

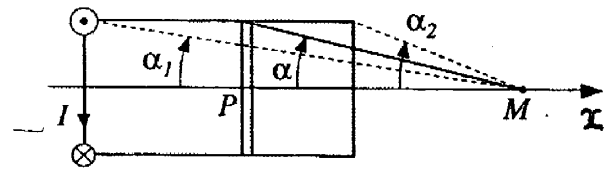
# ESIM MP 1

## Partie I. Le moteur synchrone

### I.1. Le solénoïde :

Un solénoïde d'axe  $Ox$ , de longueur  $L$ , est constitué d'un bobinage serré modélisé par  $N$  spires circulaires de rayon  $a$  et parcourues par un courant d'intensité  $I$ .

Les extrémités du solénoïde sont vues à partir d'un point  $M$  de son axe sous des angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (orientés positivement dans le sens indiqué sur la figure).



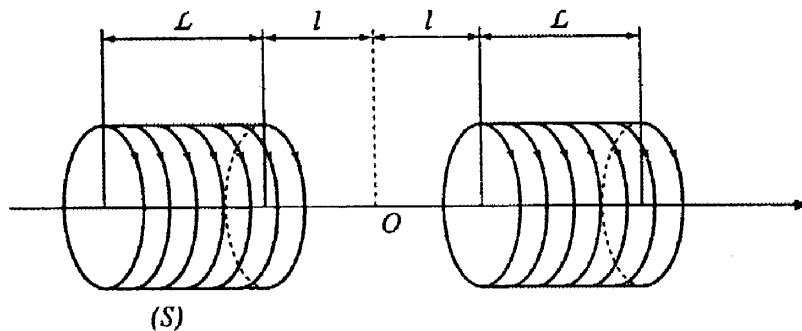
On rappelle que le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par le solénoïde au point  $M$  est donné par l'expression

$$\vec{B}(M) = (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \vec{u}_x$$

où  $\vec{u}_x$  est le vecteur unitaire de l'axe  $Ox$ .

**I.1.a)** A quelle limite, à justifier, correspond  $B_i$  ? Donner, sans calcul, l'expression de  $B_i$  en fonction de la perméabilité du vide  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  et des données de l'énoncé.

Un système  $(S)$  est constitué de l'association de deux solénoïdes identiques au précédent et coaxiaux ; leurs faces en regard sont distantes de  $2l$ . Ils sont montés en série de telle sorte que le courant d'alimentation d'intensité  $I$  y circule dans le même sens.



**I.1.b)** Montrer que le champ au centre  $O$  du système  $(S)$  peut, en module, se mettre sous la forme  $B = kI$

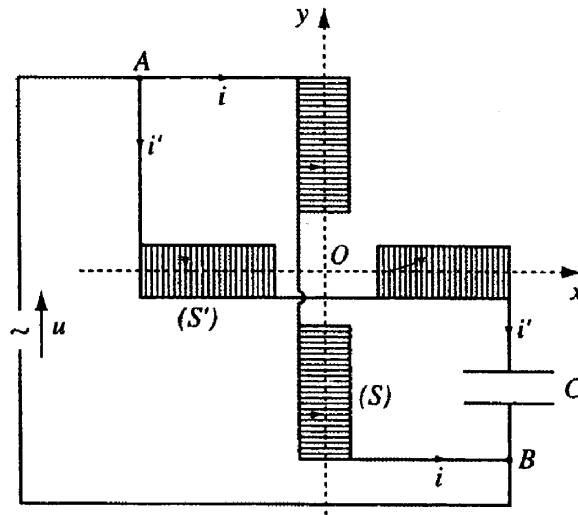
où  $k$  est un coefficient à exprimer en fonction des caractéristiques géométriques du système.

Applications numériques. Calculer  $k$  pour  $L = 7 \text{ cm}$  ;  $l = 5 \text{ cm}$  ;  $a = 3 \text{ cm}$  ;  $N = 800$ .

