo relativo. En el positivo la segunda derivada también es positiva, luego en ese punto  $f$  tiene un mínimo relativo.

Después observamos que el valor que alcanza la función en el mínimo relativo es precisamente el que nos pide el problema.

Para terminar, observemos que  $f$  es continua y derivable en el intervalo  $(0, +\infty)$ , pues el denominador nunca se anula en dicho intervalo. Además, en ese intervalo la función tiene un mínimo relativo y no tiene ningún otro extremo relativo, por lo tanto, el mínimo relativo es al mismo tiempo mínimo absoluto en el intervalo, con lo que el valor que alcanza  $f$  en él es el más pequeño posible. C.q.d.

b) Deducir de lo anterior que la media geométrica de dos números reales positivos es siempre menor o igual que su media aritmética, es decir,  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

Respuesta:

Observemos, ahora, que 1 pertenece al intervalo  $(0, +\infty)$ , y que  $f(1) = a+b$ . Como todos los valores de ese intervalo son mayores o iguales que  $2\sqrt{ab}$ , resulta:

$$2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

\*\*\*\*\*

Dada la función  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  estudia su monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) determina los puntos críticos y decide si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Solución.-

Sabemos que una función es creciente en un punto si su derivada es positiva en dicho punto y en consecuencia será creciente en un intervalo cuando su derivada sea positiva en todos los puntos de dicho intervalo (análogamente se dice para decreciente).

Por tanto tendremos que calcular los puntos en los que la derivada de la función es cero y a partir de aquí (por ser continua la función derivada) determinar en que intervalos la derivada es positiva y por tanto la función creciente y en que intervalos la derivada es negativa y en consecuencia la función es decreciente.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1. \text{ Estudiamos pues el signo de la derivada}$$

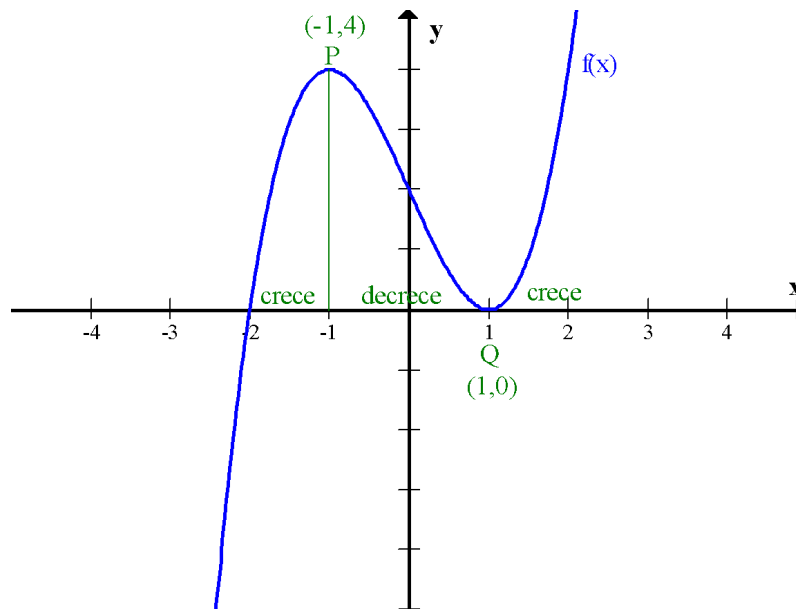
$$\text{en } (-\infty, -1) \quad f' > 0 \Rightarrow f \text{ creciente}$$

$$\text{en } (-1, 1) \quad f' < 0 \Rightarrow f \text{ decreciente}$$

$$\text{en } (1, \infty) \quad f' > 0 \Rightarrow f \text{ creciente}$$

Como la función en  $x = -1$  pasa de creciente a decreciente,  $f(x)$  tiene en  $x = -1$  un Máximo relativo que vale:  $(f(-1) = 4)$ .

Como la función en  $x = 1$  pasa de decreciente a creciente,  $f(x)$  tiene en  $x = 1$  un Mínimo relativo que vale: ( $f(1) = 0$ ).



Estudia la curvatura de la curva  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  y puntos de inflexión.

Solución.-

Ya hemos estudiado esta función para determinar su monotonía y sus puntos extremos .