En déduire la valeur de  $B$  lorsque  $I = 4 \text{ A}$ .

### I.2. Production d'un champ tournant

On met en place deux systèmes  $(S)$  et  $(S')$  identiques au précédent selon la disposition de la figure ci-dessous : les axes  $Oy$  de  $(S)$  et  $Ox$  de  $(S')$  sont orthogonaux et se coupent en  $O$ , milieu commun. Chaque système a une résistance électrique totale  $R$  et une inductance totale  $L$ .



Entre les points  $A$  et  $B$  sont branchés en parallèle :

- un générateur de tension de force électromotrice sinusoïdale :  $u(t) = U \cos \omega_0 t$
- le système  $(S)$
- le système  $(S')$  monté en série avec un condensateur de capacité  $C$ .

**I.2.a)** A tension  $u(t)$  donnée, prévoir qualitativement le rôle de la capacité  $C$  sur le courant  $i'(t)$  dans  $(S')$  par rapport au courant  $i(t)$  dans  $(S)$ . Comment évolue au point  $O$  l'extrémité du champ magnétique total dans le plan  $xOy$  ?

**I.2.b)** Déterminer, en utilisant la méthode complexe (grandeurs à souligner), les intensités instantanées réelles  $i(t)$  et  $i'(t)$  sous la forme :

$$i(t) = I \cos (\omega_0 t - \phi) \quad \text{et} \quad i'(t) = I' \cos (\omega_0 t - \phi')$$

et donner les expressions des intensités efficaces  $I$  et  $I'$  ainsi que de  $\tan \phi$  et  $\tan \phi'$ .

**I.2.c)** En supposant  $R$  et  $\omega_0$  imposées, exprimer  $L$  et  $C$  (en fonction de  $R$  et  $\omega_0$ ) pour satisfaire la double condition :  $I = I'$  et  $\phi = \phi' - \pi/2$ .

Que valent dans ces conditions  $I$ ,  $I'$  (en fonction de  $U$  et  $R$ ),  $\phi$  et  $\phi'$  ? Peut-on alors préciser la réponse à la question **I.2.a)** ?

**I.2.d)** Application numérique. Calculer  $L$  et  $C$  sachant que  $R = 25,1 \, \Omega$  et  $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 50 \, \text{Hz}$  ; que valent alors numériquement  $I$  et  $I'$  sachant qu'en plus  $U = 110 \, \text{V}$  ?

**I.2.e)** Déterminer dans les conditions du **I.2.c)** le vecteur représentant le champ magnétique  $\vec{B}$  au point  $O$  en notant  $B_0$  son module ( à exprimer en fonction de  $k$ ,  $U$  et  $R$  ) et  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ , les vecteurs unitaires des deux axes.

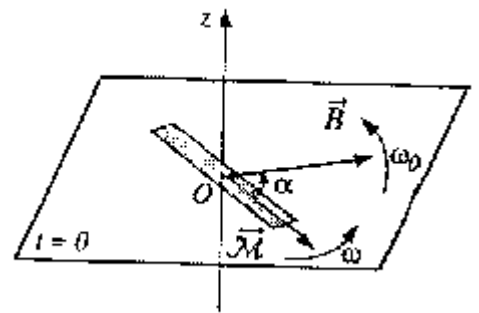
A quelle fréquence ce champ tourne-t-il dans le plan  $xOy$  ?

Quelle est la valeur numérique de  $B_0$  avec les conditions précédentes ?

### I.3. Entraînement de la pièce mobile :

Le montage précédent de bobines parcourues par des courants alternatifs de pulsation  $\omega_0$  produit dans un certain volume un champ magnétique  $\vec{B}$  supposé uniforme, d'amplitude  $B_0$ , qui tourne dans le plan  $xOy$  autour de l'axe  $Oz$  avec la pulsation  $\omega_0$  constante (le stator).