Sabemos que su derivada es:  $f'(x) = 3x^2 - 3$  y su derivada segunda es:  $f''(x) = 6x$

Resolvemos los valores que anulan la derivada segunda, es decir,  $6x = 0 \Rightarrow x = 0$

en  $(-\infty, 0) f'' < 0 \Rightarrow f$  convexa

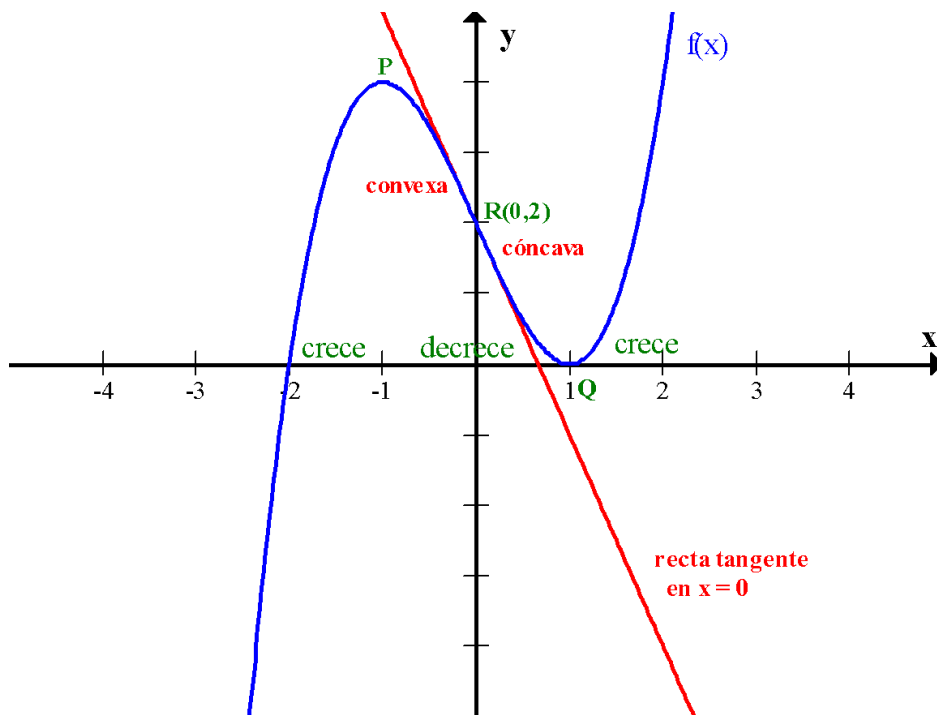
en  $(0, +\infty) f'' > 0 \Rightarrow f$  cóncava

En consecuencia, en el punto de abscisa  $x = 0$  (punto  $R(0, 2)$ ) tiene una inflexión puesto que ha cambiado la curvatura de convexa a cóncava en ese punto  $R(0, 2)$

(También podríamos haber determinado que el punto R es de inflexión, calculando la tercera derivada de la función y comprobando que no se anula en la abscisa de R, así:

$f'''(x) = 6 \neq 0$  sea cual sea el valor de x por tanto  $f'''(0) = 6 \neq 0$  y por tanto el punto  $R(0, 2)$  es un punto de inflexión de la curva dada.

Vemos también en la gráfica como la recta tangente a la curva en el punto  $R(0, 2)$  atraviesa a la curva.



\*\*\*\*\*

Estudia la curvatura y puntos de inflexión de la función  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Soluc.:  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  ;  $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}; f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+	-
Curvatura de $f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Puntos de inflexión:  $\left\{ \begin{array}{l} I_1(-1, f(-1)) \rightarrow I_1(-1, \ln(2)) \\ I_2(1, f(1)) \rightarrow I_2(1, \ln(2)) \end{array} \right.$

\*\*\*\*\*

Sea  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Obtén los intervalos de monotonía y los extremos relativos de  $f$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Intervalo	$(0, e)$	$(e, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-
Comportamiento de $f(x)$	creciente	decreciente

El máximo se alcanza en  $x = e$ ;  $y = f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e} \Rightarrow M(e, \frac{1}{e})$

\*\*\*\*\*

Sea  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \frac{2 \ln(x)}{x^2}$

Obtén los intervalos de monotonía y los extremos relativos de  $f$

Soluc.:  $f'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 - 2 \ln(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x - 4x \ln(x)}{x^4} = \frac{2 - 4 \ln(x)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2 - 4 \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

Intervalo	$(0, \sqrt{e})$	$(\sqrt{e}, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-
Comportamiento de $f(x)$	creciente	decreciente

Máximo:  $x = \sqrt{e}$ ;  $y = f(\sqrt{e}) = \frac{2 \ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{e} \Rightarrow M(\sqrt{e}, \frac{1}{e})$

\*\*\*\*\*

Halla los extremos relativos y los intervalos de monotonía de la función  $f$  dada por  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Soluc.:  $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

Intervalo	$(0, e)$	$(e, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-
Comportamiento de $f(x)$	creciente	decreciente

El máximo se alcanza en  $x = e$ ;  $y = f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e} \Rightarrow M(e, \frac{1}{e})$

\*\*\*\*\*

Estudia la curvatura y puntos de inflexión de la función  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Soluc.: Para  $x \neq 1$ ,  $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4, & \text{si } x > 1 \end{cases}$  (Observese que  $f$  es continua en  $x = 1$ , pero no es derivable)

$f''(x) = \begin{cases} 6x, & \text{si } x < 1 \\ -2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ ;  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+	-
Curvatura de $f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Puntos de inflexión:  $\begin{cases} I_1(0, f(0)) \rightarrow I_1(0, -1) \\ I_2(1, f(1)) \rightarrow I_2(1, 0) \end{cases}$

\*\*\*\*\*

Hallar los máximos y los mínimos de la función  $y = e^{x^2}$ .

\*\*\*\*\*

Dada una función  $f$  definida y derivable en un intervalo abierto  $(a, b)$  de los números reales, si  $f$  es creciente en dicho intervalo, entonces  $f'(x) > 0$ . ¿Es cierto? En caso afirmativo, razonar la respuesta y en caso contrario, poner un contraejemplo.

\*\*\*\*\*

Sea  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathfrak{R}$  la función definida por  $f(x) = e^x(\cos x + \sen x)$ .

- (a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ .
- (b) Halla los extremos relativos (locales) y absolutos (globales) de  $f$ .

\*\*\*\*\*

$f(x) = \frac{2 \ln(x)}{x^2}$

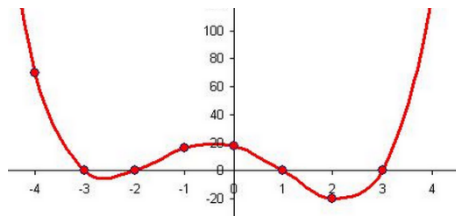
Sea  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  la función definida por

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de  $f$  (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

\*\*\*\*\*

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de  $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$  (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

\*\*\*\*\*



Sabiendo que la gráfica deduce la monotonía y extremos relativos de la función f.

\*\*\*\*\*

Halla los valores a, b y c sabiendo que la gráfica de la función  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x + c}$  tiene una asíntota vertical en  $x = 1$ , una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local de abscisa  $x = 3$ .

\*\*\*\*\*

Sea f la función definida por  $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ , para  $x \neq -1$  y  $x \neq 2$ .

(a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f. Sol.: A.V.:  $x = -1$ ;  $x = 2$     A.H.:  $y = 2$

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Sol.: creciente en  $(-4, 0) - \{-1\}$  y decreciente en  $(-\infty, -4) \cup (0, \infty) - \{2\}$

(c) Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal. Sol.: P(-2, 2)

\*\*\*\*\*

Sea f la función definida por  $f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$  para  $x \neq 0$ .

(a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función. Sol.: A.V.:  $x = 0$     A.O.:  $y = 3$

(b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Sol.: creciente en  $(-\infty, -1) \cup (1, 0)$  y decreciente en  $(-1, 1) - \{0\}$ ; Máx.: P(-1, -4)    Mín.: Q(1, 4)

\*\*\*\*\*

Sea f:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x^2 e^{-x}$ .

(a) Determina los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Sol.: Máx.: P(2,  $\frac{4}{e^2}$ )    Mín.: Q(0, 0)

(b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f. Sol.: A.H.:  $y = 0$

\*\*\*\*\*

Sea f:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$ .