D'autre part, une pièce mobile autour de l'axe  $Oz$  (le rotor) constituée d'un petit aimant portant un moment magnétique permanent  $\vec{M}$ , orthogonal à  $Oz$ , tourne dans le plan  $xOy$  d'un mouvement de rotation uniforme de pulsation  $\omega$ .



La valeur de l'angle  $(\vec{M}, \vec{B})$  à l'instant initial est notée  $\alpha$  comme indiqué sur la figure.

On note  $\vec{u}_z$  le vecteur unitaire de l'axe  $Oz$ .

- I.3.a)** Calculer la valeur instantanée du couple magnétique  $\vec{\Gamma}(t)$  exercé par le champ  $\vec{B}$  sur la pièce mobile. En déduire sa valeur moyenne au cours du temps  $\langle \vec{\Gamma} \rangle$  et commenter le résultat en distinguant le cas  $\omega = \omega_0$  du cas  $\omega \neq \omega_0$ .
- I.3.b)** Pour quelles valeurs de  $\omega$  et  $\alpha$  ce dispositif fonctionne-t-il en moteur ? Justifier la terminologie de « moteur synchrone » ; l'aimant suit-il ou précède-t-il alors le champ magnétique dans son mouvement ? Quelle est dans ce cas la puissance maximale  $P_m$  que peut fournir le moteur en régime permanent ? Où est précisément la source d'énergie dans ce montage ?
- I.3.c)** On note  $\Gamma = |\langle \vec{\Gamma} \rangle|$  le module de la valeur moyenne du couple magnétique,  $\Gamma_m$  la valeur maximale de  $\Gamma$  et  $\Gamma_u \leq \Gamma_m$  le couple utile fourni par le moteur en régime permanent. Tracer le graphe  $\Gamma(\alpha)$  pour les valeurs de  $\alpha$  correspondant à un dispositif fonctionnant en moteur. Quelle relation lie  $\Gamma$  et  $\Gamma_u$  en régime permanent de fonctionnement du moteur ? Que constate-t-on alors graphiquement pour une valeur donnée de  $\Gamma_u$  ?
- I.3.d)** Énoncer le critère de stabilité de fonctionnement du moteur en régime permanent (lorsque par exemple celui-ci prend accidentellement de l'avance ou du retard sur son régime permanent), puis déterminer qualitativement à partir du graphe  $\Gamma(\alpha)$  le domaine de  $\alpha$  correspondant à un régime stable.
- I.3.e)** Ce type de moteur peut-il démarrer seul ? Expliquer.

## Partie II. Transfert thermique dans une barre

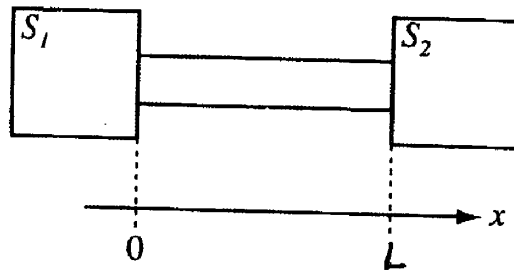
Une barre homogène, de masse volumique  $\rho$ , de capacité thermique massique  $c$ , de conductivité thermique  $\lambda$  (tous paramètres supposés invariants), est modélisée par un cylindre de longueur  $L$  et de section droite  $\Sigma$ .

Les parois latérales du cylindre sont calorifugées de telle sorte que les pertes thermiques latérales sont négligées ; en revanche, chaque extrémité de la barre est en contact avec un thermostat.

L'axe  $Ox$  est choisi parallèlement aux génératrices du cylindre ; l'abscisse  $x = 0$  étant prise à l'extrémité de la barre en contact avec le thermostat  $S_1$ , l'autre extrémité de la barre est alors d'abscisse  $x = L$  en contact avec le thermostat  $S_2$ .

$T(x, t)$  est la température thermodynamique en un point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  de la barre.

Les thermostats  $S_1$  et  $S_2$  imposent les températures  $T_1 = T(0, t)$  et  $T_2 = T(L, t)$ .