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Sol.: creciente en  $(-\frac{3}{2}, 1)$  y decreciente en  $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (1, \infty)$

(b) Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Sol.: Máx.: P(1, e)    Mín.: Q( $-\frac{3}{2}, -9e^{-\frac{3}{2}}$ )

\*\*\*\*\*

Sea f la función definida por  $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$  para  $x \neq 1$ .

a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f. Sol.: A.V.:  $x = 1$

b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de f. Sol.: creciente en  $(2, \infty)$  y decreciente en  $(-\infty, 2)$ ; Mín.: P(2,  $e^2$ )

\*\*\*\*\*

Sea la función  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de  $f$ . Sol.: A.V.:  $x=0$     A.H.:  $y=0$
- b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ . Sol.: creciente en  $(0, e)$  y decreciente en  $(e, \infty)$ ; Máx.:  $P(e, \frac{1}{e})$

\*\*\*\*\*

Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ .

- (a) Calcula, si es posible, las derivadas laterales de  $f$  en  $x = 1$ . Sol.:  $f'(1^-) = 2$  ;  $f'(1^+) = -2$
- (b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f$ . Sol.: creciente en  $(0, 1)$  y decreciente en  $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

\*\*\*\*\*

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x^2 - |x|$ .

- a) Estudia la derivabilidad de  $f$ . Sol.:  $f$  es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ . No es derivable en  $x=0$ , aunque sí es continua
- b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ . Sol.: creciente en  $(0, \infty)$  y decreciente en  $(-\infty, 0)$

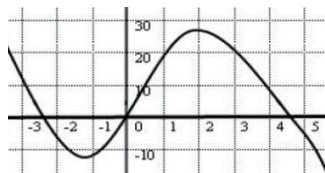
- c) Calcula los extremos relativos de  $f$  (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). Sol.: Mín.:  $P(0, 0)$

\*\*\*\*\*

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = |x^2 - 4|$ .

- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$  y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). Sol.: creciente en  $(-2, 0) \cup (2, \infty)$  y decreciente en  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ ; Mín.:  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$  ; Máx.:  $(0, 4)$

\*\*\*\*\*



Sabiendo que la gráfica es la de  $f'(x)$  determina la monotonía y las abscisas de los extremos relativos de la función  $f$

Sol.: creciente en  $(-\infty, -3, 5) \cup (0, 4, 5)$  y decreciente en  $(-3, 5; 0) \cup (4, 5; \infty)$ ; Mín.:  $x=0$  ; Máx.:  $x=-3, 5$  ,  $x=4, 5$

\*\*\*\*\*

La gráfica de la función  $f'(x)$  es la parábola de vértice  $(0, 2)$  que corta al eje de abscisas en los puntos  $(-3, 0)$  y  $(3, 0)$ . A partir de dicha gráfica, estudia la monotonía y extremos de  $f$ .

Sol.: creciente en  $(-3, 3)$  y decreciente en  $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ ; Mín.:  $x=-3$  ; Máx.:  $x=3$

\*\*\*\*\*

Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  tiene un punto de derivada nula en  $x = 1$  que no es extremo relativo y que  $f(1) = 1$ . Calcula  $a, b$  y  $c$ . Sol.:  $a=-3$  ,  $b=3$  ,  $c=0$

\*\*\*\*\*

Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , tiene extremos relativos en  $(0, 0)$  y  $(2, 2)$ . Calcula  $a, b, c$  y  $d$ . Sol.:  $a=-\frac{1}{2}$  ,  $b=\frac{3}{2}$  ,  $c=0$  ,  $d=0$

\*\*\*\*\*

Halla los extremos relativos de  $f(x) = \frac{4}{(x-2)(2x-1)}$  (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Sol.: Máx.:  $P(\frac{5}{4}, -\frac{32}{9})$ ; creciente en  $(-\infty, \frac{5}{4}) - \{\frac{1}{2}\}$  y decreciente en  $(\frac{5}{4}, \infty) - \{2\}$

\*\*\*\*\*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{x^2 + a}{x+1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Se sabe que la función  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , es continua en  $(-1, +\infty)$ .

(a) Halla el valor de a. ¿Es f derivable en  $x = 0$ ? Sol.:  $a = 3$ ; No es derivable en  $x = 0$

(b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Sol.: creciente en  $(1, \infty)$ ; decreciente en  $(-1, 0)$

\*\*\*\*\*

Determinar las funciones (definidas sobre toda la recta real y que toman valores reales) que satisfacen la condición de que la pendiente de la recta tangente en un punto genérico  $(x, y)$  de su gráfica viene dada por la expresión  $xe^x$ .

\*\*\*\*\*

Hallar los máximos y mínimos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de aquella de las funciones del apartado anterior que pasa por el punto  $(0,1)$ .