## II.1. Bilan énergétique

Dans la barre métallique modélisée précédemment, la conduction thermique est unidirectionnelle, de vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_{th}$  suivant la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \text{grad} T(x,t) \quad \text{avec} \quad \vec{j}_{th} = j_{th}(x,t) \vec{u}_x$$

**II.1.a)** Effectuer un bilan d'énergie sur une tranche élémentaire du conducteur, comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , et établir une relation entre  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\frac{\partial}{\partial x}$ .

**II.1.b)** En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température  $T(x,t)$  :

$$D \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}$$

Expliciter  $D$  et donner son unité.

**II.1.c)** Dans cette seule question les deux thermostats ont des capacités thermiques infinies. En déduire :

- que les thermostats imposent alors des températures  $T_1$  et  $T_2$  constantes
- la distribution de température  $T(x)$  dans la barre en régime permanent (on peut supposer  $T_1 > T_2$  et faire apparaître dans  $T(x)$  un signe pertinent)
- la résistance thermique  $R_{th}$  de la barre métallique après avoir rappelé sa définition.

Dans les deux questions qui suivent, les deux thermostats de conductivité thermique infinie, ont la même capacité thermique  $C$ , non infinie, mais très grande devant la capacité thermique totale de la barre ; l'ensemble constitué par les thermostats et la barre est parfaitement calorifugé. Le thermostat  $S_1$  a une température initiale  $T_1^0$  et le thermostat  $S_2$  a une température initiale  $T_2^0$ .

**II.1.d)** Quelles conséquences, sur les températures des thermostats et la barre, les différentes hypothèses faites à propos des thermostats entraînent-elles ?

**II.1.e)** Montrer que  $\frac{dT_1}{dt} = -\frac{dT_2}{dt}$  et établir les expressions des températures  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  des thermostats au cours du temps en fonction des températures initiales, de  $C$  et de la résistance thermique de la barre (on peut supposer  $T_1^0 > T_2^0$  et écrire  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  sous des formes physiquement pertinentes à l'aide de  $T_1^0$ ,  $T_2^0$ ,  $t$  et d'un temps  $\tau$  à exprimer).

Dessiner le circuit électrocinétique équivalent à cette étude et indiquer à quelles grandeurs thermiques correspondent la tension et le courant.

## II.2. Bilan entropique

On considère d'abord entre les instants  $t$  et  $t + dt$  une tranche élémentaire de la barre comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

**II.2.a)** Exprimer successivement :

- la variation d'entropie  $dS$  de la tranche élémentaire (supposée indilatable) pendant  $dt$  en fonction, entre autre, de  $\frac{\partial}{\partial t}$

- l'entropie échangée  $\delta S_{\text{éch.}}$  par la tranche élémentaire pendant  $dt$  en fonction de  $\partial \left( \frac{j_{\text{th}}}{T} \right)$
- l'entropie créée  $\delta S_{\text{cr.}}$  par la tranche élémentaire pendant  $dt$  en fonction de  $\sigma(x,t)$ , la quantité d'entropie créée par unité de volume et de temps.

**II.2.b)** En déduire la relation entre les grandeurs spatio-temporelles précédentes traduisant le bilan d'entropie local.

La fin du problème concerne la totalité de la barre, uniquement dans le régime permanent de la question **II.1.c)**.

**II.2.c)** Exprimer  $\sigma(x)$ , l'entropie créée par unité de volume et de temps, en fonction de  $x$  et des données. En déduire la quantité totale  $S_{\text{cr.}}$  d'entropie créée dans la barre par unité de temps et commenter son signe.

**II.2.d)** Evaluer directement l'entropie échangée  $S_{\text{éch.}}$  par la barre avec les thermostats par unité de temps et commenter.

**II.2.e)** Déduire des questions précédentes la variation  $\Delta S$  d'entropie de la barre par unité de temps. Ce résultat était-il prévisible ? En quoi cependant est-il original vu le système et la transformation étudiés ?

-----