\*\*\*\*\*

$$f(x) = \begin{cases} a - x, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} + \ln x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función derivable definida por

a) Calcula a y b. Sol.:  $a = 3$ ,  $b = 2$

b) Para  $a = 3$  y  $b = 2$  calcula los extremos absolutos de f en el intervalo  $[0, e]$  (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). Sol.: Máx. absol.:  $P(0,3)$  Mín. absol.:  $Q(2, 1 + \ln 2)$

\*\*\*\*\*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ cx, & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Considera la función  $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

(a) Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica  $f(0) = f(4)$ , determina los valores de a, b y c.

Sol.:  $a = -3$ ,  $b = 4$ ,  $c = 1$

(b) Para  $a = -3$ ,  $b = 4$  y  $c = 1$  halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). Sol.: Máx. absol.:  $P_1(0,4)$ ,  $P_2(4,4)$  Mín. absol.:  $Q(\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

Calcula los valores de a, b y c sabiendo que las gráficas de  $f(x) = x^2 + ax + b$  y  $g(x) = ce^{-(x+1)}$  se cortan en el punto  $(-1, 2)$  y tienen en ese punto la misma recta tangente.

Solución:  $f(-1) = g(-1) = 2$   $f'(-1) = g'(-1)$ . Como  $f'(x) = 2x + a$ ,  $g'(x) = -ce^{-(x+1)}$ .

$$\begin{cases} (-1)^2 + a(-1) + b = 2 \\ ce^{-(-1+1)} = 2 \\ 2(-1) + a = -ce^{-(-1+1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ c = 2 \\ a + c = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = 1, c = 2$$

\*\*\*\*\*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ cx, & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Sabiendo que  $f(0) = f(4)$ , determina los valores de a, b y c. es derivable en todo el dominio y que verifica

Solución

Como para  $x \neq 2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ c, & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (cx) = 2c \quad \Rightarrow 4 + 2a + b = 2c$$

Como es continua en  $x = 2$  y

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + a) = 4 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} c = c \quad \Rightarrow 4 + a = c$$

Como es derivable en  $x = 2$  y  
Como  $f(0) = f(4) \Rightarrow b = 4c$

Luego,  $\begin{cases} 4 + 2a + b = 2c \\ 4 + a = c \\ b = 4c \end{cases} \Rightarrow$  Resolviendo,  $a = -3, b = 4, c = 1$

\*\*\*\*\*

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + ax), & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{bx^2 + c}{x + 1}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sea la función . Calcula las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa  $x = 1$  tiene pendiente 3.

Solución

Como para  $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x[x^2 + (a+2)x + a], & \text{si } x < 0 \\ \frac{bx^2 + 2bx - c}{(x+1)^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x(x^2 + ax) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx^2 + c}{x + 1} = c \quad \Rightarrow c = 0$$

Como es continua en  $x = 0$  y

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x[x^2 + (a+2)x + a] = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx^2 + 2bx - c}{(x+1)^2} = -c \quad \Rightarrow a = -c = 0$$

Como es derivable en  $x = 0$  y  
Como la pendiente de la recta tangente en  $x = 1$  es 3:

$$f'(1) = 3 \Rightarrow \frac{b \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 - c}{(1+1)^2} = 3 \Rightarrow \frac{3b - c}{4} = 3 \xrightarrow{\text{como } c = 0} b = 4$$

Luego,  $a = 0, b = 4, c = 0$

\*\*\*\*\*

Sea la función  $f(x) = ax^3 + bx$ .

Halla a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto A(1, 1) y que en ese punto la pendiente de la recta

$$\text{Soluc: } f'(x) = 3ax^2 + b; \begin{cases} \text{como la gráfica pasa por } A(1,1) \Rightarrow f(1) = 1 \\ \text{como la pendiente de la recta tan gente en } A \text{ es } -3 \Rightarrow f'(1) = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 1 \\ 3a \cdot 1^2 + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -2, b = 3}$$

tangente es -3.

\*\*\*\*\*

Estudia la curvatura y puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

\*\*\*\*\*

Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f:  $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ .

\*\*\*\*\*

Sea f:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que f verifica:

- El punto (0, 1) es un punto de inflexión de la gráfica f
- f tiene un mínimo local en el punto de abscisa  $x = 1$
- La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa  $x = 2$  tiene pendiente 1

\*\*\*\*\*

¿Una función polinómica de grado 2 puede tener dos máximos? ¿Y algún punto de inflexión? Razonar las respuestas.

\*\*\*\*\*

Sea f:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida como  $f(x) = e^x \cdot (x - 2)$ .

(a) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) Sol.: Mín.:P(1,-e)

(b) Determina, si existen, el punto de inflexión de la gráfica de f. Sol.: Inflex.:I(0,-2)

\*\*\*\*\*

Considera la función f:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$ .

Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f?

$$\text{Sol.: convexa en } \left(\frac{2}{3}, \infty\right) \text{ y cóncava en } \left(-\infty, \frac{2}{3}\right); \text{ Infl.: } I\left(\frac{2}{3}, \frac{20}{27}\right)$$

\*\*\*\*\*

Halla los puntos de inflexión de la gráfica de la función  $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$ . Sol.: I<sub>1</sub>(1, 4); I<sub>2</sub>(1/5, 8√5/5)

\*\*\*\*\*

Sea f:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ .

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa.

$$\text{Sol.: } y = -x + \ln 2 - 1$$

\*\*\*\*\*

Sea f:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$ . Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta  $y = 2x + 3$ . Sol.: a=26, b=19

\*\*\*\*\*

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$  en el punto de abscisa  $x = 1$  y determine, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas.

Solución

Para  $x \neq \frac{-1}{2}$ ,  $h'(x) = \frac{3(2x+1) - (3x+6) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{-9}{(2x+1)^2}$  y la ecuación de la recta tangente a h en  $x_0$  es

$$y = h'(x_0) \cdot (x - x_0) + h(x_0).$$

En este caso,  $x_0 = 1$ ,  $h(x_0) = h(1) = 3$ ;  $h'(x_0) = h'(1) = -1$

La ecuación de la recta tangente a h en  $x = 1$  es:  $y = -1 \cdot (x - 1) + 3 \rightarrow$   $r_{tg} : y = -x + 4$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x}{2x} + \frac{6}{1}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 + \frac{6}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{La A.H. en } \pm\infty \text{ es la recta } y = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} h(x) = \frac{4,5}{0} = \pm\infty \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}^-} h(x) = \frac{4,5}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}^+} h(x) = \frac{4,5}{0^+} = \infty \end{array} \right. \Rightarrow \text{La A.V. es la recta } x = \frac{-1}{2} \end{array} \right.$$

\*\*\*\*\*

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

(a) Determina  $a, b \in \mathbb{R}$  sabiendo que la gráfica de  $f$  pasa por el punto  $(2, 2)$  y tiene un punto de inflexión de abscisa  $x = 0$ .

Sol.:  $a=0$  ,  $b=-\frac{7}{2}$

(b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de  $f$  en el punto de inflexión.

Sol.:  $rtg: y = \frac{-7}{2}x + 1$  ,  $rn: y = \frac{2}{7}x + 1$

\*\*\*\*\*

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

Halla los coeficientes  $a, b, c$  y  $d$  sabiendo que  $f$  presenta un extremo local en el punto de abscisa  $x = 0$ , que  $(1, 0)$  es punto de inflexión de la gráfica de  $f$  y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es  $-3$ .

Sol.:  $a=1$  ,  $b=-3$  ,  $c=0$  ,  $d=2$

\*\*\*\*\*

Sea la función  $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ .

(a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ .

Sol.: decreciente en  $(1, 2)$  y creciente en  $(2, e)$

(b) Calcula los extremos absolutos y relativos de la función  $f$  (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Sol.: Máx. absol.:  $(1, 1)$ ; Mín. relat. y absol.:  $(2, 4 - 8 \ln 2)$

\*\*\*\*\*

Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$ .

(a) Calcula  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  Sol.:  $0$  e  $\infty$ , respectivamente

(b) Halla los extremos relativos de  $f$  (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan),

Sol.: Máx.:  $(-1, \frac{3}{e})$ ; Mín.:  $(0, 1)$

determinando si son máximos o mínimos.

\*\*\*\*\*

$$f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$$

Sea  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de  $f$  (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan).

Sol.: decreciente en  $(0, \frac{1}{3})$  y creciente en  $(\frac{1}{3}, \infty)$ ; Mín.:  $(\frac{1}{3}, 2\sqrt{3})$

\*\*\*\*\*

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ .

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función  $f$  (puntos donde se alcanzan y valor de la función). **Sol.:** decreciente en  $(-\infty, 0)$  y creciente en  $(0, \infty)$ ; Mín.:  $(0, 0)$

\*\*\*\*\*

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ . **Sol.:** creciente en  $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$  y decreciente en  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

\*\*\*\*\*

La gráfica de la función derivada,  $f'$ , de una función  $f$  es una parábola que corta al eje  $OX$  en los puntos  $(-1, 0)$  y  $(3, 0)$  y tiene su vértice en  $(1, -4)$ . Estudia, a partir de ella, la monotonía y extremos de la función  $f$ . **Sol.:** decreciente en  $(-1, 3)$  y creciente en  $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ ; Mín.:  $x = 3$ ; Máx.:  $x = -1$

\*\*\*\*\*

$$s(t) = \frac{340 + 330t - 10t^2}{t + 2}$$

Dada la función definida en los reales, salvo en  $t = -2$ . Halle:

- a) El valor positivo de  $t$  en el que se hace cero la función
- b) El valor positivo de  $t$  en el que  $s(t)$  se hace máximo.
- c) Las asíntotas de  $s(t)$

\*\*\*\*\*

Razonar por qué la gráfica de la función  $y = 2x + \cos x$  no puede presentar extremos relativos. ¿Qué tipo de función es? ¿Cuál es su campo de existencia?

\*\*\*\*\*

El número de socios de una cierta ONG viene dado por la función  $n(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$  donde  $x$  indica el número de años desde su fundación. Indica cuantos socios había al principio, cuándo aumentó y cuándo disminuyó el número de socios y en qué momentos fue máximo y mínimo el número de socios

\*\*\*\*\*

La virulencia de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por la función  $V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$ , donde  $t$  es el tiempo (en horas) transcurrido desde que comienzo en estudio ( $t = 0$ ). Indicar los instantes de máxima y mínima virulencia en las 6 primeras horas y los intervalos en que esta crece y decrece.

\*\*\*\*\*

La cantidad de agua recogida en 2002 (en millones de litros), en cierto pantano, como función del

$$f(t) = \frac{10}{(t-6)^2 + 1}, \quad 0 \leq t \leq 12$$

instante de tiempo  $t$  (en meses), viene dada a través de la expresión

Se pide:

- a) ¿En qué periodo de tiempo aumento la cantidad de agua recogida?
- b) ¿En qué instante se obtuvo la cantidad máxima de agua?
- c) ¿Cual fue esa cantidad máxima?

\*\*\*\*\*

En una fábrica la función de costes (en miles de euros) es  $C(x) = x^3 + 3 \cdot \ln x$ , donde  $x > 0$  es el número de toneladas que se producen.

$$I(x) = x^3 + \frac{3x}{4} + 5$$

- a) Si la función de ingresos (en miles de euros) es  $I(x) = x^3 + \frac{3x}{4} + 5$  escribe la función de beneficios.
- b) Calcula los intervalos en los que la función de beneficios es creciente o decreciente y di si existe beneficio máximo y en caso afirmativo el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho beneficio.

\*\*\*\*\*

Un coche de competición se desplaza a una velocidad que, entre las 0 y 2 horas, viene dada por la expresión  $v(x) = (2-x) \cdot e^x$ , donde  $x$  es el tiempo en horas y  $v(x)$  es a velocidad en cientos de kilómetros.

Hallar en que momento del intervalo  $[0, 2]$  circula a la velocidad máxima y calcular dicha velocidad. ¿En qué periodos gana velocidad y en cuales redujo? ¿Se detuvo alguna vez?

\*\*\*\*\*

En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad,  $x$ , es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula  $-x^2 + 70x$ , mientras que para edades iguales o superiores a 50 años

los ingresos están determinados por la expresión,  $\frac{400x}{x-30}$ .

Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.

\*\*\*\*\*

El beneficio neto mensual, en millones de pesetas, de una empresa que fabrica autobuses viene dado por la función:  $B(x) = 1,2x - (0,1x)^3$  donde  $x$  es el número de autobuses fabricados en un mes.

Calcula la producción mensual que hace máximo el beneficio.

El beneficio máximo correspondiente a dicha producción.

\*\*\*\*\*

El número de socios de una cierta ONG viene dado por la función  $n(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$  donde  $x$  indica el número de años desde su fundación. Indica cuantos socios había al principio, cuándo aumentó y cuándo disminuyó el número de socios y en qué momentos fue máximo y mínimo el nº de socios

\*\*\*\*\*